

異常ドップラー効果による
遅波サイクロトロンメーザの研究

(研究課題番号 12480116)

平成 12-14 年度科学研究費補助金 (基盤研究 (B) (2))
研究成果報告書

平成 15 年 5 月

研究代表者 小椋 一夫
(新潟大学工学部 教授)

目次

1	はしがき	2
2	研究発表	3
2.1	学会誌・国際会議等	3
2.2	口頭発表	4
3	研究概要	6
3.1	研究の背景	6
3.2	研究の目的	7
3.3	研究の概要	7
4	理論解析	9
4.1	解析モデル	9
4.2	電子ビーム中の波動方程式および固有モード	11
4.3	ビーム・真空間の境界条件	19
4.4	周期的コルゲート遅波導波管の分散特性	23
4.5	直円筒静止プラズマ系の数値解析	27
4.6	遅波サイクロトロン不安定性	31
5	実験	40
5.1	実験装置の構成	40
5.2	電子ビーム発生・伝搬実験	51
5.3	大口径遅波導波管とマイクロ波・ミリ波測定システム	54
5.4	K-Band マイクロ波発生実験	58
5.5	Q-Band ミリ波発生実験	68
6	まとめ	74
7	添付資料 (学会誌・国際会議等)	77

平成 12-14 年度科学研究費補助金（基盤研究（B）（2））

研究成果報告書

1 はしがき

（研究課題）

異常ドップラー効果による遅波サイクロトロンメーザの研究

（課題番号） 12480116

（研究組織）

研究代表者：小椋 一夫（新潟大学工学部 教授）

研究分担者：板垣 厚一（新潟大学工学部 教授）

研究分担者：福井 聡（新潟大学大学院自然科学研究科 助教授）

（研究経費）

平成 12 年度 9,800 千円

平成 13 年度 2,700 千円

平成 14 年度 2,100 千円

合計 14,600 千円

2 研究発表

2.1 学会誌・国際会議等

- 1) "Normal Modes and Their High-Frequency Instabilities in Unbounded and Bounded Systems with Magnetized Electron Beam" Watanabe Osamu and Kazuo Ogura, Journal of Plasma and Fusion Research SERIES, Vol.3 (2000) pp.601~604.
- 2) "Slow Wave Electron Cyclotron Maser Utilizing Periodically Corrugated Waveguide" Kazuo OURA, Osamu WATANABE and Daizo KAMIYAMA, Transactions of Fusion Technology, Vol.39, no.1T (2001) pp.320~323.
- 3) "Self-Consistent Linear Analysis of Slow Cyclotron and Cherenkov Instabilities" O. Watanabe, K. Ogura, T. Cho and Md. R. Amin, Physical Review E, Vol.63, no.5-1 (2001) pp.056503-1~056503-9.
- 4) "Study on Open Gradient Magnetic Separation Using Multiple Magnetic Field Sources" S.Fukui, H.Nakajima, A.Ozone, M.Hayatsu, M.Yamaguchi, T.Sato, H.Imaizumi, S.Nishijima and T.Watanabe, IEEE Transactions on Applied Superconductivity, Vol.22, no.1 (2002) pp.959-962.
- 5) "Experiment on Oversized Backward Wave Oscillator Driven by Weakly Relativistic Electron Beam" K. Ogura, Y. Sakurai, R. Yoshida, O. Watanabe and Y. Yamazaki, Japan-US Joint Technical Meeting on Plasma Science and Technology and Pulsed Power Technology, (August 5.6, 2002, Kailua-Kona, Hawaii, USA) PST-02-67/PPT-02-24.
- 6) "Cherenkov and Slow Cyclotron Instabilities of Non-Axisymmetric Modes in Periodic Slow Wave Structure" O. Watanabe, Y. Yamashita, H. Yamazaki and K. Ogura, Japan-US Joint Technical Meeting on Plasma Science and Technology and Pulsed Power Technology, (August 5.6, 2002, Kailua-Kona, Hawaii, USA) PST-02-68/PPT-02-25.

2.2 口頭発表等

- 1) 「磁場を用いない大口径後進波発振器実験Ⅲ」 齊藤幸典, 渡邊理, 小島次郎, 斎藤功, 櫻井陽介, 小椋一夫, 日本物理学会第 55 回年次大会 (2000 年 9 月, 新潟大学) 講演概要集 vol.55, no.2, p.147.
- 2) 「磁場ゼロにおける後進波発振器動作の線形解析」 上山大蔵, 渡邊理, 加藤行勢, 佐野嘉英, 小椋一夫, 日本物理学会第 55 回年次大会 (2000 年 9 月, 新潟大学) 講演概要集 vol.55, no.2, p.147.
- 3) 「異状ドップラー効果による遅波サイクロトロンメーザに関する研究」 渡邊理, 上山大蔵, 加藤行勢, 佐野嘉英, 小椋一夫, 日本物理学会第 55 回年次大会 (2000 年 9 月, 新潟大学) 講演概要集 vol.55, no.2, p.147.
- 4) 「磁場ゼロにおける C バンド後進波発振器の線形解析」 上山大蔵, 渡邊理, 加藤行勢, 佐野嘉英, 小椋一夫, 第 10 回電気学会東京支部新潟支所研究発表会 (2000 年 11 月, 新潟大学工学部) 予稿集 p.32.
- 5) 「磁場を用いない大口径後進波発振器におけるロングパルスマイクロ波発生実験」 齊藤幸典, 渡邊理, 小島次郎, 斎藤功, 櫻井陽介, 小椋一夫, 第 10 回電気学会東京支部新潟支所研究発表会 (2000 年 11 月, 新潟大学工学部) 予稿集 p.43.
- 6) 「ガス中を伝搬する電子ビームによるミリ波帯電磁波の発生」 齊藤幸典, 上山大蔵, 渡邊理, 小椋一夫, 日本物理学会第 56 回年次大会 (2001 年 3 月, 中央大学多摩キャンパス) 講演概要集 vol.56, no.1, p.162.
- 7) 「遅波サイクロトロンメーザ動作に関する研究」 渡邊理, 加藤行勢, 小椋一夫, 日本物理学会第 56 回年次大会 (2001 年 3 月, 中央大学多摩キャンパス) 講演概要集 vol.56, no.1, p.163.
- 8) 「大口径コルゲート導波管による電磁波発生の実験的研究」 齊藤幸典, 新型プラズマ電磁波源によるプラズマ航跡場診断に関する研究会 (2001 年 11 月, 新潟大学大学院自然科学研究科)
- 9) 「有限磁場における円筒導波管中のハイブリッドモードの解析」 加藤行勢, 新型プラズマ電磁波源によるプラズマ航跡場診断に関する研究会 (2001 年 11 月, 新潟大学大学院自然科学研究科)
- 10) 「C バンド PASOTRON の発振モードに関する研究」 上山大蔵, 渡邊理, 加藤行勢, 山下雄市郎, 渡辺正人, 小椋一夫, 第 11 回電気学会東京支部新潟支所研究発表会 (2001 年 11 月, 新潟大学工学部) 予稿集 p.35
- 11) 「大口径波型導波管を用いた K バンドマイクロ波発生実験」 櫻井陽介, 齊藤幸典, 渡邊理, 秋澤誠, 笹川和也, 吉田涼, 小椋一夫, 第 11 回電気学会東京支部新潟支所研究発表会 (2001 年 11 月, 新潟大学工学部) 予稿集 p.38.

- 12) 「ミリ波・サブミリ波帯パルス電磁波発生」小椋一夫, 新型プラズマ電磁波源によるプラズマ航跡場診断に関する研究会 (2002年10月, 宇都宮大学農学部日光演習林)
- 13) 「大口径後進波発振器の発振特性に関する実験的研究」吉田涼, 新型プラズマ電磁波源によるプラズマ航跡場診断に関する研究会 (2002年10月, 宇都宮大学農学部日光演習林)
- 14) 「後進波発振器における非軸対称モードとその不安定性の線形解析」山下雄市郎, 新型プラズマ電磁波源によるプラズマ航跡場診断に関する研究会 (2002年10月, 宇都宮大学農学部日光演習林)
- 15) 「直円筒導波管中の非軸対称モードに関する研究」加藤行勢, 渡邊理, 山寄星征, 山下雄市郎, 岩井誠, 鈴木善高, 小椋一夫, 日本物理学会2002年度秋季大会 (2002年9月, 中部大学) 講演概要集 vol.57, no.2, p.195.
- 16) 「大口径後進波発振器実験Ⅰ—ガイド磁場による発振モードの変化—」櫻井陽介, 吉田涼, 小宮山清文, 酒井将和, 櫻井忠, 山寄星征, 渡邊理, 小椋一夫, 日本物理学会2002年秋季大会 (2002年9月, 中部大学) 講演概要集 vol.57, no.2, p.195.
- 17) 「磁化プラズマを含む直円筒導波管中の非軸対称モードに関する研究」加藤行勢, 渡邊理, 山寄星征, 山下雄市郎, 岩井誠, 鈴木善高, 小椋一夫, 第12回電気学会東京支部新潟支所研究発表会 (2002年11月, 長岡技術科学大学) 予稿集 p.40
- 18) 「大口径波形導波管の電磁波発生実験—電磁波発生の導波管長依存性—」吉田涼, 櫻井陽介, 山寄星征, 渡邊理, 小宮山清文, 酒井将和, 櫻井忠, 小椋一夫, 第12回電気学会東京支部新潟支所研究発表会 (2002年11月, 長岡技術科学大学) 予稿集 p.45.
- 19) 「磁化電子ビームを含む遅波構造中におけるハイブリッドモードに関する研究」山寄星征, 加藤行勢, 山下雄市郎, 鈴木善高, 岩井誠, 小椋一夫, 渡邊理, 日本物理学会第58回年次大会 (2003年3月, 東北大学川内キャンパス) 講演概要集 vol.58, no.1, p.208.
- 20) 「大口径後進波発振器実験Ⅱ—導波管周期長の変化による発振モードの変化—」吉田涼, 櫻井陽介, 山寄星征, 小宮山清文, 酒井将和, 櫻井忠, 小椋一夫, 日本物理学会第58回年次大会 (2003年3月, 東北大学川内キャンパス) 講演概要集 vol.58, no.1, p.213.

3 研究概要

3.1 研究の背景

大強度電子ビームを用いた大電力マイクロ波源の研究は、近年のパルスパワー技術の進歩に伴い著しく進展している⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾。これらのマイクロ波源では、電子ビーム伝搬のために軸方向に強磁場を加えている。電磁波発生には、次の共鳴条件を満たすビームとの相互作用を用いる。

$$\omega = k_z v_z + S\Omega$$

ここで、 ω と k_z は電磁波の角周波数と軸方向の波数、 v_z はビームの軸方向速度、 Ω はビーム電子の相対論的サイクロトロン角周波数である。

- ① $S = 0$ チェレンコフ相互作用
後進波発振器(BWO), 進行波管(TWT)
- ② $S < 0$ 遅波サイクロトロン共鳴相互作用
遅波サイクロトロンメーザ
- ③ $S > 0$ 速波サイクロトロン共鳴相互作用
速波サイクロトロンメーザ, ジャイロトロン,
- ④ $\Omega = 0$ で①②③が縮態した相互作用

Plasma-Assisted Slow-Wave Oscillator (Pasotron)

電子と電磁波の相互作用③を用いるジャイロトロンはよく知られており⁽⁴⁾、現在の核融合プラズマ加熱研究用マイクロ波源として欠かせないものである。軸方向入射電子ビームが利用する電磁波源は、①, ②, ④に基づいたものである。この場合、ビームと相互作用する電磁波の位相速度は光速より遅い。その意味で遅波電磁波源である。大強度相対論的電子ビームを用いる場合、非常に有利である。

後進波発振器はチェレンコフ相互作用①による遅波マイクロ波源として代表的存在である。後進波発振器において、マイクロ波出力が磁場強度に依存し、共鳴的に減少、あるいは反対に増加する現象が報告されている。前者は、速波サイクロトロン共鳴相互作用によるマイクロ波の吸収で説明可能である。後者は速波サイクロトロン共鳴相互作用では説明は困難である。別の機構として遅波サイクロトロン共鳴相互作用が提案されている。通常のチェレンコフ相互作用に加えて、遅波サイクロトロン共鳴相互作用を用いた遅波サイクロトロンメーザも報告されている⁽⁵⁾⁻⁽¹⁰⁾。遅波サイクロトロン共鳴相互作用においては軸方向の電子のエネルギーをマイクロ波エネルギーに変換可能である⁽¹¹⁾⁻⁽¹⁶⁾。垂直方向の電子エネルギーが必要である速波サイクロトロンメーザとは本質的に異なる。

後進波発振器では遅波構造として周期的コルゲート導波管を用いる。大口径化することでマイクロ波出力を上げる。チャンピオンデータは大口径後進波発振器の改良型で得られている^(17,18)。つまり、

- ・ 相対論的回折発振器 (Relativistic Diffraction Generator: RDG)
波長 9-11.3 mm, 出力 4.5 GW
- ・ 多重波動チェレンコフ発振器 (Multi-Wave Cherenkov Generator: MWCG)
波長 30 mm, 出力 15GW

相対論的回折発振器では、周期構造の近傍に電磁波が集中した表面波が形成され、それと電子ビームが相互作用する。このため表面波発振器 (Surface-Wave Oscillator) とも呼ばれる。

異常ドップラー効果による遅波サイクロトロン共鳴相互作用は、トカマクの runaway 放電時の鋸歯状振動を引き起こす機構として知られている。本研究では、同じ機構の誘導放射を利用し単一スペクトルの電磁波を得る遅波サイクロトロンメーザを提案する。導波管の形状つまり境界条件によるビーム不安定性の制御を取り入れる。また、高周波数化のため大口径遅波導波管を使用するが、その場合、遅波サイクロトロン相互作用とチェレンコフ相互作用の関係が問題になる。プラズマ物理、ビーム物理として興味のあるテーマであるが、これまで殆ど研究されておらず、本研究を提案した。

3.2 研究の目的

本研究の目的を以下に記す。

1. 異常ドップラー効果による遅波サイクロトロンメーザの機構解明
周期構造の遅波導波管を用い、遅波サイクロトロン共鳴相互作用とチェレンコフ相互作用を単独に調べた上で、2つの相互作用の競合と協調・共鳴について実験的に明らかにする。
2. 遅波サイクロトロンメーザの高周波数化
大口径周期的遅波導波管を用い高周波数化の実験を行う。大電流電子ビーム入射による大電力発振を特徴とする。動作周波数、発振効率、発振電力を実験的に明らかにする。

3.3 研究の概要

本研究では、異常ドップラー効果による遅波サイクロトロン共鳴相互作用の誘導放射を利用し単一スペクトルの電磁波を得る遅波サイクロトロンメーザを提案している。理論的研究と実験的研究を連携させ、その機構を解明していく。研究の概要を箇条書きにまとめる。詳しくは、本報告書の第

4章以降に述べる。

・磁場システム製作と評価

内径 ϕ 150mm, 水冷式の磁場コイルおよび最大電流値500Aの磁場電源により, 磁場配意が可変な磁場システムを新たに構築した。磁場コイルの電流分布と磁場配位との関係を定量的に調べ, 軸方向414mm, 半径方向60mmの範囲で変化率5%以内の磁場が得られた。

・遅波導波管の設計・製作

周期的コルゲートを用いた遅波導波管を設計し, 20GHz帯(K-Band)と40GHz帯(Q-Band)の遅波導波管を製作した。

・大電流電子ビーム発生実験と磁場による電子ビーム制御

この磁場による制御により, 高真空状態において, 60kV程度, 数100Aの電子ビームを360mm以上伝搬させることができた。

・遅波サイクロトロンメーザの基礎的研究

電子ビーム源と磁場による電子ビーム制御を用い, 遅波サイクロトロンメーザの基礎実験を行った。電子ビームパラメータの測定系, マイクロ波測定系を整備し, マイクロ波実験を行った。また, 遅波サイクロトロンメーザ動作を解析した結果は, 米国の雑誌Phys. Rev. Eに論文として掲載された。

・異常ドップラー効果による遅波サイクロトロンメーザの動作実験

K-Band大口径周期的波形導波管により, チェレンコフ相互作用と遅波サイクロトロン相互作用によるマイクロ波発生について調べた。発振周波数は20-25GHz, 発振電力は最大で約100kW(約2%)が得られた。比較的低磁場の領域で異常ドップラー効果による遅波サイクロトロンメーザの動作と思われる非軸対称モードの発振が確認された。回転角方向のモード数は1あるいは2と考えられる。磁場強度によりチェレンコフ相互作用と遅波サイクロトロン相互作用を制御した。

・高周波数化の実験的研究

Q-Band大口径波形導波管を使用して高周波数化の実験を行った。周波数約35GHzのミリ波が得られた。発振電力は最大で30kW程度以下(発振効率は約0.4%)で, K-Bandに比べ約1/4程度であった。

4 理論解析

4.1 解析モデル

Fig.4-1-1 に数値計算に用いる解析モデルを示す。外部磁場は軸方向 (z 軸の正方向) に一様に掛ける。軸方向に入射された電子ビームは半径 R_0 内で一様に分布し、平衡状態を保って軸方向に伝搬すると仮定する。平衡状態の速度は、軸方向を z 軸とする円筒座標系で $v_0 = (0, 0, v_0)$ とする。遅波導波管は周期的に変化する半径 $R_w(z) = R_0 + h \cos(k_0 z)$ を有する。ここで、 R_0 は平均半径、 h はコルゲート振幅、 $k_0 = 2\pi/z_0$ はコルゲートの波数、 z_0 はコルゲートの周期長である。

マイクロ波の発振はビームモードと電磁波モードの相互作用によって起こる。しかし、直円筒導波管ではモードが光速線よりも上にあり、ビームと結合しない。そのため遅波構造を用いて電磁波モードの位相速度をビーム速度まで減少させる必要がある。代表的なものとして誘電体を入れた導波管と周期的なコルゲート導波管がある。Fig.4-1-2 は直円筒導波管とコルゲート導波管の電磁波モードを模式的に表したものである。コルゲート導波管の空間的周期性により、空間高調波が生じる。これは、波数空間でシフトした直円筒導波管モードとして扱うことができる。それらの和によりコルゲート導波管モードは形成され、ビームモードとの相互作用が可能になる。

このように周期的に変化する構造内の電磁波には、位相速度が光の速度より遅い空間高調波成分が存在する。その中で、電子ビームの固有モードと同じ位相速度を持つ空間高調波が電子ビームと相互作用する。本研究においては外部磁場が有限であるので、ビームの固有モードは空間電荷モードとサイクロトロンモードである。磁場をゼロとするとこれらの縮重 (縮退) したモードになる。遅波導波管の長さ L は実験では有限であるが、理論解析では無限長を仮定する。有限の L では、軸方向の波数 k_z は離散的値しかとれなくなる。有限長の弦の振動に見られる定在波に対応している。この効果を無視してもビームと電磁波の相互作用の本質は解析することができる。実際のマイクロ波発生においては、無限長の解析で得られた発振モードの中で、有限の L による遅波導波管両端の境界条件を満たすものが現れると考えられる。

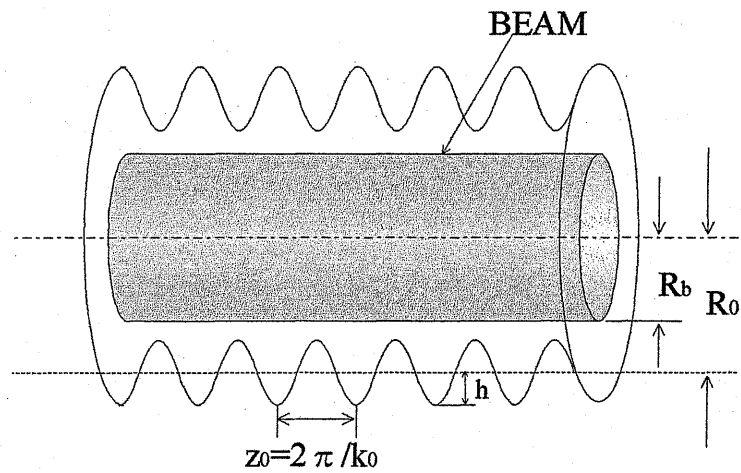


Fig.4-1-1 コルゲート導波管の解析モデル

平均半径 : R_0 ビーム半径 : R_b

振幅 : h 波長 : z_0

半径 $R(z) = R_0 + h \cos(k_0 z)$, ここで $k_0 = 2\pi/z_0$

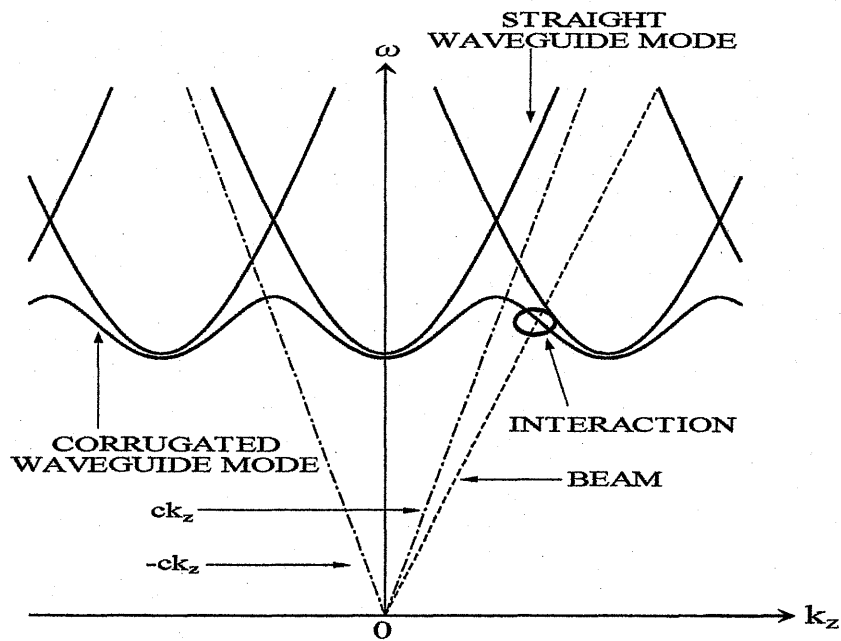


Fig.4-1-2 コルゲート導波管の電磁波モード

4.2 電子ビーム中の波動方程式および固有モード

ビームと電磁波の相互作用は Maxwell 方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J} \quad (4.2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (4.2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.2.4)$$

を与えられた境界条件の下に解くことで調べるができる。源泉項 (source terms) であるビームによる電流密度 \mathbf{J} と電荷密度 ρ を以下に導出する。

電子に対する相対論的運動方程式

$$\frac{dm_e \gamma \mathbf{v}}{dt} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4.2.5)$$

を, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1$ において線形化する。下付の 0 と 1 は, それぞれ平衡状態の 0 次量と擾乱による 1 次量を表す。運動方程式は以下のようになる。

$$0 \text{ 次量 } m_e \gamma \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = 0$$

$$1 \text{ 次量 } m_e \gamma \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = -e(\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_1) + e \frac{v_0}{c} \left(\mathbf{E}_1 \cdot \frac{\mathbf{v}_0}{c} \right) \quad (4.2.6)$$

ここで, $\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{e}{m_e c^2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})$ を用いた。以下では, 擾乱の空間, 時間依存性を

$\exp[i(k_z z + m\theta - \omega t)]$ と仮定する。式(4.2.6)より速度の擾乱 \mathbf{v}_1 は

$$\begin{aligned} v_{1r} &= -i \frac{e}{m_e \gamma} \frac{\omega'}{\omega'^2} (E_{1r} - v_0 B_{1\theta}) - \frac{e}{m_e \gamma} \frac{1}{\omega'^2} \frac{\Omega}{\gamma} (E_{1\theta} + v_0 B_{1r}) \\ v_{1\theta} &= \frac{e}{m_e \gamma} \frac{\Omega}{\gamma} \frac{1}{\omega'^2} (E_{1r} - v_0 B_{1\theta}) - i \frac{e}{m_e \gamma} \frac{\omega'}{\omega'^2} (E_{1\theta} + v_0 B_{1r}) \\ v_{1z} &= -i \frac{e}{m_e \gamma^3} \frac{1}{\omega'} E_{1z} \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

と求まる。ここで,

$$\omega' = \omega - k_z v_0$$

$$\omega'^2 = (\omega - k_z v_0)^2 - (\Omega/\gamma)^2$$

であり, $\Omega = eB_0/m_e$ は電子のサイクロトロン角周波数, また運動方程式の時間

による微分は $\frac{d}{dt} = -i(\omega - k_z v_0)$ となることを用いた。従って, 一次の電流密度

$\mathbf{J}_1 = -en_1 \mathbf{v}_0 - en_0 \mathbf{v}_1$ は

$$J_{1r} = i\varepsilon_0 \frac{\omega_b^2}{\gamma} \frac{\omega'}{\omega'^2} (E_{1r} - v_0 B_{1\theta}) + \varepsilon_0 \frac{\omega_b^2}{\gamma} \frac{1}{\omega'^2} \frac{\Omega}{\gamma} (E_{1\theta} + v_0 B_{1r}) \quad (4.2.8)$$

$$J_{1\theta} = -\varepsilon_0 \frac{\omega_b^2}{\gamma} \frac{\Omega}{\gamma} \frac{1}{\omega'^2} (E_{1r} - v_0 B_{1\theta}) + i\varepsilon_0 \frac{\omega_b^2}{\gamma} \frac{\omega'}{\omega'^2} (E_{1\theta} + v_0 B_{1r}) \quad (4.2.9)$$

$$J_{1z} = i\varepsilon_0 \frac{\omega_b^2}{\gamma} \frac{1}{\omega'} E_{1z} + \rho_1 v_0 \quad (4.2.10)$$

と表すことができる。ここで、 $\rho_1 = -en_1$ とおいた。 ρ_1 は連続の式 $\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot J_1 = 0$,

つまり $i\omega\rho_1 - ik_z v_0 \rho_1 = \frac{\partial J_{1r}}{\partial r} + \frac{1}{r} J_{1r} + i\frac{m}{r} J_{1\theta} - \varepsilon_0 \frac{\omega_b^2}{\gamma^3} \frac{k_z}{\omega'} E_{1z}$ より,

$$\begin{aligned} \rho_1 = & \varepsilon_0 \frac{\omega_b^2}{\gamma} \frac{1}{\omega'^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} (E_{1r} - v_0 B_{1\theta}) + \frac{1}{r} (E_{1r} - v_0 B_{1\theta}) + \frac{im}{r} (E_{1\theta} + v_0 B_{1r}) \right] \\ & - i\varepsilon_0 \frac{\omega_b^2}{\gamma} \frac{1}{\omega'^2} \frac{\Omega}{\gamma} \left[\frac{\partial}{\partial r} (E_{1\theta} + v_0 B_{1r}) + \frac{1}{r} (E_{1\theta} + v_0 B_{1r}) - \frac{im}{r} (E_{1r} - v_0 B_{1\theta}) \right] \\ & + i\varepsilon_0 \frac{\omega_b^2}{\gamma^3} \frac{k_z}{\omega'^2} E_{1z} \quad (4.2.11) \end{aligned}$$

と求まる。この ρ_1 を式(4.2.10)に代入し

$$\begin{aligned} J_z = & i\varepsilon_0 \frac{\omega_b^2}{\gamma^3} \frac{\omega}{\omega'^2} E_z \\ & + \varepsilon_0 \frac{\omega_b^2}{\gamma} \frac{v_0}{\omega'^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} (E_{1r} - v_0 B_{1\theta}) + \frac{1}{r} (E_{1r} - v_0 B_{1\theta}) + \frac{im}{r} (E_{1\theta} + v_0 B_{1r}) \right] \\ & - i\varepsilon_0 \frac{\omega_b^2}{\gamma} \frac{v_0}{\omega'^2} \frac{\Omega}{\gamma \omega'} \left[\frac{\partial}{\partial r} (E_{1\theta} + v_0 B_{1r}) + \frac{1}{r} (E_{1\theta} + v_0 B_{1r}) + \frac{im}{r} (E_{1r} - v_0 B_{1\theta}) \right] \quad (4.2.12) \end{aligned}$$

を得る。次に、式(4.2.8)~(4.2.12)の電磁場の項 $E_{1r} - v_0 B_{1\theta}$, $E_{1\theta} + v_0 B_{1r}$ と電磁場の軸方向成分 E_{1z} , B_{1z} との関係を求める。Maxwell 方程式(4.2.1), (4.2.2)から

$$E_{1r} - v_0 B_{1\theta} = i \frac{k_z - \frac{\omega v_0}{c^2}}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2} \frac{\partial E_{1z}}{\partial r} - i \frac{\omega'}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2} \mu_0 J_{1r} - \frac{\omega'}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2} \frac{m}{r} B_{1z}, \quad (4.2.13)$$

$$E_{1\theta} + v_0 B_{1r} = -i \frac{\omega'}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2} - i \frac{\omega'}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2} \mu_0 J_{1\theta} - \frac{k_z - \frac{\omega v_0}{c^2}}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2} \frac{m}{r} E_{1z}. \quad (4.2.14)$$

この式に電流密度の式(4.2.8), 式(4.2.9)を代入し、以下の式を得る。

$$\begin{aligned} E_{1r} - v_0 B_{1\theta} = & \frac{i}{\Delta} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^2} \frac{\omega'^2}{\omega'^2} \right) \left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2} \right) \frac{\partial E_{1z}}{\partial r} - \frac{1}{\Delta} \frac{\omega_b^2}{\gamma^2} \frac{\omega'^2}{\omega'^2} \frac{\Omega}{\gamma} \frac{\partial B_{1z}}{\partial r} \\ & - \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^2} \frac{\omega'^2}{\omega'^2} \right) \omega' \frac{m}{r} B_{1z} + \frac{i}{\Delta} \frac{\omega_b^2}{\gamma^2} \frac{\omega'}{\omega'^2} \frac{\Omega}{\gamma} \left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2} \right) \frac{m}{r} E_{1z} \quad (4.2.15) \end{aligned}$$

$$E_{1\theta} + v_0 B_{1r} = -\frac{1}{\Delta} \frac{\omega_b^2}{\gamma^2} \frac{\omega'}{\omega'^2} \frac{\Omega}{\gamma} \left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2} \right) \frac{\partial E_{1z}}{\partial r} - \frac{i}{\Delta} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^2} \frac{\omega'^2}{\omega'^2} \right) \omega' \frac{\partial B_{1z}}{\partial r}$$

$$-\frac{i \omega_b^2 \omega'^2 \Omega m}{\Delta \gamma c^2 \omega'^2 \gamma r} B_{1z} - \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 - \frac{\omega_b^2 \omega'^2}{\gamma c^2 \omega'^2} \right) \left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2} \right) \frac{m}{r} E_{1z} \quad (4.2.16)$$

ここで

$$\Delta = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 - \frac{\omega_b^2 \omega'^2}{\gamma c^2 \omega'^2} \right)^2 - \left(\frac{\omega_b^2 \omega' \Omega}{\gamma c^2 \omega'^2 \gamma} \right)^2 \quad (4.2.17)$$

式(4.2.8), (4.2.9), (4.2.12)および式(4.2.11)に上式を代入すると, 線形化した Maxwell 方程式の源泉 (J_1 と ρ_1) が擾乱による電磁場の軸方向成分 E_{1z} , E_{1z} により以下のように表される。

$$\begin{aligned} J_{1r} = & -\varepsilon_0 \frac{\omega_b^2 \omega'}{\gamma \Delta \omega'^2} \left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2} \right) \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 - \frac{\omega_b^2 \omega'^2}{\gamma c^2 \omega'^2} \right) \frac{\partial E_{1z}}{\partial r} \\ & - \varepsilon_0 \frac{\omega_b^2 \gamma}{\gamma \Delta \omega'^2} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2} \right) \frac{m}{r} E_{1z} \\ & - i \varepsilon_0 \frac{\omega_b^2 \gamma}{\gamma \Delta \omega'^2} \omega' \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \frac{\partial B_{1z}}{\partial r} \\ & - i \varepsilon_0 \frac{\omega_b^2 \omega'^2}{\gamma \Delta \omega'^2} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 - \frac{\omega_b^2 \omega'^2}{\gamma c^2 \omega'^2} \right) \frac{m}{r} B_{1z} \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

$$\begin{aligned} J_{1\theta} = & +\varepsilon_0 \frac{\omega_b^2 \omega'^2}{\gamma \Delta \omega'^2} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 - \frac{\omega_b^2 \omega'^2}{\gamma c^2 \omega'^2} \right) \frac{\partial B_{1z}}{\partial r} + \varepsilon_0 \frac{\omega_b^2 \gamma \omega'}{\gamma \Delta \omega'^2} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \frac{m}{r} B_{1z} \\ & - i \varepsilon_0 \frac{\omega_b^2 \gamma}{\gamma \Delta \omega'^2} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2} \right) \frac{\partial E_{1z}}{\partial r} \\ & - i \varepsilon_0 \frac{\omega_b^2 \omega'}{\gamma \Delta \omega'^2} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 - \frac{\omega_b^2 \omega'^2}{\gamma c^2 \omega'^2} \right) \left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2} \right) \frac{m}{r} E_{1z} \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

$$\begin{aligned} J_{1z} = & i \varepsilon_0 \frac{\omega_b^2 \omega}{\gamma^3 \omega'^2} E_{1z} \\ & + i \varepsilon_0 \frac{\omega_b^2 v_0}{\gamma \Delta \omega'^2} \left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2} \right) \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 - \frac{\omega_b^2 \omega'^2}{\gamma c^2 \omega'^2} \right) \left(\frac{\partial^2 E_{1z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_{1z}}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} E_{1z} \right) \\ & - \varepsilon_0 \frac{\omega_b^2 v_0 \gamma}{\gamma \Delta \omega'^2} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \left(\frac{\partial^2 B_{1z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_{1z}}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} B_{1z} \right) \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

$$\rho_1 = i \varepsilon_0 \frac{\omega_b^2 k_z}{\gamma^3 \omega'^2} E_{1z}$$

$$\begin{aligned}
& +i\varepsilon_0 \frac{\omega_b^2}{\gamma} \frac{1}{\Delta\omega'^2} \left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2} \right) \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \right) \left(\frac{\partial^2 E_{1z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_{1z}}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} E_{1z} \right) \\
& - \varepsilon_0 \frac{\omega_b^2}{\gamma} \frac{\Omega}{\Delta\omega'^2} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \left(\frac{\partial^2 B_{1z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_{1z}}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} B_{1z} \right) \quad (4.2.21)
\end{aligned}$$

次にビーム中の波動方程式を求める。先ず、式(4.2.1)と(4.2.2)の回転 (rotation) より以下の式を導出する。

$$\begin{cases}
\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = \nabla \left(\frac{\rho_1}{\varepsilon_0} \right) - i\omega \mu_0 \mathbf{J} \\
\nabla^2 \mathbf{B} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \times \mathbf{J}
\end{cases} \quad (4.2.22)$$

軸方向電磁場成分 E_{1z} , B_{1z} に対する方程式 (式(4.2.22)の z 成分) は

$$\frac{\partial^2 E_{1z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_{1z}}{\partial r} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) E_{1z} = -i\omega \mu_0 J_{1z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\rho_1}{\varepsilon_0} \quad (4.2.23)$$

$$\frac{\partial^2 B_{1z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_{1z}}{\partial r} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) B_{1z} = -i\mu_0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r J_{1\theta}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} J_{1r} \right) \quad (4.2.24)$$

ここで、式(4.2.18)~(4.2.21)が示すように源泉項は全て軸方向の電磁場成分により表すことができる。上式の右辺に、式(4.2.18)~(4.2.20)の J_1 と式(4.2.21)の ρ_1 を代入し整理する。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z} \frac{\rho_1}{\varepsilon_0} - i\omega \mu_0 J_{1z} \\
& = \frac{\omega_b^2}{\gamma^3} \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 E_{1z} \\
& - \frac{\omega_b^2}{\gamma} \frac{\left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2} \right)^2}{\Delta\omega'^2} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \frac{\omega'^2}{\omega'^2} \right) \left(\frac{\partial^2 E_{1z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_{1z}}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} E_{1z} \right) \\
& - i \frac{\omega_b^2}{\gamma} \frac{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right)}{\Delta\omega'^2} \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \frac{\Omega}{\omega'^2} \left(\frac{\partial^2 B_{1z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_{1z}}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} B_{1z} \right) \quad (4.2.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial J_{1\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} J_{1\theta} - \frac{im}{r} J_{1r} \\
& = -i\varepsilon_0 \frac{\omega_b^2}{\gamma} \frac{\left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2} \right)}{\Delta\omega'^2} \frac{\Omega}{\gamma} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \left(\frac{\partial^2 E_{1z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_{1z}}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} E_{1z} \right)
\end{aligned}$$

$$+ \varepsilon_0 \frac{\omega_b^2}{\gamma} \frac{\omega'^2}{\Delta \omega''^2} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \right) \left(\frac{\partial^2 B_{1z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_{1z}}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} B_{1z} \right) \quad (4.2.26)$$

上式で表される源泉項を式(4.2.23)と(4.2.24)に代入し、以下の波動方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta \omega''^2} \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \left(\omega''^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^3} \right) - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \left(\omega'^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^3} \right) \right] \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} E_{1z} \right) \\ & + \left(1 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^3 \omega'^2} \right) E_{1z} + i \frac{\omega_b^2}{\gamma} \frac{\Omega}{\gamma} \frac{\left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2} \right)}{\Delta \omega''^2} \left(\frac{\partial^2 B_{1z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_{1z}}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} B_{1z} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta \omega''^2} \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \omega''^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \omega'^2 \right] \left(\frac{\partial^2 B_{1z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_{1z}}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} B_{1z} \right) \\ & + B_{1z} - i \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \frac{\Omega}{\gamma} \frac{\left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2} \right)}{\Delta \omega''^2} \left(\frac{\partial^2 E_{1z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_{1z}}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} E_{1z} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

上式より、軸方向成分 E_{1z} と B_{1z} に対する2次微分方程式が結合していることが分かる。結局、それぞれの4次微分方程式になる。4次微分方程式の解法は別の教科書に譲り、ここでは、ベッセル関数解を仮定し、2つの方程式を連立方程式として解く手法を用いる。軸方向電磁場成分は円筒関数であるベッセル関数で表されるとする。

$$E_{1z} = A_{\text{TM}} J_m(k_{Bm} r) \quad (4.2.29)$$

$$B_{1z} = \frac{i}{c} A_{\text{TE}} J_m(k_{Bm} r) \quad (4.2.30)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{\Delta \omega''^2} \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \left(\omega''^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^3} \right) - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \left(\omega'^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^3} \right) \right] k_{Bm}^2 - \left(1 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^3 \omega'^2} \right) \right\} A_{\text{TM}} J_0(k_{Bm} r) \\ & - \frac{\omega_b^2}{\gamma} \frac{1}{\Delta \omega''^2} \left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2} \right) \frac{\Omega}{\gamma c} k_{Bm}^2 A_{\text{TE}} J_0(k_{Bm} r) = 0 \end{aligned} \quad (4.2.31)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\omega_b^2}{\gamma} \frac{1}{\Delta \omega''^2} \left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2} \right) \frac{\Omega}{\gamma c} k_{Bm}^2 A_{\text{TM}} J_0(k_{Bm} r) \\ & + \left\{ \frac{1}{\Delta \omega''^2} \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \omega''^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \omega'^2 \right] k_{Bm}^2 - 1 \right\} A_{\text{TE}} J_0(k_{Bm} r) = 0 \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

恒等的にゼロでない軸方向成分 E_{1z} , B_{1z} が存在するためには、

$$\left(\omega''^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^3} \right) k_{Bm}^4 - \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \left(\omega''^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^3} \right) - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \left(\omega'^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^3} \right) \right] k_{Bm}^2$$

$$-\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2\right)\omega'^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2}\omega'^2\right]\left(1 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^3\omega'^2}\right)k_{Bm}^2 + \Delta\omega'^2\left(1 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^3\omega'^2}\right) = 0 \quad (4.2.33)$$

これより、軸に垂直な波数 k_{Bm} は次式で与えられる。

$$k_{Bm}^2 = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_4a_0}}{2a_4}$$

$$a_4 = \omega'^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^3}, \quad a_0 = \Delta\omega'^2\left(1 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^3\omega'^2}\right)$$

$$a_2 = -\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2\right)\left(\omega'^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^3}\right) - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2}\left(\omega'^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^3}\right)\right]$$

$$-\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2\right)\omega'^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2}\omega'^2\right]\left(1 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^3\omega'^2}\right) \quad (4.2.34)$$

軸と垂直方向の波数は2つ存在し、つまり対応する2つのモードが存在することになる。外部磁場強度が無限大では次の2つの値になる。

$$k_{Bm}^2 = \begin{cases} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2\right)\left(1 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^3\omega'^2}\right) \\ \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2\right) \end{cases} \quad (4.2.35)$$

これは、従来の磁場強度無限大を仮定したモデルにより得られるTMモード(上)とTEモード(下)の波数である。この場合、磁場と垂直な電子の擾乱は無くなり、 E_{1z} と B_{1z} に対する波動方程式が独立した2次微分方程式となることから理解できる。磁場強度が有限の場合は、磁場と垂直なサイクロトロン運動の影響を受けた電子の擾乱のため、TMモードとTEモードは独立した状態では存在し得ない。

また、 $k_{B\perp}^2 = k_+^2$ or k_-^2 を満たすとき

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + k_{Bm}^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)E_{1z} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + k_{Bm}^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)B_{1z} = 0. \quad (4.2.36)$$

一見、TMモードとTEモードは独立した状態のように見えるが、磁化電子ビーム中のTMモードとTEモードは次のように関係している。

$$A_{TE} = \frac{\frac{\omega_b^2}{\gamma}\left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2}\right)\frac{\Omega}{\gamma c}k_{Bm}^2}{\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2\right)\omega'^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2}\omega'^2\right]k_{Bm}^2 - \Delta\omega'^2} A_{TM} \quad (4.2.37)$$

あるいは

$$A_{TM} = \frac{\frac{\omega_b^2}{\gamma c} \left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2} \right) \frac{\Omega}{\gamma} k_{Bm}^2}{\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \left(\omega'^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^3} \right) - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \left(\omega'^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^3} \right) \right] k_{Bm}^2 - \Delta \omega'^2 \left(1 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^3 \omega'^2} \right)} A_{TE} \quad (4.2.38)$$

軸と垂直な電磁場成分は次のように求まる。

$$B_{1z} = i \frac{\frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2} \right) \frac{\Omega}{\gamma} k_{Bm}^2}{\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \omega'^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \omega'^2 \right] k_{Bm}^2 - \Delta \omega'^2} A_m J_m(k_{Bm} r) \quad (4.2.39)$$

$$E_{1r} = \frac{i}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2} \left\{ k_z + \frac{\frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2} \right) \omega' \omega \left[k_{Bm}^2 - \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \right) \right]}{\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \omega'^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \omega'^2 \right] k_{Bm}^2 - \Delta \omega'^2} \right\} A_m k_{Bm} J_m'(k_{Bm} r)$$

$$-i \frac{\frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \frac{\Omega}{\gamma} \omega \left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2} \right)}{\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \omega'^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \omega'^2 \right] k_{Bm}^2 - \Delta \omega'^2} \frac{m}{r} A_m J_m(k_{Bm} r) \quad (4.2.40)$$

$$E_{1\theta} = \frac{\frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2} \right) \frac{\Omega}{\gamma} \omega}{\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \omega'^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \omega'^2 \right] k_{Bm}^2 - \Delta \omega'^2} A_m k_{Bm} J_m'(k_{Bm} r)$$

$$- \frac{\left(\omega'^2 k_z - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \omega' v_0 \right) \left[k_{Bm}^2 - \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \right] + \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \omega' \left(k_z \omega' - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} v_0 \right)}{\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \omega'^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \omega'^2 \right] k_{Bm}^2 - \Delta \omega'^2} \frac{m}{r} A_m J_m(k_{Bm} r) \quad (4.2.41)$$

$$B_{1\theta} = \frac{i}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2} \left\{ \frac{\omega}{c^2} + \frac{\frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2} \right) k_z \omega' \left[k_{Bm}^2 - \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \right) \right]}{\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \omega'^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \omega'^2 \right] k_{Bm}^2 - \Delta \omega'^2} \right\} A_m k_{B\perp} J_0'(k_{Bm} r)$$

$$-i \frac{\frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \frac{\Omega}{\gamma} k_z \left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2} \right)}{\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \omega'^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \omega'^2 \right] k_{Bm}^2 - \Delta \omega'^2} \frac{m}{r} A_m J_m(k_{Bm} r) \quad (4.2.42)$$

$$\begin{aligned}
B_{1r} = & - \frac{\frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2} \right) \frac{\Omega}{\gamma} k_z}{\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \omega'^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \omega'^2 \right] k_{Bm}^2 - \Delta \omega'^2} A_m k_{Bm} J_m'(k_{Bm} r) \\
& + \frac{\left(\frac{\omega}{c^2} \omega'^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \omega' \right) \left[k_{Bm}^2 - \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \right] + \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \omega' \left(\frac{\omega}{c^2} \omega' - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \right)}{\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \omega'^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \omega'^2 \right] k_{Bm}^2 - \Delta \omega'^2} \frac{m}{r} A_m J_m(k_{Bm} r) \quad (4.2.42)
\end{aligned}$$

4.3 ビーム・真空間の境界条件

Fig.4-1-1 に示す系の分散特性を求めるためには、Maxwell 方程式を与えられた境界条件 (Fig.4-3-1) の下で解く必要がある。ビーム中 ($r < R_b$) における波動方程式(4.2.31)と(4.2.32)の解は、式(4.2.29)と(4.2.30)、つまり

$$E_{1z}^{\text{in}} = A_{\text{TM}} J_m(k_{Bm} r), \quad B_{1z}^{\text{in}} = \frac{i}{c} B_{\text{TE}} J_m(k_{Bm} r)$$

のように表すことができる。ここで、 k_{Bm} は式(4.2.33)で与えられ、 A_{TM} と B_{TE} は独立でないことは前節で述べた通りである。ビーム外側の真空領域 ($r > R_b$) においては、波動方程式(4.2.32)と(4.2.33)でビーム密度零として

$$E_{1z}^{\text{out}} = [D_m J_m(k_{\perp} r) + E_m N_m(k_{\perp} r)] \quad (4.3.1)$$

$$B_{1z}^{\text{out}} = \frac{i}{c} [F_m J_m(k_{\perp} r) + G_m N_m(k_{\perp} r)] \quad (4.3.2)$$

および

$$E_{1r}^{\text{out}} = i \frac{k_z}{k_{\perp}} \frac{\partial E_{1z}^{\text{out}}}{\partial r} - \frac{\omega}{k_{\perp}} \frac{m}{r} B_{1z}^{\text{out}} \quad (4.3.3)$$

$$E_{1\theta}^{\text{out}} = -i \frac{\omega}{k_{\perp}} \frac{\partial B_{1z}^{\text{out}}}{\partial r} - \frac{k_z}{k_{\perp}} \frac{m}{r} E_{1z}^{\text{out}} \quad (4.3.4)$$

が得られる。ここで、

$$k_{\perp}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \quad (4.3.5)$$

である。

ビームの内側と外側の Maxwell 方程式の解は、ビーム表面の境界条件で関係付けられる。その境界条件は、以下の4つの独立した式で与えられる。

$$E_{1z}^{\text{out}} - E_{1z}^{\text{in}} = 0 \quad (4.3.6)$$

$$B_{1z}^{\text{out}} - B_{1z}^{\text{in}} = -\mu_0 K_{1\theta} \quad (4.3.7)$$

$$E_{1r}^{\text{out}} - E_{1r}^{\text{in}} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \quad (4.3.8)$$

$$E_{1\theta}^{\text{out}} - E_{1\theta}^{\text{in}} = 0 \quad (4.3.9)$$

上記の式(4.3.6), (4.3.7), (4.3.8), (4.3.9)は、Maxwell 方程式をビーム・真空境界に適用して導かれる (Fig.4-3-1)。ここで、 σ_1 はビーム境界面の1次の変位による表面電荷で、 $K_{1\theta}$ は θ 方向の1次の電流である。モデルの仮定より $k_{1\theta}$ はゼロで、 σ_1 は次式で与えられる。

$$\sigma_1 = -en_0 r_1 = \frac{i}{\omega} J_{1r} \quad (4.3.12)$$

境界条件(4.3.8)~(4.3.11)に電磁場(4.3.1)~(4.3.8)および表面電荷密度(4.3.12)を代入して得られる連立方程式を解くと、係数 D_m , E_m , F_m , G_m は k_{Bm}^2 の士に対応した A_{TM}^{\pm} で次のように表される。

$$\begin{aligned}
D_m = & \frac{1}{\Delta_4} \left\{ \sum_{\alpha=\pm} \left[J_m(k_{Bm}R_b)N_m'(k_{\perp}R_b) - \frac{k_{\perp}}{k_{Bm}} \left(1 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^3 \omega'^2} \right) J_m'(k_{Bm}R_b)N_m(k_{\perp}R_b) \right] A_{TM}^{\alpha} \right\} \\
& - \frac{1}{\Delta_4} \frac{1}{\omega' k_{\perp}} \frac{\omega_b^2}{\gamma c} \left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2} \right)^2 \frac{\Omega}{\gamma} \frac{m}{R_b} \\
& \times \left[\frac{k_{Bm}^2 - \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right)}{\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \omega'^{n2} - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \omega'^2 \right] k_{Bm}^2 - \Delta \omega'^{n2}} J_m(k_{Bm}R_b)N_m(k_{\perp}R_b)A_{TM}^{\alpha} \right] \quad (4.3.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_m = & -\frac{1}{\Delta_4} \left\{ \sum_{\alpha=\pm} \left[J_m(k_{Bm}R_b)J_m'(k_{\perp}R_b) - \frac{k_{\perp}}{k_{Bm}} \left(1 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^3 \omega'^2} \right) J_m'(k_{Bm}R_b)J_m(k_{\perp}R_b) \right] A_{TM}^{\alpha} \right\} \\
& + \frac{1}{\Delta_4} \frac{1}{\omega' k_{\perp}} \frac{\omega_b^2}{\gamma c} \left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2} \right)^2 \frac{\Omega}{\gamma} \frac{m}{R_b} \\
& \times \left[\frac{k_{Bm}^2 - \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right)}{\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \omega'^{n2} - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \omega'^2 \right] k_{Bm}^2 - \Delta \omega'^{n2}} J_m(k_{Bm}R_b)J_m(k_{\perp}R_b)A_{TM}^{\alpha} \right] \quad (4.3.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_m = & \frac{1}{\Delta_4} \frac{\omega_b^2}{\gamma c} \left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2} \right) \frac{\Omega}{\gamma} \\
& \times \left[\sum_{\alpha=\pm} \frac{k_{Bm}^2 J_m(k_{Bm}R_b)N_m'(k_{\perp}R_b) - k_{\perp} k_{Bm} J_m'(k_{Bm}R_b)N_m(k_{\perp}R_b)}{\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \omega'^{n2} - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \omega'^2 \right] k_{Bm}^2 - \Delta \omega'^{n2}} A_{TM}^{\alpha} \right] \\
& + \frac{1}{\Delta_4} \frac{1}{k_{\perp}} \frac{\omega_b^2}{\gamma} \frac{\omega'}{c} \frac{m}{R_b} \\
& \times \left[\frac{\left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2} \right) \left[k_{Bm}^2 - \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \right) \right]}{\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \omega'^{n2} - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \omega'^2 \right] k_{Bm}^2 - \Delta \omega'^{n2}} J_m(k_{Bm}R_b)N_m(k_{\perp}R_b)A_{TM}^{\alpha} \right] \quad (4.3.15)
\end{aligned}$$

$$G_m = -\frac{1}{\Delta_4} \frac{\omega_b^2}{\gamma c} \left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2} \right) \frac{\Omega}{\gamma}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\sum_{\alpha=\pm} \frac{k_{Bm}^2 J_m(k_{Bm} R_b) J_m'(k_{\perp} R_b) - k_{\perp} k_{Bm} J_m'(k_{Bm} R_b) J_m(k_{\perp} R_b)}{\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \omega'^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \omega'^2 \right] k_{Bm}^2 - \Delta \omega'^2} A_{TM}^{\alpha} \right] \\
& \frac{1}{\Delta_4} \frac{1}{k_{\perp}} \frac{\omega_b^2}{\gamma} \frac{\omega'}{c} \frac{m}{R_b} \\
& \times \left[\sum_{\alpha=\pm} \frac{\left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2} \right) \left[k_{Bm}^2 - \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \right) \right]}{\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \omega'^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \omega'^2 \right] k_{Bm}^2 - \Delta \omega'^2} J_m(k_{Bm} R_b) J_m(k_{\perp} R_b) A_{TM}^{\alpha} \right] \quad (4.3.16)
\end{aligned}$$

ここで,

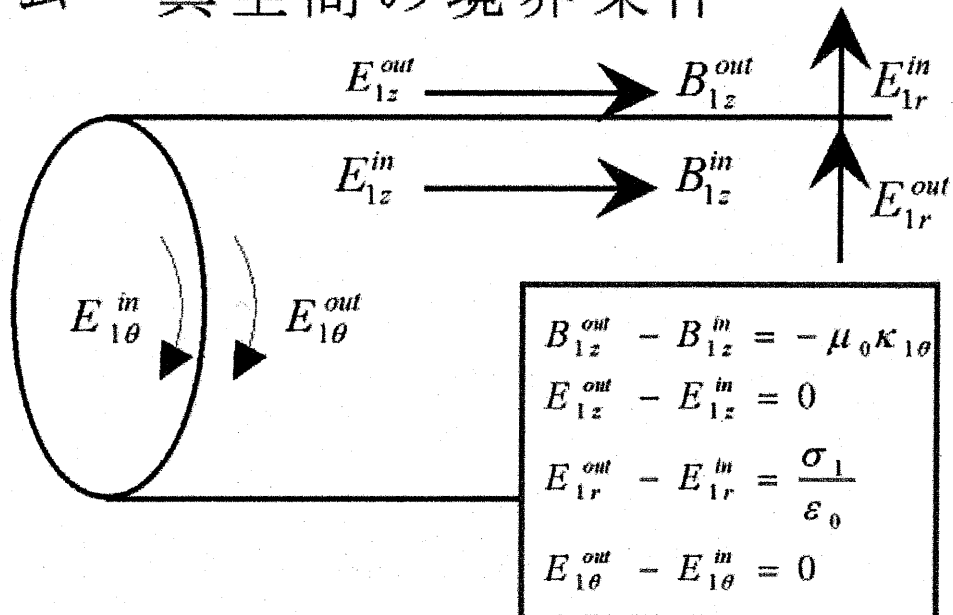
$$\Delta_4 = J_m(k_{\perp} R_b) N_m'(k_{\perp} R_b) - J_m'(k_{\perp} R_b) N_m(k_{\perp} R_b) = \frac{2}{\pi k_{\perp} R_b} \quad (4.3.17)$$

である。また, $r = R_b$ で

$$\begin{aligned}
E_{lr}^{\text{in}} + \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} &= i \frac{k_z \left(1 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^3 \omega'^2} \right)}{k_{Bm}} A_m J_m'(k_m r) \\
& - i \frac{\omega_b^2}{\gamma \omega'} \frac{\Omega}{\gamma} \left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2} \right) \frac{k_{Bm}^2 + k_z \left(k_z - \frac{\omega v_0}{c^2} \right)}{\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \omega'^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \omega'^2 \right] k_{Bm}^2 - \Delta \omega'^2} J_m(k_{Bm} R_b) A_{TM}^{\pm}
\end{aligned} \quad (4.3.18)$$

を用いた。

ビーム・真空間の境界条件



導波管壁の境界条件

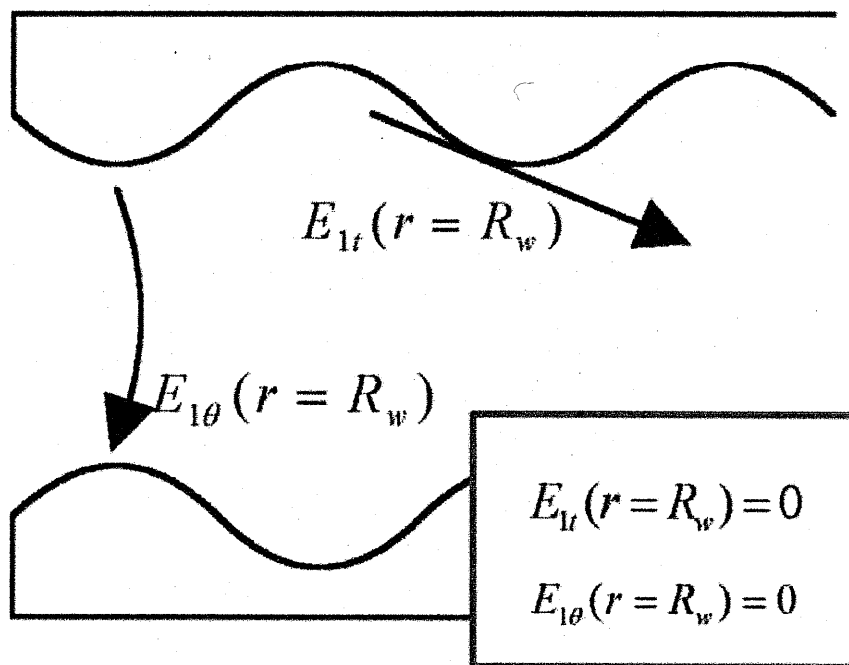


Fig.4-3-1 境界条件

4.4 周期的コルゲート遅波導波管の分散特性

Fig.4-1-1 のシステムでは、半径が周期的に変化する。周期的境界条件の下での2次微分方程式の解（電磁場）は波数空間で周期的になる（Floquet の定理）。Floquet の定理は、バンド理論の周期的なポテンシャル中の Shrödinger 方程式を解く場合にも応用され Bloch の定理と呼ばれている。

波数空間で周期的な電磁場は空間高調波の和として表すことができる。 p を空間高調波を表す整数とすると、 p 次空間高調波の軸方向の波数は与えられる。ビーム中 ($r < R_b$) の電磁場成分式(4.3.1), (4.3.2)は

$$E_{1z}^{\text{in}} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} [A_{mp}^+ J_m(y_{p+} r) + A_{mp}^- J_m(y_{p-} r)], \quad (4.4.1)$$

$$B_{1z}^{\text{in}} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{i}{c} [B_{mp}^+ J_m(y_{p+} r) + B_{mp}^- J_m(y_{p-} r)], \quad (4.4.2)$$

$y_{p\pm}^2$ は k_{Bm}^2 の式で \pm 軸方向の波数は次の式で与えられる空間高調波の k_p を用いる。

$$k_p = k_z + pk_0 \quad (4.4.3)$$

同様にビーム外側の真空領域 ($R_w > r > R_b$) では、

$$E_{1z}^{\text{out}} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} [D_{mp} J_m(x_p r) + E_{mp} N_m(x_p r)], \quad (4.4.4)$$

$$B_{1z}^{\text{out}} = \frac{i}{c} \sum_{p=-\infty}^{\infty} [F_{mp} J_m(x_p r) + G_{mp} N_m(x_p r)], \quad (4.4.5)$$

$$x_p^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_p^2, \quad (4.4.6)$$

となる。ビーム領域と真空領域の境界 $r = R_b$ では、各空間高調波に対し、前節の式(4.3.8)~(4.3.11)で k_z を k_p で置き換えて得られる式が成立する。従って、式(4.3.13)~(4.3.16)で k_z を k_p で置き換えたものが、真空領域の電磁場係数 D_{mp} , E_{mp} , F_{mp} , G_{mp} とビーム中の電磁場係数 A_{mp}^{\pm} の関係式である。

導波管の管壁上 $r = R_w$ では、電場の接線方向 (z 方向と θ 方向) 成分が零の条件 (Fig.4-4-1) から

$$\begin{aligned} E_{1t}(r = R_w) &\propto E_{1z} + E_{1r} \frac{dR_w}{dz}, \\ &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \exp(ik_p z) \left(1 + \frac{ik_p}{\frac{\omega^2}{c^2} - k_p^2} \frac{d}{dz} \right) [D_p J_m(x_p R_w) + E_p N_m(x_p R_w)] = 0, \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

$$E_{1\theta}(r=R_W) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \exp(ik_p z) \frac{\omega}{\omega^2 - k_p^2} \frac{c}{\omega} \frac{d}{dr} [F_p J_m(x_p R_W) + G_p N_m(x_p R_W)] = 0, \quad (4.4.8)$$

が得られる。係数 D_{mp} , E_{mp} , F_{mp} , G_{mp} は式(4.3.13)~(4.3.16)により A_{mp}^{\pm} で表されるので、式(4.4.8)と(4.4.9)は係数 A_{mp}^{\pm} に対する連立方程式となっている。この境界条件より係数 A_{mp}^{\pm} が求まり、**Fig.4-4-1** に示す遅波導波管内の電磁場が求まることになる。ただし、以下に示すように、ビームを含まない導波管モードの場合と同様に、電磁場の大きさが不確定要素として残る。

式(4.4.8)と(4.4.9)に、 $\exp(iqk_0 z)$ を掛けて一周期 $(-\pi/k_0 \sim \pi/k_0)$ で積分し、フーリエ級数展開する。まとめると次の式が得られる。

$$\begin{bmatrix} D^{Z^+} D^{Z^-} \\ D^{T^+} D^{T^-} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^+ \\ A^- \end{bmatrix} = 0. \quad (4.4.9)$$

ここで、 $[A^+ A^-]$ は p の順に列んだ A_{mp}^+ と A_{mp}^- を成分とするベクトルで、 $D^{Z^{\pm}}$, $D^{T^{\pm}}$ とはマトリックスで各成分は次のように与えられる。

$$D_{qp}^{Z^{\pm}} = \left[1 + (p-q) \frac{k_p k_0}{x_p^2} \right] \left(C_{qp}^{(J)} K_{Dp}^{(\pm)} + C_{qp}^{(N)} K_{Ep}^{(\pm)} \right) - i \frac{m\omega}{cx_p} \left(C_{qp}^{(DRJ)} K_{Fp}^{(\pm)} + C_{qp}^{(DRN)} K_{Gp}^{(\pm)} \right) \quad (4.4.10)$$

$$D_{qp}^{T^{\pm}} = \frac{\omega}{cx_p} \left(C_{qp}^{(J')} K_{Fp}^{(\pm)} + C_{qp}^{(N')} K_{Gp}^{(\pm)} \right) - \frac{mk_p}{x_p^2} \left(C_{qp}^{(RJ)} K_{Dp}^{(\pm)} + C_{qp}^{(RN)} K_{Ep}^{(\pm)} \right) \quad (4.4.11)$$

ここで

$$C_{qp}^{(J)} = \int_{-\pi/k_0}^{\pi/k_0} \exp[i(p-q)k_0 z] J_m(x_p R_W(z)) dz, \quad (4.4.12)$$

$$C_{qp}^{(N)} = \int_{-\pi/k_0}^{\pi/k_0} \exp[i(p-q)k_0 z] N_m(x_p R_W(z)) dz, \quad (4.4.13)$$

$$C_{qp}^{(DRJ)} = \int_{-\pi/k_0}^{\pi/k_0} \exp[i(p-q)k_0 z] \frac{1}{R_W(z)} \frac{\partial R_W(z)}{\partial z} J_m(x_p R_W(z)) dz \quad (4.4.14)$$

$$C_{qp}^{(DRN)} = \int_{-\pi/k_0}^{\pi/k_0} \exp[i(p-q)k_0 z] \frac{1}{R_W(z)} \frac{\partial R_W(z)}{\partial z} N_m(x_p R_W(z)) dz \quad (4.4.15)$$

$$C_{qp}^{(J')} = \int_{-\pi/k_0}^{\pi/k_0} \exp[i(p-q)k_0 z] J_m'(x_p R_W(z)) dz, \quad (4.4.16)$$

$$C_{qp}^{(N')} = \int_{-\pi/k_0}^{\pi/k_0} \exp[i(p-q)k_0 z] N_m'(x_p R_W(z)) dz \quad (4.4.17)$$

$$C_{qp}^{(RJ)} = \int_{-\pi/k_0}^{\pi/k_0} \exp[i(p-q)k_0 z] \frac{1}{R_W(z)} J_m(x_p R_W(z)) dz \quad (4.4.18)$$

$$C_{qp}^{(RN)} = \int_{-\pi/k_0}^{\pi/k_0} \exp[i(p-q)k_0 z] \frac{1}{R_W(z)} N_m(x_p R_W(z)) dz \quad (4.4.19)$$

そして

$$K_{Dp}^{(\pm)} = \frac{1}{Q_p} \left[J_m(y_p^\pm R_b) N_m'(x_p R_b) - \frac{x_p}{y_p^\pm} \left(1 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^3 \omega'^2} \right) J_m'(y_p^\pm R_b) N_m(x_p R_b) \right] \\ + \frac{1}{Q_p R_b} \frac{m \omega' x_p \frac{\omega_b^2}{\gamma} (y_p^{\pm 2} - x_p^2) \left(k_p - \frac{\omega v_0}{c^2} \right)^2 \frac{\Omega}{\gamma}}{\left(x_p^2 \omega'^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^2} \omega'^2 \right) y_p^{\pm 2} - \Delta \omega'^2} J_m(y_p^\pm R_b) N_m(x_p R_b) \quad (4.4.20)$$

$$K_{Ep}^{(\pm)} = -\frac{1}{Q_p} \left[J_m(y_p^\pm R_b) J_m'(x_p R_b) - \frac{x_p}{y_p^\pm} \left(1 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^3 \omega'^2} \right) J_m'(y_p^\pm R_b) J_m(x_p R_b) \right] \\ + \frac{1}{Q_p R_b} \frac{m \omega' x_p \frac{\omega_b^2}{\gamma} (y_p^{\pm 2} - x_p^2) \left(k_p - \frac{\omega v_0}{c^2} \right)^2 \frac{\Omega}{\gamma}}{\left(x_p^2 \omega'^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^2} \omega'^2 \right) y_p^{\pm 2} - \Delta \omega'^2} J_m(y_p^\pm R_b) J_m(x_p R_b) \quad (4.4.24)$$

$$K_{Fp}^{(\pm)} = \frac{1}{Q_p} \frac{y_p^{\pm 2} \frac{\omega_b^2}{\gamma} \left(k_p - \frac{\omega v_0}{c^2} \right) \frac{\Omega}{\gamma}}{\left(x_p^2 \omega'^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^2} \omega'^2 \right) y_p^{\pm 2} - \Delta \omega'^2} \\ \times \left[J_m(y_p^\pm R_b) N_m'(x_p R_b) - \frac{x_p}{y_p^\pm} J_m'(y_p^\pm R_b) N_m(x_p R_b) \right] \\ + \frac{1}{Q_p R_b} \frac{m \frac{\omega'}{c x_p} \frac{\omega_b^2}{\gamma} \left(y_p^{\pm 2} - x_p^2 + \frac{\omega_b^2}{\gamma^2} \right) \left(k_p - \frac{\omega v_0}{c^2} \right)}{\left(x_p^2 \omega'^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^2} \omega'^2 \right) y_p^{\pm 2} - \Delta \omega'^2} J_m(y_p^\pm R_b) N_m(x_p R_b) \quad (4.4.25)$$

$$K_{Gp}^{(\pm)} = -\frac{1}{Q_p} \frac{y_p^{\pm 2} \frac{\omega_b^2}{\gamma} \left(k_p - \frac{\omega v_0}{c^2} \right) \frac{\Omega}{\gamma}}{\left(x_p^2 \omega'^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^2} \omega'^2 \right) y_p^{\pm 2} - \Delta \omega'^2} \\ \times \left[J_m(y_p^\pm R_b) J_m'(x_p R_b) - \frac{x_p}{y_p^\pm} J_m'(y_p^\pm R_b) J_m(x_p R_b) \right]$$

$$\frac{1}{Q_p} \frac{m}{R_b} \frac{\omega'}{c x_p} \frac{\omega_b^2}{\gamma} \left(y_p^{\pm 2} - x_p^2 + \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \right) \left(k_p - \frac{\omega v_0}{c^2} \right) J_m(y_p^{\pm} R_b) J_m(x_p R_b) \quad (4.4.26)$$

$$\left(x_p^2 \omega'^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma c^2} \omega'^2 \right) y_p^{\pm 2} - \Delta \omega'^2$$

$$Q_p = J_m(x_p R_b) N_m'(x_p R_b) - J_m'(x_p R_b) N_m(x_p R_b) = \frac{2}{\pi x_p R_b} \quad (4.4.27)$$

Fig.4-4-1 に示すシステムの分散特性は式(4.4.9)が零でないベクトル $[\mathbf{A}^+ \mathbf{A}^-]$ を解に持つ条件より求まる。つまり次式で与えられる。

$$\det \begin{bmatrix} D^{Z^+}(\omega, k_z) D^{Z^-}(\omega, k_z) \\ D^{T^+}(\omega, k_z) D^{T^-}(\omega, k_z) \end{bmatrix} = 0 \quad (4.4.30)$$

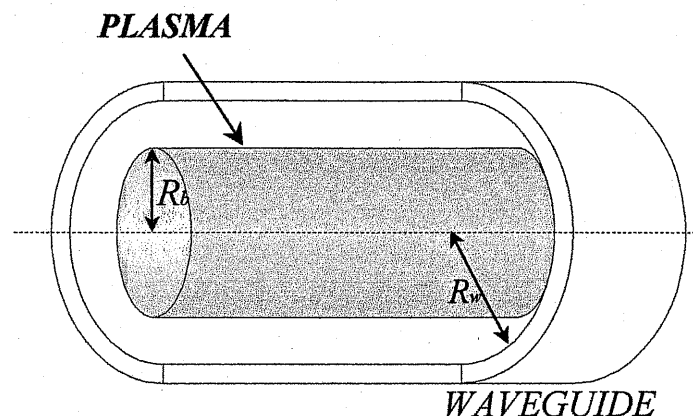
この行列式は $-\infty < p, q < \infty$ のため、無限大の次数であるが、実際の計算では $-4 \leq p, q \leq 4$ として近似している。次節以降に報告する計算パラメータの範囲において、 $|p|, |q| = 4$ と 5 で 0.5% 以内の差となり、 $|p|, |q| = 4$ 程度で十分に収束しており、 $|p|, |q| \geq 5$ の空間高調波からの寄与は十分に小さいと判断できる。

4.5 直円筒静止プラズマ系の数値解析

本報告の線形理論においては、Maxwell 方程式の源泉項およびビーム表面と管壁での境界条件は、Fig.4-1-1 のモデルの範囲内で、矛盾無く導出している。この意味でセルフコンシステントな線形理論である。解析に用いた導波管のパラメータは X-Band 後進発振器実験で用いられてきたものを使用する。すなわち平均半径 $R_0 = 1.445 \text{ cm}$ 、周期長 $z_0 = 1.67 \text{ cm}$ である。これは、第5章の実験で述べる大口径遅波導波管とはパラメータが異なる。残念ながら、大口径のパラメータでは数値計算が上手く実行できないためである。不安定性の成長率、周波数や波数領域は異なるが、X-Band のパラメータでの物理現象の本質は解析可能である。しかし、ビームを含む系での固有モードは、それ自体の研究が進んでおらず、その解析は非常に複雑となる。そこで、まず振幅 $h \rightarrow 0$ の場合で、ビーム速度ゼロとした直円筒静止プラズマ系 (Fig.4-5-1) のモードについて調べる。

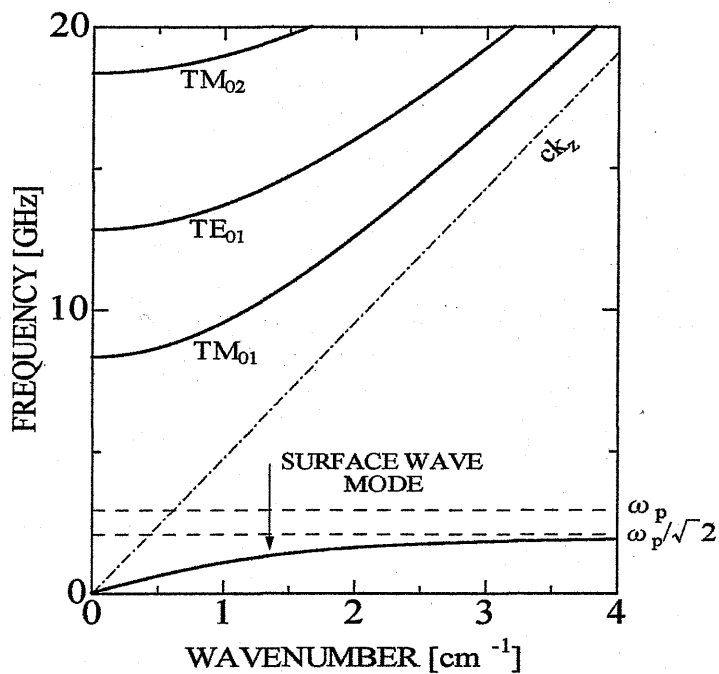
4.5.1 直円筒静止プラズマ系における軸対称モード($m=0$)

まず、磁場ゼロの場合について述べる。分散関係を Fig.4-5-2 に示す。導波管モードとして TM_{01} 、 TE_{01} 、 TM_{02} モードが見られる。磁界ゼロの場合プラズマモードは式の上で独立なものとしてくりだせるため、完全になくなっている。また、波数が大きくなるにつれ、周波数が $\omega_p/\sqrt{2}$ に漸近していくモードが見られる。このモードの電界分布図を見てみると、 E_z はプラズマと真空の境界、つまりプラズマ表面で明確なピークを持っている表面波モードであるといえる。また、波数 3.5 cm^{-1} の場合は 0.47 cm^{-1} の場合に比べピークがより顕著に現れている。これに対し、導波管モードは良く知られている直円筒導波管の電磁場分布をしている。



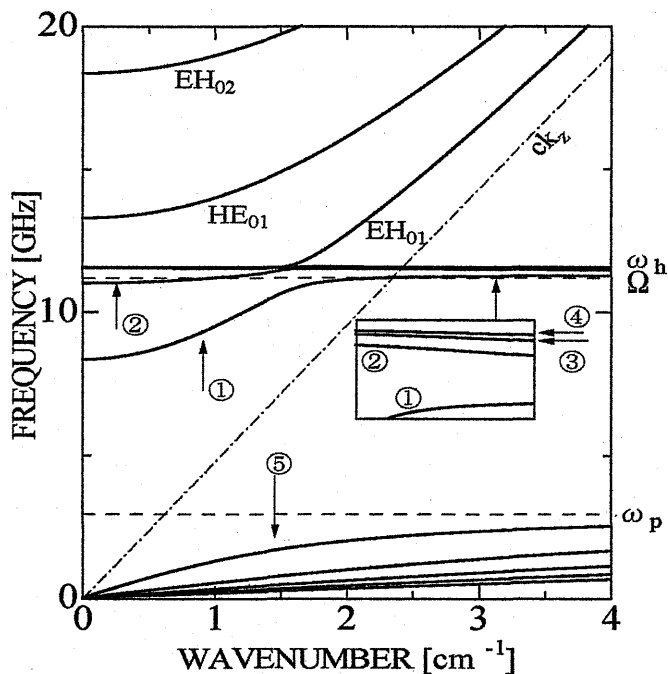
R_b はプラズマ半径、 R_w は導波管の内側の半径である。
印可磁場は軸方向 (z 軸の正方向) に加える。

Fig.4-5-1 直円筒静止プラズマ系の解析モデル



導波管半径 1.445cm ビームエネルギー 0keV
 プラズマ半径 0.8cm プラズマ周波数 $18.5 \times 10^9 \text{s}^{-1}$
 ガイド磁界 0T

Fig.4-5-2 軸対称モードの分散関係 (磁場ゼロ)



導波管半径 1.445cm ビームエネルギー 0keV
 ビーム半径 0.8cm プラズマ周波数 $18.5 \times 10^9 \text{s}^{-1}$
 ガイド磁界 0.4T

Fig.4-5-3 軸対称モードの分散関係 (有限強度磁場)

次に、磁場 0.3T の場合について、分散関係を Fig.4-5-3 に示す。導波管モードとして EH_{01} , HE_{01} , EH_{01} モードが見られる。ここで、TM と TE より成るハイブリッドモードに対しては、EH と HE の記号が用いられることが多い。しかし、その定義は、人により、旧ソビエト圏か西側圏か、あるいは物理系か工学系かなどで異なる。ここでは、プラズマ物理分野で用いられることが多い、EH (HE) は TM (TE) 成分がドミナントなモードとする。つまり、プラズマ密度をゼロにした極限で、TM (TE) に対応するモードである。

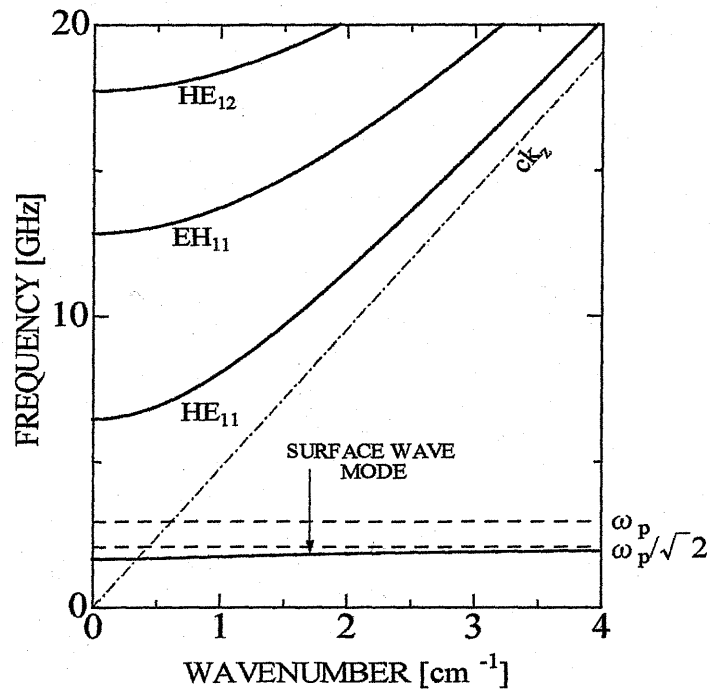
サイクロトロン周波数よりも周波数の低い領域に体積波モードであるプラズマモードが、プラズマ周波数とアッパーハイブリッド周波数の間にサイクロトロンモードがそれぞれ見られる。サイクロトロンモードは、波数ゼロ付近で周波数が下がっている。これは磁界の増加に伴ってサイクロトロンモードのカットオフ周波数が上がることで、導波管モードのカットオフ周波数よりも大きくなり、サイクロトロンモードと導波管モードが重なるために起こる現象である。モード①, ②, ③は分散関係を見る限り、3つともサイクロトロンモードのようであるが、波数がゼロの近くでは HE_{01} モードの影響を受ける。特に、①と②は、 HE_{01} モードの影響を強く受け、電界分布もそれに近いものになっていく。③は波数ゼロの近くでも、もともとのサイクロトロンモードに近い分布をしている。波数を大きくしていくと、導波管モードの影響は小さくなり、①, ②, ③とも純粋なサイクロトロンモードの性質を持っているといえる。また、モード④については、プラズマと真空の境界において大きな変化は見られず、表面波の性質を持たない、体積波プラズマモードであるといえる。

4.5.2 直円筒静止プラズマ系における非軸対称モード($m=1$)

磁場ゼロの場合について述べる。分散関係を Fig.4-5-4 に示す。導波管モードとして HE_{11} , EH_{11} , HE_{12} モードが見られる。軸対称モードの場合と同様に、磁場ゼロの場合体積波プラズマモードは式の上で独立なものとしてくりだせるため、完全になくなっている。また、軸対称モードの場合と同様に波数が大きくなるにつれ、周波数が $\omega_p/\sqrt{2}$ に漸近していくモードが見られる。電界分布を見るとやはり表面波モードであることがわかる。軸対称のものは周波数ゼロから漸近していくのに対し、非軸対称の場合は波数ゼロでも有限の周波数を持つ。

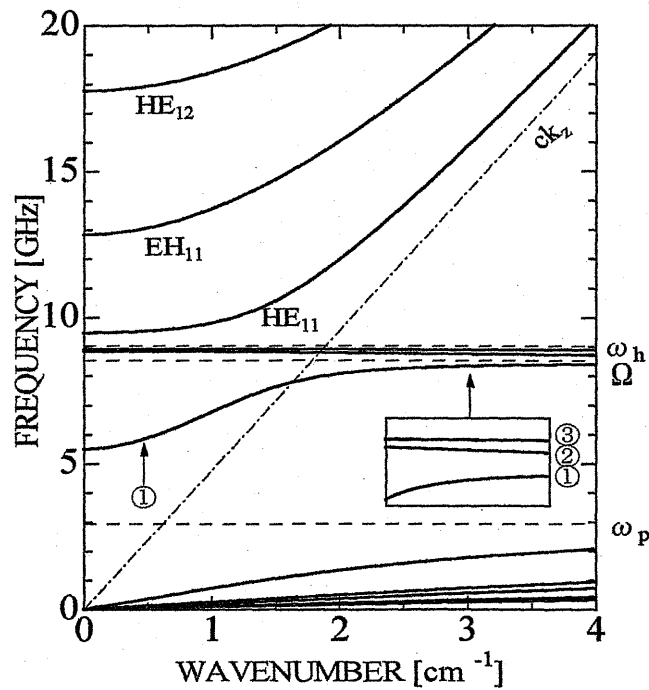
磁場を印可し強くしていくと、軸対称の場合と同様に、サイクロトロンモードの影響が現われてくる。磁場が 0.3T での分散関係を Fig.4-5-5 に示す。導波管モードとして HE_{11} , EH_{11} , HE_{12} モードが見られる。 HE_{11} モードの電界分布は、サイクロトロンモードが近づいているためその影響を受ける。 HE_{11} モードのカットオフ周波数はサイクロトロンモードに押し上げられるが、同時にサイクロトロン周波数より低い①のモードが現れる。①のモードは HE_{11} モードのカットオフ周波数の理論値と近いものとなっている。つまり、導波管モード HE_{11} は、サイクロトロンモードの上と下の領域に分けられる。波数が大きくなると、モード①はサイクロトロンモードの領域に近づき、電磁場分布もサイクロトロンモードのそれに近づく。②, ③はサイクロトロンモードである。

この章で扱ったサイクロトロンモードや空間電荷モードは、1960年代から



導波管半径 1.445cm ビームエネルギー 0keV
 プラズマ半径 0.8cm プラズマ周波数 $18.5 \times 10^9 \text{s}^{-1}$
 ガイド磁界 0T

Fig.4-5-4 非軸対称モードの分散関係 (磁場ゼロ)



導波管半径 1.445cm ビームエネルギー 0keV
 プラズマ半径 0.8cm プラズマ周波数 $18.5 \times 10^9 \text{s}^{-1}$
 ガイド磁界 0.3T

Fig.4-5-5 非軸対称モードの分散関係 (有限強度磁場)

研究されており、研究者の名に因んで Trivelpiece-Gould モードと呼ばれる。いわゆる速波モードである。

4.6 遅波サイクロトロン不安定性

周期構造の波型導波管では、分散関係は周期的である。Fig.4-6-1 はガイド磁界 0.3T の分散関係を示す。ビームエネルギーは 430keV、電流は 200A である。ビームモードとして、速波空間電荷モード(Fast Space Charge Mode : FSCM)、遅波空間電荷モード(Slow Space Charge Mode : SSCM)、速波サイクロトロンモード(Fast Cyclotron Mode : FCM)、遅波サイクロトロンモード(Slow Cyclotron Mode : SCM)が見られる。これらのビームモードは静止磁化プラズマの Trivelpiece Gould モードに対応する多くのビームを持ち、全てのビームモードは EH_{01} モードと相互作用する。SSCM の一つと SCM の一つはそれぞれ EH_{01} モードと結合し、Fig.4-6-1(b)のように時間的成長率が見られる。SCM による時間的成長率 (0.024nsec^{-1})は、SSCM のそれ(0.335nsec^{-1})よりもかなり小さいものである。Y 点は SSCM の EH_{01} モードからのリリースポイントを表す。

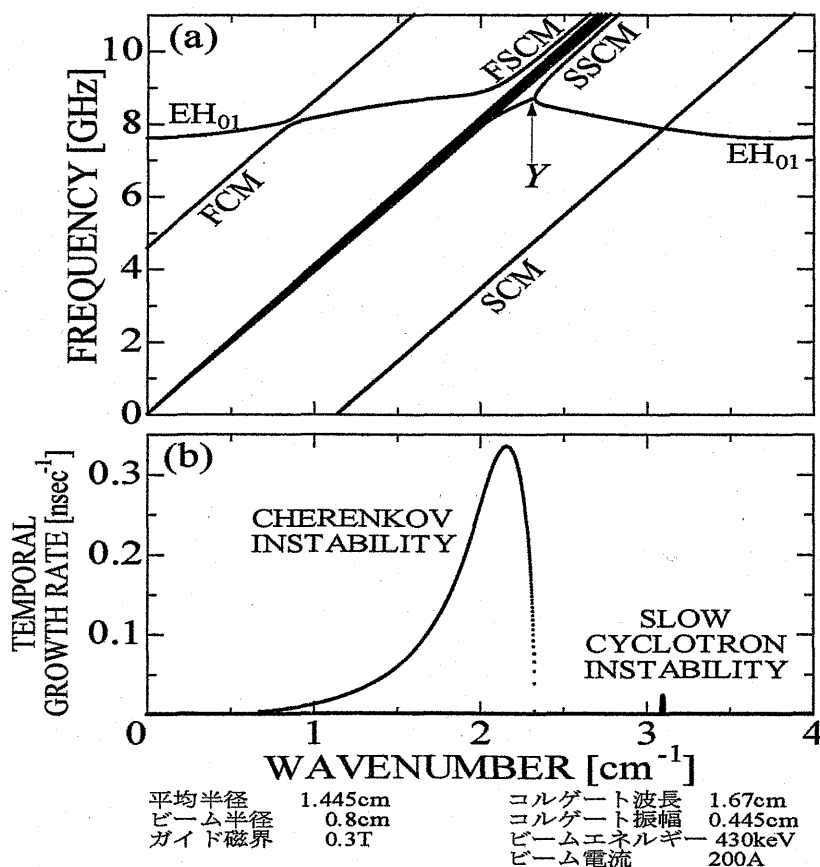
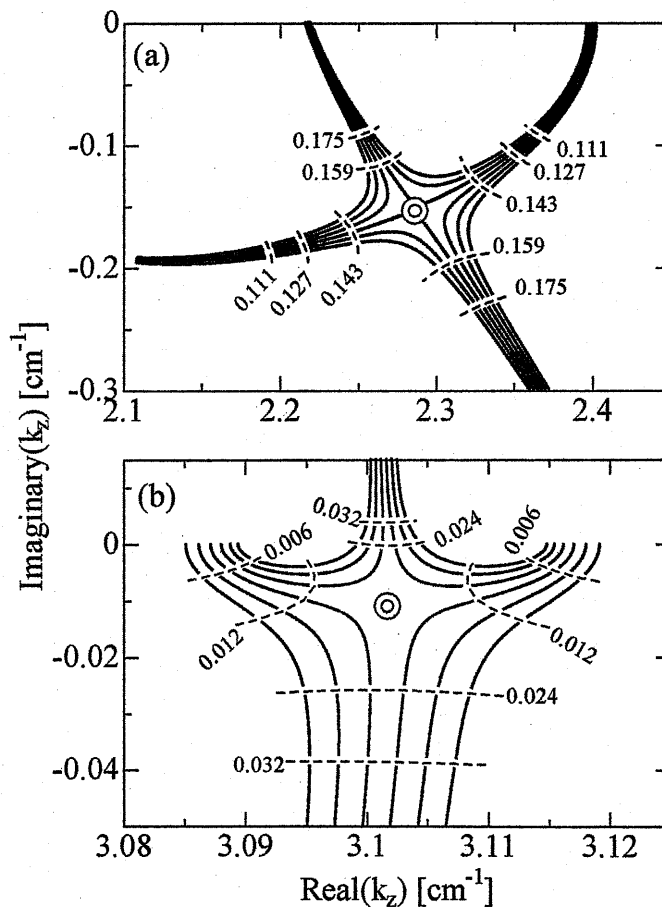


Fig.4-6-1 軸対称モード ($m=0$) の分散関係

絶対不安定性

複素波数平面でのチェレンコフ不安定と遅波サイクロトロン不安定のサドル点近傍での根の軌跡を Fig.4-6-2(a), (b)に示す。この実線と破線はそれぞれ $\text{Re}(\omega)/2\pi$ と $\text{Im}(\omega)/2\pi$ をある一定の値にした時の軌跡である。 $\text{Re}(\omega)$ と $\text{Im}(\omega)$ はそれぞれ ω の実数部分と虚数部分を表す。Fig.4-6-2(a), (b)の数字は $\text{Im}(\omega)/2\pi$ の値を示す。これは時間的成長率である。実線で表されている根の軌跡は $\text{Im}(\omega) > 0$ で k_z の実軸を横切る。Fig.4-6-2(a), (b)における二重円はそれぞれチェレンコフ不安定と遅波サイクロトロン不安定のサドル点を表す。ここで、それぞれのサドル点の座標を (k_c, ω_c) , (k_s, ω_s) とする。 $\text{Im}(k_c) < 0$ かつ $\text{Im}(\omega_c) > 0$ であるから、無限長の波型導波管ではチェレンコフ不安定は絶対不安定である。また $\text{Im}(k_s) < 0$ かつ $\text{Im}(\omega_s) > 0$ であるから遅波サイクロトロン不安定はチェレンコフ不安定と同様に絶対不安定である。



(a) はチェレンコフ不安定性, (b) は遅波サイクロトロン不安定性 (b) のサドル点近くにおける根の軌跡を示している。

Fig.4-6-2 複素波数平面での分散式の根の軌跡

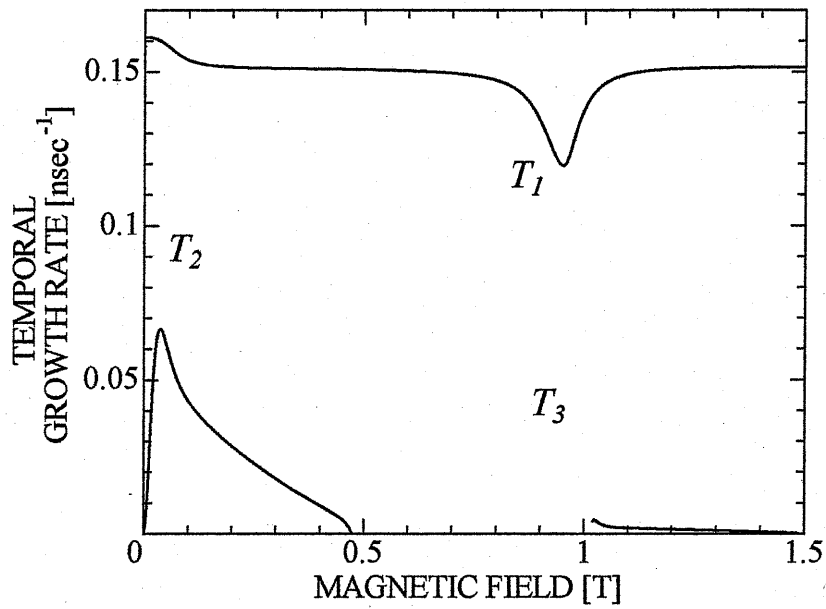
成長率の磁界依存性

Fig.4-6-3 はサドル点の時間的成長率の磁場依存性で、 $\text{Im}(\omega_c)/2\pi$ と $\text{Im}(\omega_s)/2\pi$ が描かれている。 T_1 はチェレンコフ不安定の時間的成長率 $\text{Im}(\omega_c)/2\pi$ で、ほぼ 0.151nsec^{-1} で一定である。しかしながら、この成長率はガイド磁界が約 0.1T からゼロに減少する際 0.162nsec^{-1} まで増加する。また、 0.951T で最小値 0.119nsec^{-1} をとる。 0.951T では、FCM は $\omega = v_0(k_z - k_0) + \Omega/\gamma$ で **Fig.4-6-1** の Y 点を通る。 T_2 と T_3 は遅波サイクロトロン不安定の時間的成長率 $\text{Im}(\omega_s)/2\pi$ である。 T_2 は 0.037T で最大値 0.066nsec^{-1} をとる。さらに SCM は $\omega = v_0 k_z - \Omega/\gamma$ で **Fig.4-6-1** の Y 点を通る。また T_3 は 1.024T で最大値 0.004nsec^{-1} をとる。さらに SCM は $\omega = v_0(k_z + k_0) - \Omega/\gamma$ で **Fig.4-6-1** の Y 点を通る。遅波サイクロトロン不安定のサドル点の時間的成長率は、磁界の減少に伴って増加する。**Fig.4-6-3** において、 0.475T から約 1.0T と 1.485T 以上では遅波サイクロトロンモードは EH_{01} モードの進行波と結合するため、この領域では $\text{Im}(\omega_s)$ はゼロと表示している。

Fig.4-6-4 はサドル点の空間的成長率の磁場依存性で、 $\text{Im}(k_c)$ と $\text{Im}(k_s)$ が描かれている。 S_1 はチェレンコフ不安定の空間的成長率 $\text{Im}(k_c)$ の磁界依存性を示している。この成長率は 0.095T 以下と約 $0.7\text{T} \sim 1.1\text{T}$ の間を除いてほぼ一定で、 -0.152cm^{-1} である。 0.095T 以下ではガイド磁界の減少に伴い $\text{Im}(k_c)$ は -0.160cm^{-1} まで減少する。 0.907T と 0.971T では $\text{Im}(k_c)$ はそれぞれ最小値 -0.166cm^{-1} と最大値 -0.142cm^{-1} をとる。

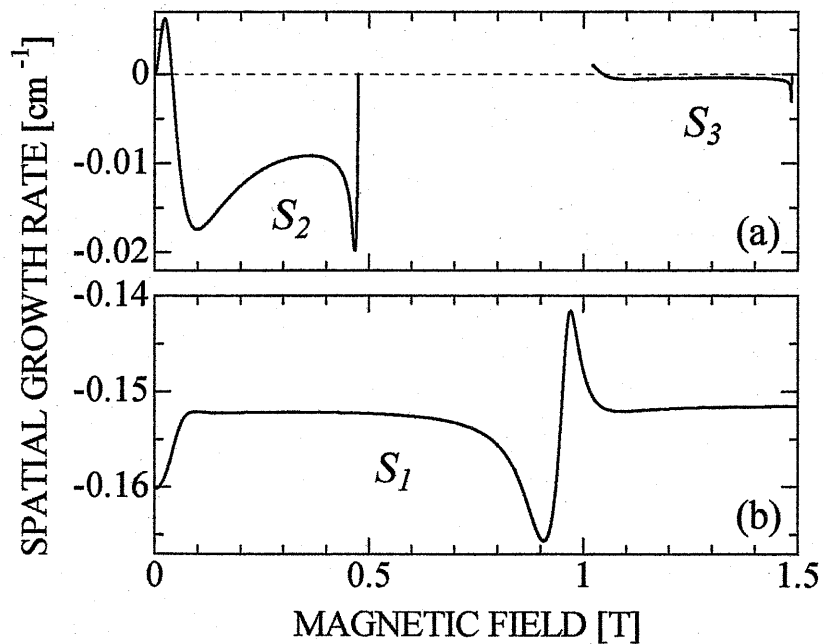
S_2 と S_3 は遅波サイクロトロン不安定の空間的成長率 $\text{Im}(k_s)$ の磁場依存性を示している。 S_2 は 0.468T で最小値 -0.020cm^{-1} をとる。 0.10T から 0.023T の間では S_2 はガイド磁界の減少に伴って増加し、 0.040T で 0cm^{-1} を通る。 S_3 は 1.484T で最小値 -0.003cm^{-1} をとり、それは S_2 のそれよりも 1 桁小さい。また S_3 は 1.046T で 0cm^{-1} を通る。 $0.040(1.046)\text{T}$ では SCM は $\omega = v_0 k_z - \Omega/\gamma$ ($\omega = v_0(k_z + k_0) - \Omega/\gamma$) で、**Fig.4-6-1(a)** の Y 点で EH_{01} モードを横切る。 $0.475(1.485)\text{T}$ では SCM は $\omega = v_0 k_z - \Omega/\gamma$ で、 $k_0(2k_0)$ で EH_{01} モードを横切る。

Fig.4-6-4 の 0.040T 以下と 1.046T では、空間的成長率が正の値であるために、遅波サイクロトロン不安定は絶対不安定ではない。 0.067T と 1.067T は遅波サイクロトロン共鳴相互作用が絶対不安定になるかどうかの分水嶺であり、それは **Fig.4-6-4(a), (b)** に描かれている。



T_1 はチェレンコフ不安定性, T_2 と T_3 は遅波サイクロトロン不安定性である。

Fig.4-6-3 サドル点の時間的成長率の磁場依存性



S_1 はチェレンコフ不安定性, S_2 と S_3 は遅波サイクロトロン不安定性である。

Fig.4-6-4 サドル点の空間的成長率の磁場依存性

遅波サイクロトロン不安定の低磁場領域での振る舞い

Fig.4-6-5(a)と(b)はそれぞれ 0.068T と 0.067T の、複素波数平面での k_z の軌跡である。チェレンコフ不安定と遅波サイクロトロン不安定のサドル点は、それぞれ一重円と二重円で表され、それらは k_z の実軸よりも下側に存在する。サドル点 C は ω_2 と ω_3 の間に周波数 $\text{Re}(\omega_c)$ をもつ。サドル点 S は図(a)の ω_1 と ω_2 の間と図(b)の ω_3 と ω_4 の間に周波数 $\text{Re}(\omega_s)$ をもつ。ここで $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4$ である。Fig.4-6-5 ですべての k_z の軌跡は、時間的成長率の増加とともに実軸の反対側に向かう。そのため遅波サイクロトロン不安定はチェレンコフ不安定と同様に絶対不安定となる。しかしながら、Fig.4-6-5 で、 ω_3 と ω_4 の k_z の軌跡は、時間的成長率の増加とともに k_z の実軸よりも上にむかう。すなわち、SCM は導波管モードと結合せず、絶対不安定も見られなく SSCM と相互作用している。磁場ゼロの極限では、遅波サイクロトロン不安定性は安定化されると言える。

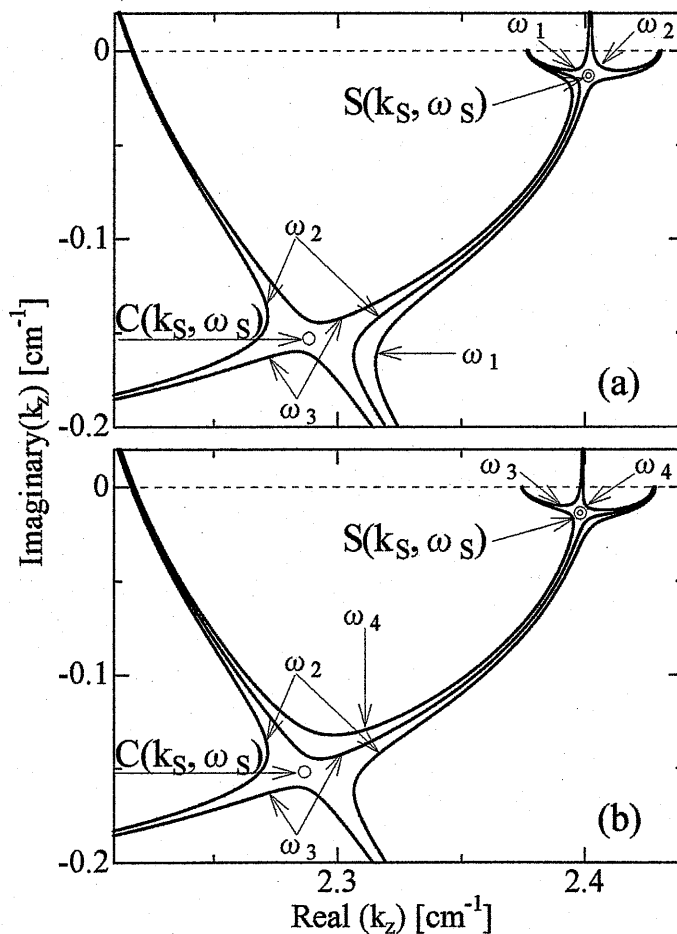


Fig.4-6-5 遅波サイクロトロン相互作用の低磁場領域での安定化

これに対して、無限に広がった自由空間に誘電体を満たした場合には、磁場がゼロに近づくと、遅波サイクロトロン不安定性がチェレンコフ不安定性より勝る。この違いは、導波管中ではビームは導波管壁から「しみ出てくる」エバネッセント波と相互作用することに起因する。遅波サイクロトロン不安定については、2つの機構が考えられている。第1の機構は、 $-ev_0 \times B_1$ の力により、初期の z 方角のビーム運動の向きが垂直方向に変えられる。この運動と垂直電場 $E_{1\perp}$ の相互作用により、ビームの運動エネルギーが電磁波エネルギーに変換される。この機構は軸方向に伝搬している電磁波に有効となる。第2の機構は、擾乱にともなうサイクロトロン運動によるビーム密度の集群がある。この集群と軸方向電場の位相が合ったとき、電子ビームの運動エネルギーが電磁波エネルギーに変換される。この機構は、垂直方向に伝搬する、つまり垂直方向の波数が実数である電磁波に有効である。

無限領域の誘電体空間では、磁場に垂直方向の波数は、実数であり得るため、その方向に伝搬する。このため、2つの機構とも有効である。磁場ゼロに近づくと、チェレンコフ相互作用に勝る結果となると思われる。しかし、導波管中では、磁場と垂直方向の波数は、純虚数であり、その方向に対する位相の変化は無い。このため両者の場合で、電子ビーム密度の集群の様子が異なる。導波管中では、磁場と垂直方向の方向の電子ビーム集群は起こらず、第2の機構が働かない。この場合、磁場ゼロに近づいていくと、チェレンコフ相互作用が勝り、サイクロトロン不安定性は押さえられる。

非軸対称モードにおける遅波サイクロトロン不安定性

これまで、軸対称モードに限った解析であった。非軸対称モードになると軸に対し回転方向成分の効果が加わる。非軸対称モード $m=1$ の場合の分散関係を Fig.4-6-6 に示す。TE₁₁-like と TM₁₁-like は、ビーム効果がゼロの極限で、TE₁₁ と TM₁₁ になるモードである。両者ともチェレンコフ不安定性と遅波サイクロトロン不安定性は見られるが、ともに軸対称モードの場合に比べ小さくなっている。2つの不安定性について、磁場に対する傾向を調べたのが Fig.4-6-7 である。比較のため軸対称の場合も載せてある。磁場依存性は、軸対称と非軸対称とも定性的傾向は同じと言える。回転方向モード数 m を 2, 3 とした場合も調べた。 m が大きくなるにつれ不安定性は小さくなっていく傾向が見られた。それぞれで磁場を変えた場合でも、特に遅波サイクロトロン相互作用が強くなるパラメータは存在しなかった。

ここで、前節 4.5 のように EH および HE を用いていないのは、コルゲート導波管の解析において、全く逆の定義が、広く使用されているためである。とりあえず、EH と HE の表記はプラズマ物理分野に従っているが、プラズマ物理分野と導波管工学分野を扱う本研究では、どちらを優先するか悩むところである。統一的な理論体系を組み上げる途中段階の問題であるが、正直なところ、表記で悩むとは思わなかった。

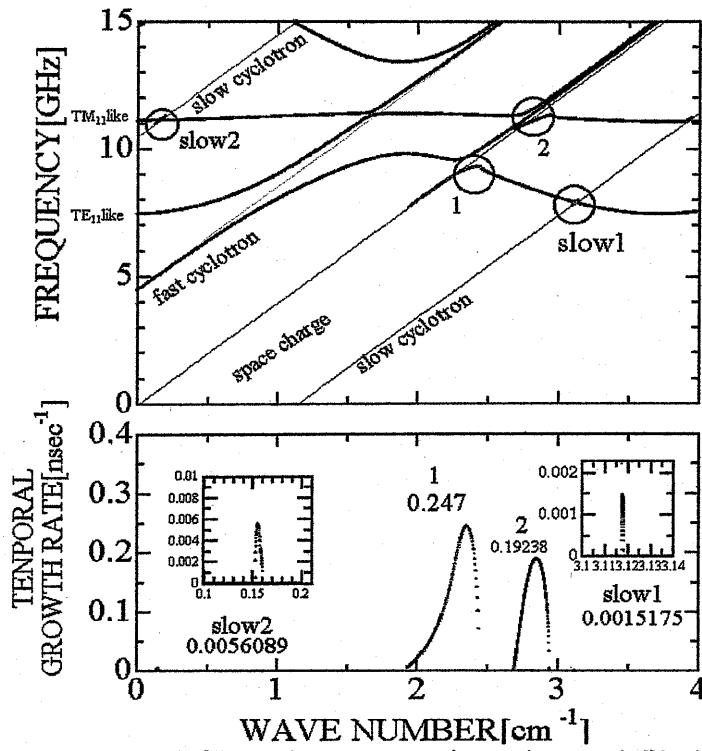


Fig.4-6-6 非軸対称モード ($m=1$) の分散特性

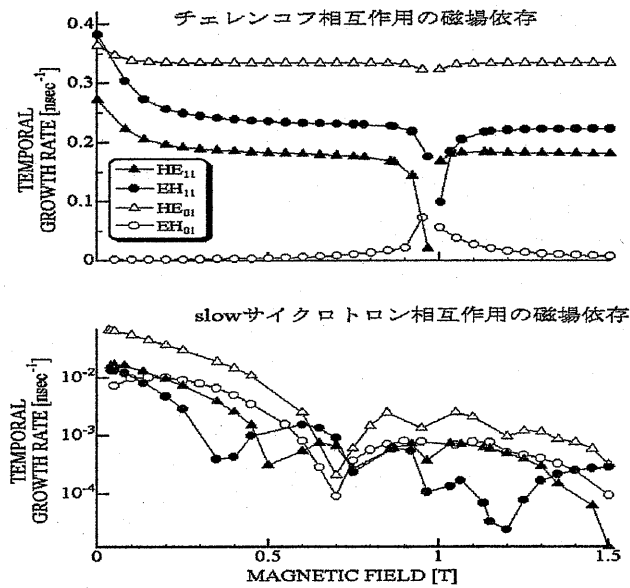


Fig.4-6-7 非軸対称モード ($m=1$) 不安定性の磁場依存性

遅波サイクロトロン不安定性の新展開

誘電体による遅波構造では、チェレンコフ不安定性と遅波サイクロトロン不安定性は、一般に競合する。しかし、周期的遅波導波管の特徴は、**Fig.4-6-8**のように、チェレンコフ不安定性と遅波サイクロトロン不安定性が同じ周波数で起きることができる点にある。電磁波の分散特性が波数空間で周期的なためである。この場合、C点のチェレンコフ相互作用により発生した電磁波は、A点の異常ドップラー効果による遅波サイクロトロン相互作用の正帰還により増幅されることになる。この機構を考えれば、遅波サイクロトロン不安定性が比較的弱くても、効率の良い電磁波発生が可能になることが指摘されている。

また、つい最近であるが、我々の研究により、左回りの非軸対称モードでの強い遅波サイクロトロン不安定性が見つかっている。つまり回転角方向のモード数を負の値とすることであり、**Fig.4-6-9**に $m=-1$ の場合の分散関係を示す。右回り（正の m ）場合に比べ、一桁近く遅波サイクロトロン不安定性が強くなっているのが分かる。遅波サイクロトロンモードはビームモードの1つであることは言うまでもない。その進行速度はビームより遅いため、遅波サイクロトロン不安定性を起こす波動は、ビームに追い越される。従って、実験室系の左回りの電磁波は、ビームから見れば右回りとなる。電子のサイクロトロン運動は右回りで、この波と相互作用することで、電子は共鳴的に減速される。つまり、ビームの運動エネルギーが電磁波のエネルギーへ変換されることになる。また、回転角方向へは実数の波数ベクトルが存在し、これによる電子ビーム集群の効果も期待できる。

本研究の理論解析について、論文として公表する準備を進めている。今後も、さらに解析を進め、この動作機構の有効性を示し実現化に向けた問題点を明らかにしていく予定である。

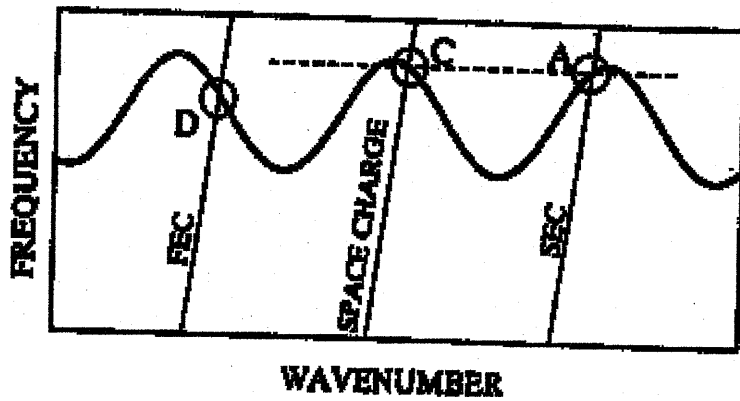


Fig.4-6-8 チェレンコフ相互作用と遅波サイクロトロン相互作用の共鳴による遅波サイクロトロンメーザ動作

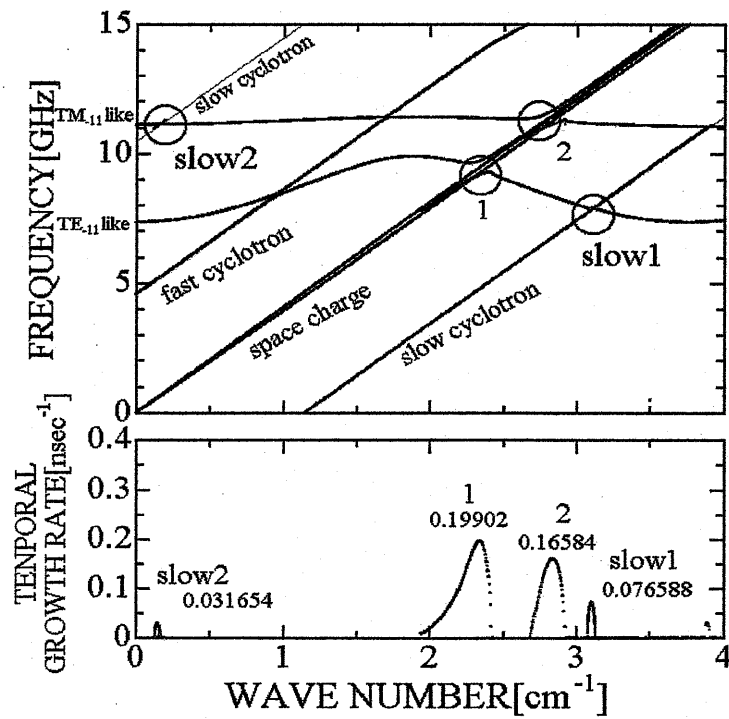


Fig. 4-6-9 左回り非軸対称モードの不安定性

5 実験

5.1 実験装置の構成

ガイド磁界を用いた実験装置の構成図を Fig.5-1-1 に、外観を Fig.5-1-2 に示す。高電圧発生装置としてマルクス・ジェネレータ (Marx-Generator 以下 MG), 矩形短パルス形成用の PFL, エアギャップスイッチ (Air-Gap-Switch 以下 GS), PFL との整合をとるためのマッチング抵抗, そして真空容器内には, 電子ビームを発生させる為の陰極 (以下, カソード), 陽極 (以下, アノード) からなる電子ビームダイオードがおさめられている。そのアノードは真空容器とともに接地されている。この他に MG の動作タイミングをとるシーケンス・コントローラが装置から離れた位置にある。平成 12 年度後半からガイド磁場を使用する為に, 真空容器を新しく設計した。これまで使用してきた装置 (Fig.5-1-3) は, チェレンコフ・サイクロトロン縮重相互作用の研究のため, プラズマによる電子ビーム伝搬であった。磁場コイルの制約が無かったため真空容器のフランジは ϕ 196mm である。磁場コイルの内径 ϕ 150mm より大きい。そこで, 新しく真空容器を設計・製作した。真空容器のフランジ径は ϕ 144mm であり, 真空容器自体は外径 ϕ 101.6mm, 内径 ϕ 95.6mm である。MG, PFL, GS は既存のものを使っている。

動作順序は, まず MG から発生したインパルス電圧で PFL を充電する。次に, PFL が規定の充電電圧に達したところで自爆型の GS が閉じて矩形パルスがカソードに印加される。そして, カソードから電子が飛び出し電子ビームが発生する。カソードから電子が出てくる機構は, ベルベットの効果があり, 単なる電界放出と異なり, 非常に複雑である。ベルベットを貼り付けたカソード表面にプラズマが形成されると考えられている。一種のプラズマカソードであるが, その機構は, 今後さらに研究するに値する。とにかく, 100kV 以下でも, 比較的容易に, 均一なビームを得ることができた。

測定系は電圧, 電流, そしてマイクロ波形が計測できる様に構成されている。電圧は MG の出力, PFL の出力を分圧抵抗によりそれぞれ 1/10000, 1/13400 に降下させてオシロスコープに取り込み波形で観測する。電子ビームの伝搬電流は, 溝つきの導波管に設置したロゴスキーコイル (以下, RC) によって測定するか, もしくは, ビームコレクターでうけとめた電子ビームの電流値を RC によって測定する。最後に, マイクロ波を発生させ, それを測定するには遅波導波管にビームを通すことによってマイクロ波を発生させ, ホーンアンテナで受信し測定する。

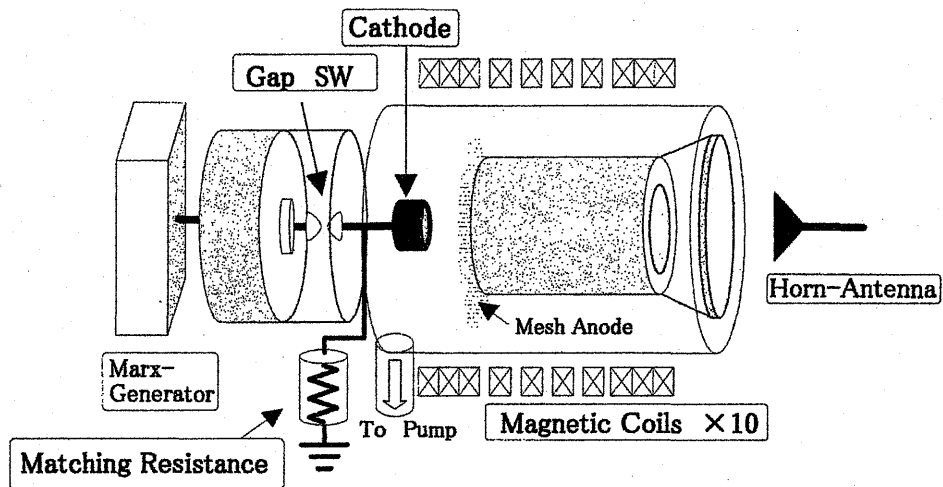


Fig.5-1-1 実験装置の構成図

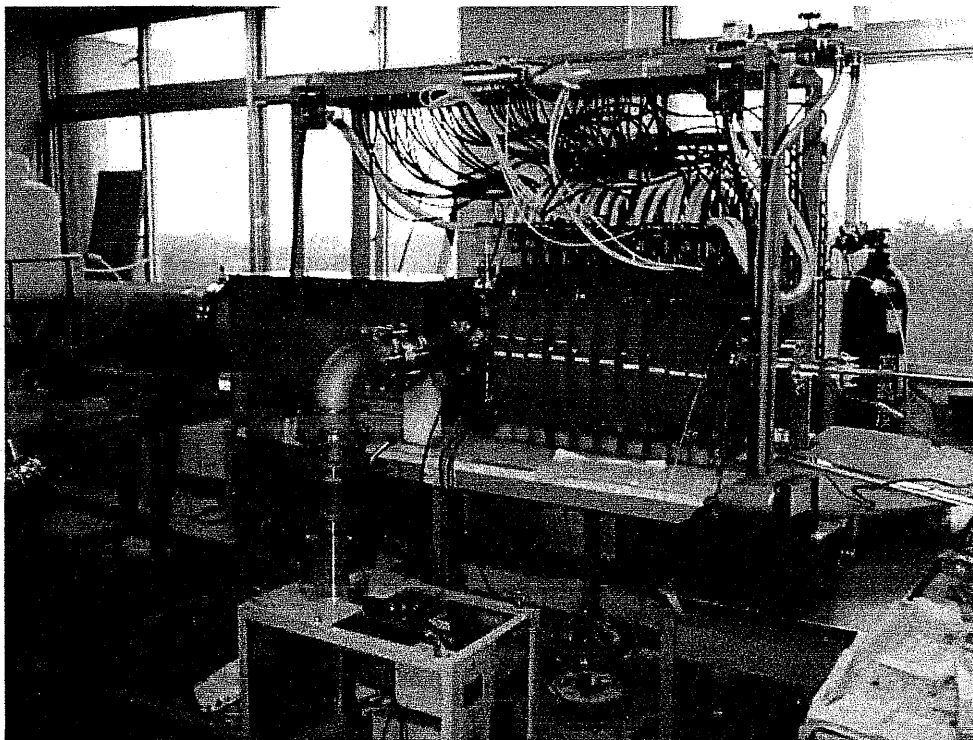


Fig.5-1-2 磁界コイルを用いた場合の実験装置

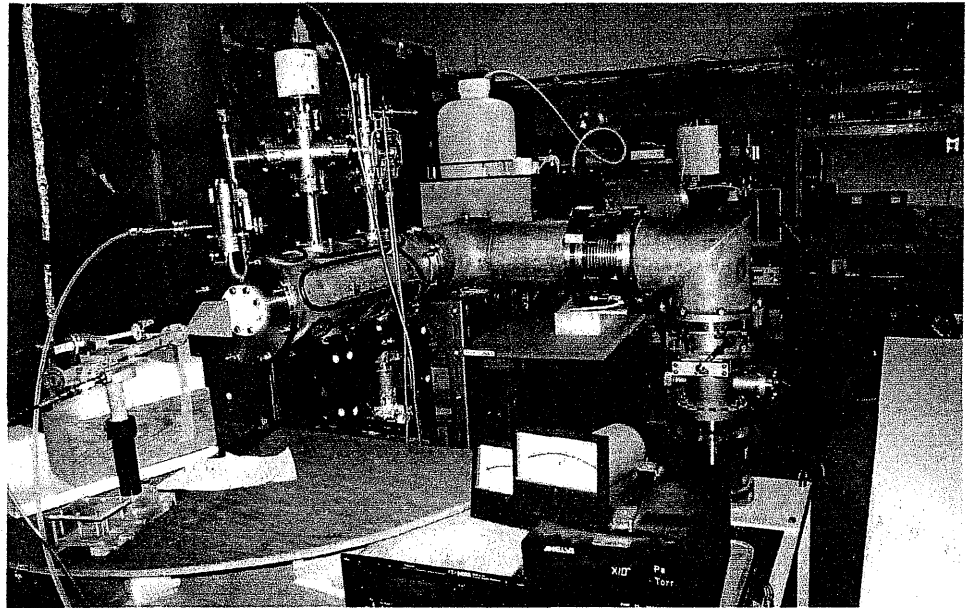


Fig.5-1-3 磁界コイルを用いない場合の実験装置

マルクス・ジェネレータ (MG)

パルスエネルギーは数十[ns]～数十[ms]というごく限られた時間に大電力が注入される。大電力を短時間に電力系統から供給するとすれば、大きなパルスエネルギーに対応した発電装置を設備することになり大変不経済であり、電力系統に電圧変動などの悪影響を及ぼす。そのため、パルスエネルギーに使うためのエネルギーを、時間をかけてゆっくりと蓄え、瞬時にそのエネルギーを放出する装置が考えられる。電気的エネルギー蓄積方法には、コンデンサを用いた静電エネルギー蓄積法、コイルのインダクタンスを利用した誘導エネルギー蓄積法の二種類がある。静電エネルギー蓄積方法は技術的に進歩しており、その代表例としてMGがある。MGは、比較的低い電圧によって並列に充電された多数のコンデンサを、瞬間的に直列に接続替えして高電圧化できるような仕組みになっていることが特徴である。

当研究室で使用しているMGはニチコン社製のIG-H200である。その仕様をTable 5-1-1に示す。一個当たり0.5[μ F]のオイルコンデンサ十個を、抵抗を介して並列接続で充電する。電磁石駆動の機械式の球ギャップスイッチが閉じることにより、充電された十個のコンデンサを同時に直列接続に切り替え、高電圧を発生させる。真空ギャップスイッチに比べるとインパルス電圧の立ち上がりの早さは劣るが、動作の安定性、再現性は優れている。

MGの出力電圧は、分圧抵抗により測定でき、その分圧比は一万分の一である。

MG に PFL を接続した場合は、PFL 充電電圧波形を観測することができる。充電電圧はシーケンス・コントローラのメータの針が示す値を五倍したものに相当する。つまり、シーケンス・コントローラのメータの数値はコンデンサ二個分の充電電圧を示している。

Table 5-1-1

マルクス・ジェネレータの仕様	
型式	IG-H200
全容量	0.05 [μ F]
公称電圧	200 [kV]
利用率	80 [%]
倍電圧充電方式	
機会短絡方式	
波形	1.2/50 [μ sec]

パルス形成線路 (PFL)

PFL は、MG から発生したインパルス電圧を圧縮、成形し高密度の電力すなわちパルスパワーを発生させるものである。得られたパルスパワーを電子ビームダイオードに印加することで、高電圧かつ大電流の電子ビームを効率よく発生させることができる。

PFL の容量は、MG の容量と等しい場合にエネルギーの転送効率が 100[%]となるので、実際は MG の容量と等しい方が望ましい。しかし、PFL の材料となるステンレス管に規格品を用いるため、サイズ及び耐圧に制限が付いており、また、異常放電などをなさない、動作に適したものを使用している。外部導体の内径は $\phi 261.4\text{mm}$ 、内部導体の外径は $\phi 89.2\text{mm}$ (原型 PFL は $\phi 216.3\text{mm}$) となっている。ここで、外部導体の内径の半径を a 、内部導体の外径の半径を b とし、また全長 1[m]であることを考慮にいと、円筒型同軸線路の分布容量 $C[\text{F/m}]$ を求める式は、

$$C = \frac{2\pi \epsilon}{\log(b/a)}$$

で与えられる。また、分布インダクタンス $L[\text{H/m}]$ を求める式は、

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \log \frac{b}{a}$$

となる。これらから、特性インピーダンス Z_0 は、

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \log \frac{b}{a}$$

となる。ここで、 ϵ 、 μ はそれぞれ内部誘電体の誘電率及び透磁率である。内部誘電体である純水の特性を **Table 5-1-2** にまとめる。

Table 5-1-2

純水の特性	
比誘電率 ϵ_s	81
比透磁率 μ_s	1
比抵抗 ρ	2.5×10^5 [Ω/m]
耐圧 (40 μ sec)	200 [kV/cm]

また、真空の誘電率及び透磁率はそれぞれ、

$$\epsilon_0 = 8.855 \times 10^{-12} \text{ [F/m]}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ [H/m]}$$

である。これらのことより PFL の諸特性を求めることが出来る。PFL の特性を **Table 5-1-3** にまとめる。

Table 5-1-3 PFL の特性

	改良型 PFL	原型 PFL
分布容量 C	4.14 [nF/m]	23.8[nF/m]
分布インダクタンス L	215[nH/m]	38.1[nH/m]
特性インピーダンス Z_c	7.21[Ω]	1.26[Ω]

また、発生する矩形パルスのパルス幅 τ は、改良型と原型 PFL とともに、

$$\tau = 2l \sqrt{\epsilon \mu} = 2l \frac{\sqrt{\epsilon_s \mu_s}}{c}$$

ここで、 l は PFL の全長で 1 [m]、 c は光速で 3×10^8 [m/s] で、それらを代入すると

$$\tau = 60 \text{ [nsec]}$$

となる。これは原型、改良型 PFL とともに同じ値である。

誘電体に用いられている純水の誘電率は、他の誘電体と比べて非常に大きく、かつ、耐圧も高いので PFL を小型化することが可能である。

しかし、抵抗率が他の絶縁体に比べて数桁小さく自然放電の時定数が非常に

短い、そのことより純水を誘電体にもつ PFL の充電はインパルス電圧で行う。自然放電の時定数は、

$$\rho \varepsilon = 2.5 \times 10^5 \times 81 \times 8.855 \times 10^{-12} = 180 [\mu \text{ sec}]$$

で表される。よって充電時間は $\rho \varepsilon$ より短くする必要がある。ここで、充電をインパルス電圧で行うとき、充電時間が出力パルス幅よりも十分長くないと、PFL 中の電圧分布が各場所で一定にならないため、出力波形が矩形波にならない場合がある。一般に、充電電圧はパルス幅の 5 倍程度で行われる例が多い。また、PFL の出力電圧は、分圧比 $1/13572$ の分圧抵抗により測定する。

磁場コイル及び直流電流源

Fig.5-1-2 には、10 個ならんだコイルがあるが、これは電子ビームの伝搬を補助するために、軸方向に最大で約 1T (500A 時) の強磁場をかけることができる空芯磁場コイルである。このコイルはテクノ電気工業製であり、一個当たり 46kg の質量がある。このコイルに直流電流を流すための電源が Fig.5-1-4(a),(b) であり、(a) は磁場コイル電源制御部、(b) は直流電流源である。電源の定格最大出力は 500A (定常) と比較的大きな値であるため、注意が必要である。磁場制御部は主に後述するシーケンス・コントローラからのパルス信号によってスイッチが入れられる。また、上部にある出力電流設定ダイヤルによって磁界コイルに流れる電流を調整することができる。これらの電源によって使用される定格最大電力は

$$500\text{A} \times 300\text{V} = 150\text{kVA}$$

となり、定常に運転すると工学部の最大電源容量を変更する必要が生じる。実験は 2 秒のパルス運転で間隔は、1 分以上とした。また、強磁場が掛かるため、磁場コイルの近くに磁性体の金属スパナ・ドライバー・ネジ等は置き忘れてはならない。

Table 5-1-4 に磁場コイルに流れる電流と磁場強度の関係を示す。波形導波管内で均一に電子ビームを伝搬させるために、均一な磁場を発生させるように磁界コイルを配置した。磁場コイルの配置図及び磁界コイルの中心軸上の磁界の理論値・実験値を Fig.5-1-5 に示す。磁界コイルが発生する磁界の半径方向成分を Fig.5-1-6 に示す。最大電流値 500A で約 888mT のほぼ均一なガイド磁界が軸方向距離約 400mm にわたって得られた。

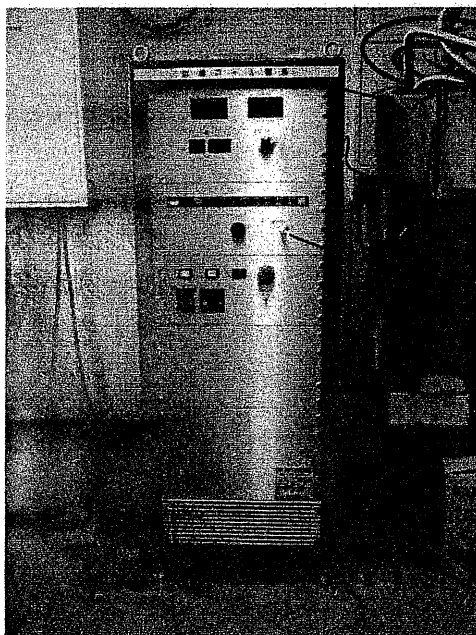


Fig.5-1-4(a) 電源制御部

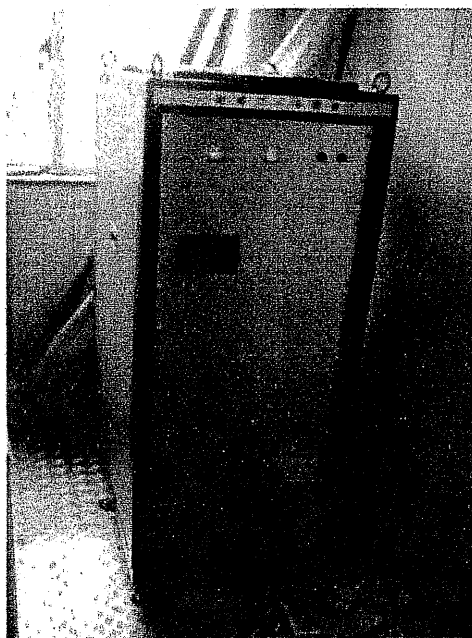


Fig.5-1-4(b) 電源部

Table 5-1-4 コイル電流とガイド磁場

出力電流設定	コイル電流値[A]	軸方向磁場 B_z [mT]
1	36.6	68.351232
2	86.7	158.3826204
3	138.4	249.6599948
4	188.6	341.044168
5	242.7	432.891136
6	291.6	524.5957056
7	345.2	616.5494724
8	398.6	709.1796316
9	449.6	801.2401972
10	501.4	887.676026

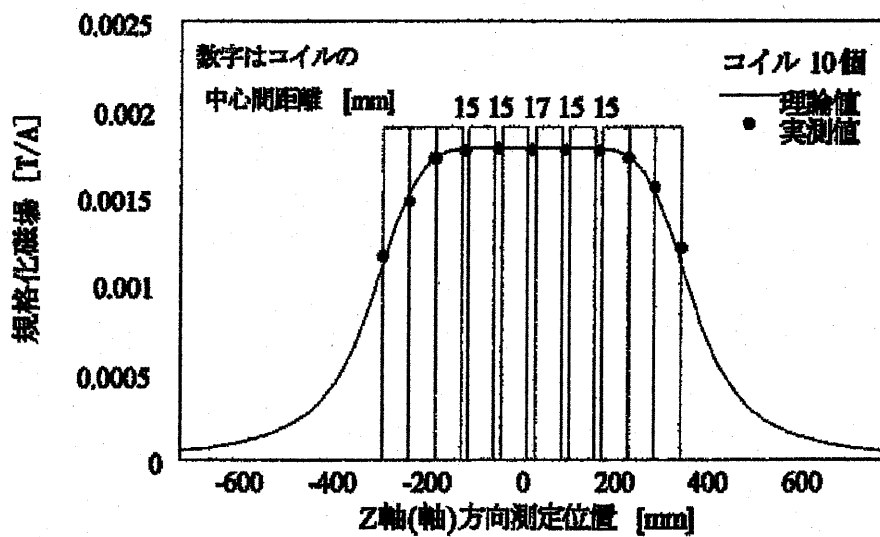


Fig.5-1-5 中心軸上の磁場分布

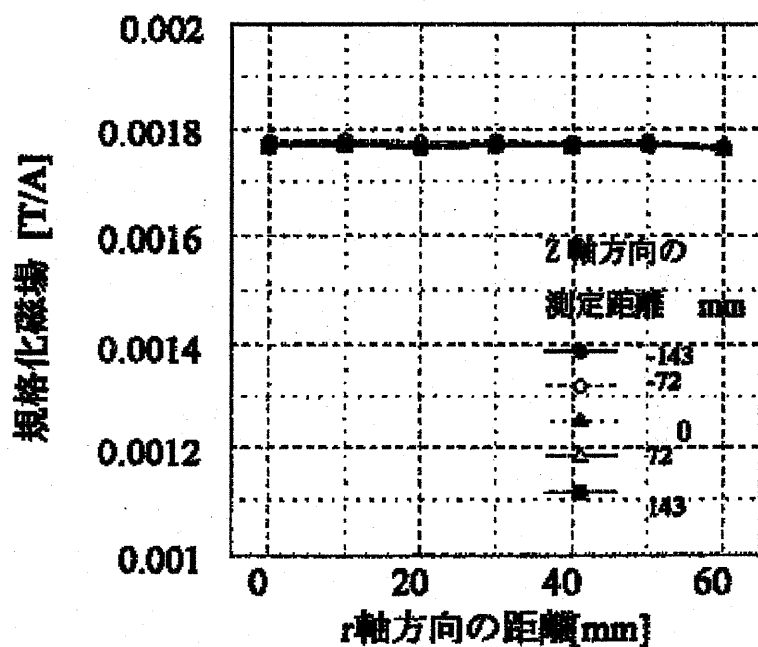


Fig.5-1-6 半径方向の磁場分布

電子ビームダイオード

電子ビームダイオードは、カソードとアノードから構成されている。これらを用いて大電力マイクロ波を発生させるためには、より強い電子ビームを収束させるようにコントロールする必要がある。

電子ビームダイオードの断面図を Fig.5-1-7 に示す。カソードの材質にはアルミニウムを使用した。カソードやその軸と真空容器との間での放電を防ぐために、カソードとその軸、そして、カソード導入部をポリカーボネイトやアクリルなどの絶縁体で覆った。カソードの先端は微視的にはかなりの凹凸があり、電子が放出されやすい部分とされにくい部分があると考えられる。このような理由から、カソード先端部にベルベット（表面に微視的な毛が立った布、ピロード）を装着、または鏡面加工するなどしてカソードの劣化を極力抑え、電子放出の均一化を図った。

アノードには銅製のメッシュアノードを使用した。しかし、ガイド磁界がある場合、カソードから放出される電子ビームは磁力線に沿って伝搬するため、メッシュは原則的には必要ない。しかし、発生電磁波のカソードへの影響を減らす目的もあり使用した。メッシュの電磁波発生に対する影響については、後述するように実験的に調べている。

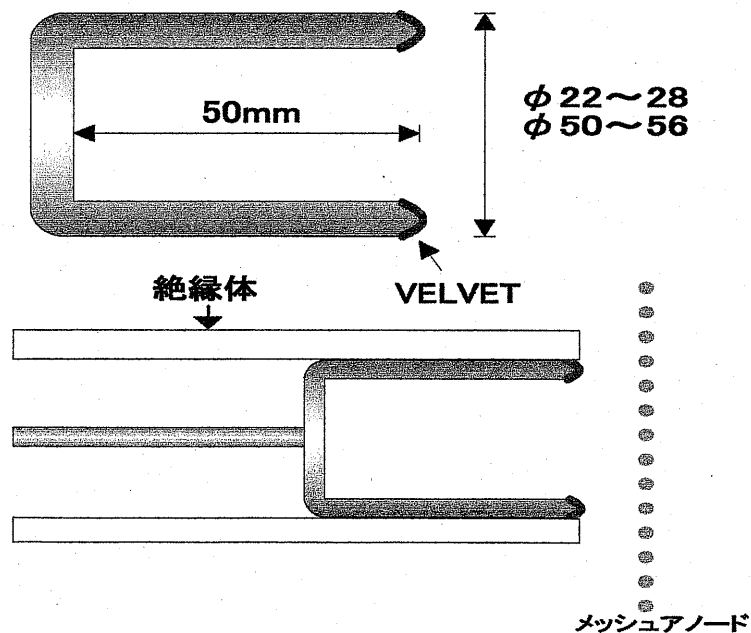


Fig.5-1-7 カソード（上図）と電子ビームダイオード（下図）

真空装置

カソード-アノード間で安定した電子放出を実現するためには、真空容器内を高真空にする必要がある。また、ヘリウムなどの中性ガスを注入し、プラズマを生成させ、ビームを伝搬させやすくする際にも高真空状態にしなければならない。真空系として油回転ポンプとターボ分子ポンプ (Fig.5-1-8) を用いて排気している。

真空容器は外径 $\phi 101.6$ 、内径 $\phi 95.6$ の円筒容器で、内部には高電圧導入部、電子ビームダイオード、遅波導波管、RCなどが収納される。管とフランジの接合部は、ガスケット及びOリングで気密を保つ。Oリングには、より気密を保つためにアピエゾン (高真空グリース) を薄く延ばして塗ってある。真空容器内の真空度は 1×10^{-5} torr 程度以下である。

シーケンス・コントローラ

シーケンス・コントローラはMGの操作系をまとめて分離させたものである。実験中は装置全体に高電圧がかかるため、安全性を考えて操作は十分離れて行う必要がある。シーケンス・コントローラは、Fig.5-1-9 に示すように上段と下段に分かれている。上段はタイミング制御部であり、放電間隔やトリガタイミングの設定をすることができ、MGの充電から放電までの操作の自動化や、磁場コイルの入力信号 (15V のパルス) を発生することができる。また、下段は高電圧制御部であり、主電源、電圧計、スライダック等がある。

下段の高電圧制御部の電圧計はMGのコンデンサ1個分の充電電圧を示しているが、実際の充電電圧は目盛りの半分である。これは、MGのコンデンサの数を5個として仕様書を作成したためである。そのため、MG全体の充電電圧はその電圧計の目盛りの5倍となる。

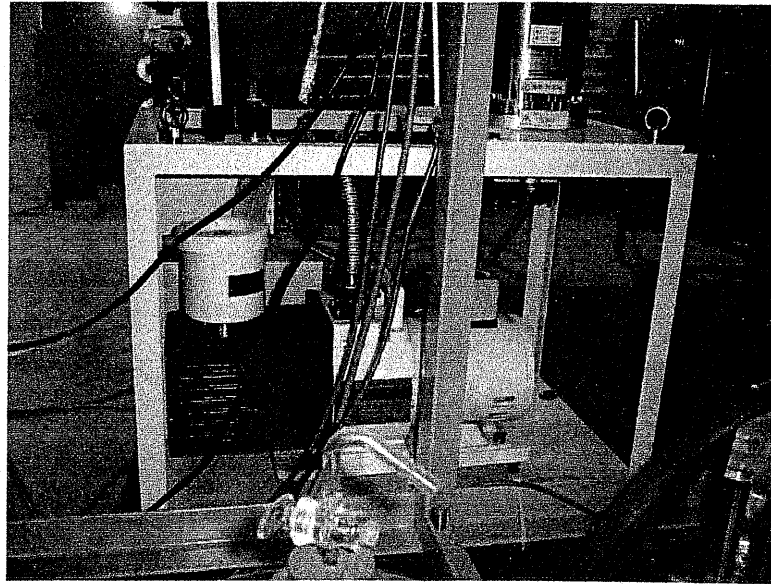


Fig.5-1-8 真空ポンプ

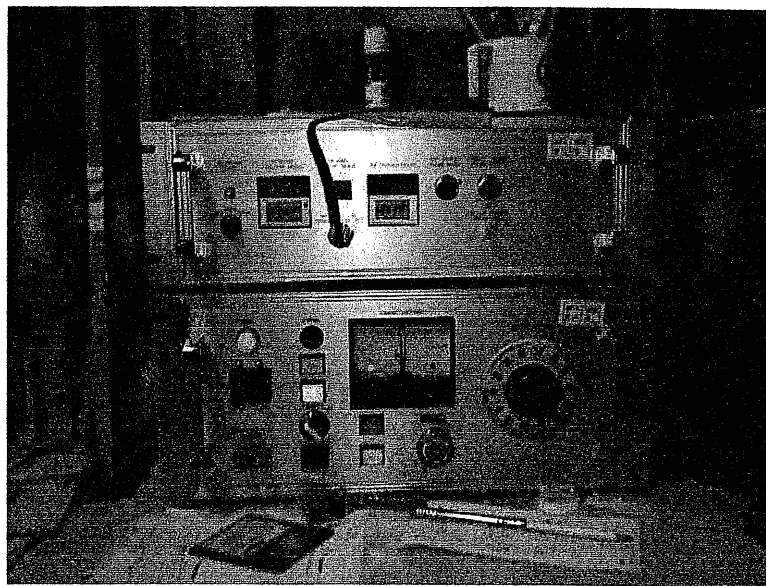


Fig.5-1-9 シーケンス・コントローラ

5.2 電子ビーム発生・伝搬実験

ここではガイド磁場を用いたビーム発生・伝搬の実験について述べる。陰極には先端にはベルベットを貼り付けた円筒殻陰極 (Fig.5-1-4 の深さ 50mm) を用いた。500kV 程度あるいはそれ以下の電圧で冷陰極を使用する場合、金属表面の形状の工夫のみで、均一な電子ビームを得ることは不可能である。表面にグラファイトのコーティングを施したり、ベルベットを張り付けたりする必要がある。本研究では、100kV 程度以下での動作が可能で、比較的安価で取り付けの容易なベルベットを使用した。電子ビームの形状や電流値を調べることは、電子ビームと導波管との相互作用を調べる上で重要である。

陰極線のような微弱電子流は、空間電荷の影響が小さいため広がらないが、大電流電子ビームの場合、自己空間電荷の影響でビームは発散してしまう。ビーム収束の有効な手段としては主に磁場収束、電場収束、プラズマによる荷電中和の 3 つがある。本実験では、ガイド磁場を用いて電子ビームを収束・伝搬させている。磁場を用いると、その分、装置が大型化・重量化してしまうが、他の方法よりも容易に電子ビームの収束・伝搬ができる。

均一な電子ビームを得るためには Fig.5-1-7 のようにベルベットを貼り付ける。特に、本研究のように 100kV 以下の比較的低い電圧で、大口径電子ビームを必要とする場合、非常に重要である。

ビーム電流

電子ビームの形状はステンレス製の金属板である Beam Collector (以下 BC) に感熱紙を貼り付けその焼き付き具合によって観測し、電流値は BC で電子ビームを受け止め、ロゴスキーコイルによって測定した。アノードと BC の距離 (An-BC 間距離) を変化させながら各地点で 5shots ずつ測定し、その平均値をプロットしたのが Fig.5-2-1 である。磁界ゼロではアノード後 12mm 地点で最大値をとった後徐々に減少しアノード後 120mm 地点で電流値が確認できなくなった。ガイド磁場を用いると、アノード後 360mm 地点においても約 100A 前後の出力が確認できた。また、アノード直後ではガイド磁場に比例して電子ビームの電流値が高くなる傾向が見られたが、アノード後 100mm 地点付近以降ではガイド磁場の変化による電子ビーム電流値の変化は殆ど見られなかった。

焼き付けパターン

電子ビームの焼き付けパターンを測定し、伝搬してきたビーム形状を調べた。ビームの拡散が少なくなるためと Fig.5-2-3 にガイド磁場 68 と 432mT における焼き付けパターンを示す。An-BC 間距離をずらしながら各位置で 1shot ずつ焼き付

けた。磁場ゼロではアノード後 30mm 地点以降ではビームの焼き付きが得られなくなったのに対し、磁場 68mT (アノード後 240mm 地点以降でほぼ消失) より大きい磁界の時、アノード後 360mm 地点まで焼き付けパターンを得ることができた。また、電子ビームの形状は、磁場ゼロでは円環状に発生したビームが収束せず、すぐ拡散しているのに対し、磁界を用いるとほぼ円環状のまま伝搬していた。ガイド磁場が強くなると、ビームの拡散が少なくなるため、円環の幅が細くなり、焼き付きが濃くなるという結果が得られた。しかし、Fig.5-2-1 では、磁場 68mT 以上では、伝搬距離 100 mm 程度以上において、電流値の変化があまり見られない。これは、ガイド磁場が弱いとビームがある程度拡散しまい、ビームの密度は変化しているが、壁にまでは発散しない。そのため通過する総電荷量は特に変化していないと考えられる。

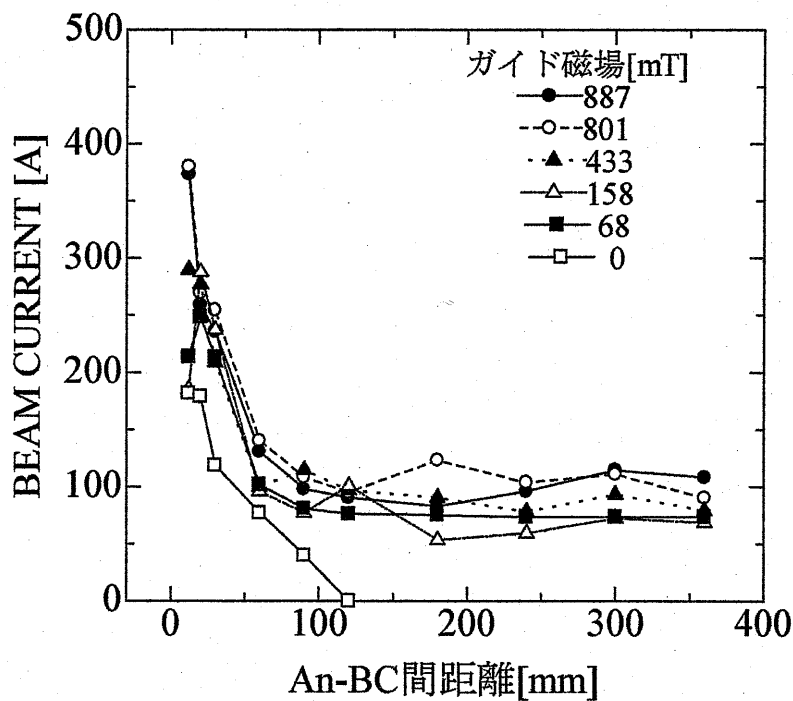


Fig.5-2-1 ビーム電流値の伝搬距離依存性

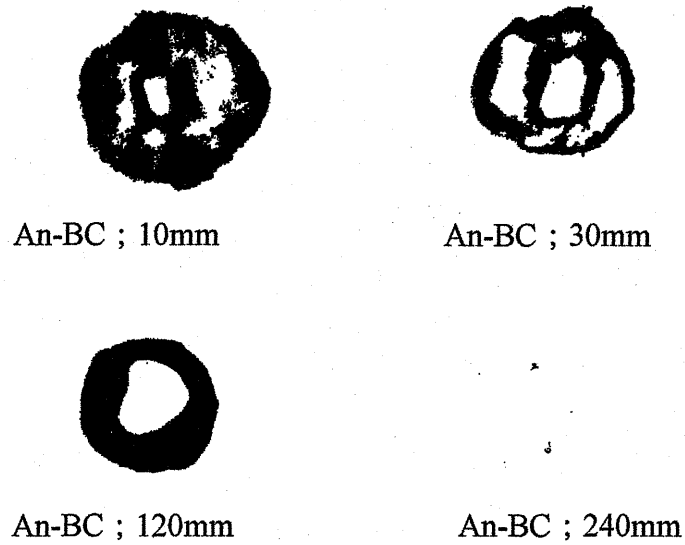


Fig.5-2-2 ガイド磁場 68mT における焼き付けパターン

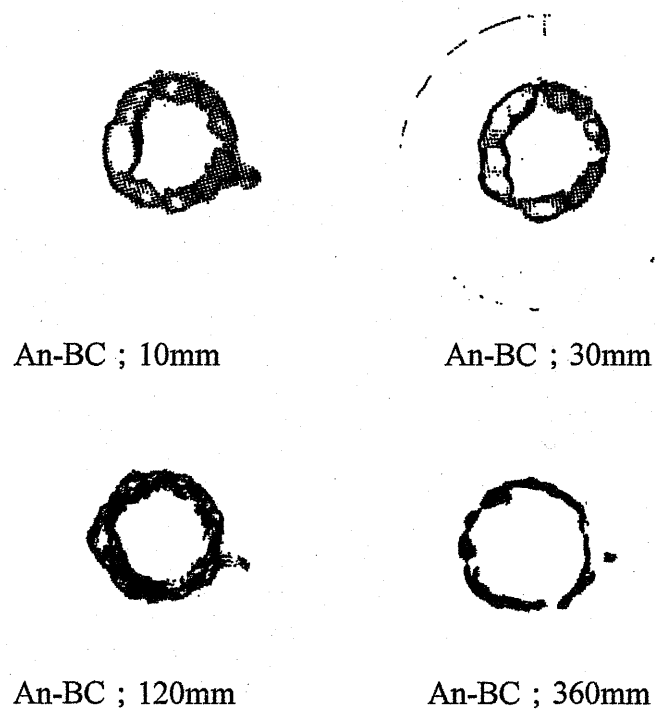


Fig.5-2-2 ガイド磁場 432mT における焼き付けパターン

5.3 大口径遅波導波管とマイクロ波・ミリ波測定系

本研究では、後進波発振器実験と本質的に同じ装置を使用する。軸方向に電子ビームを入射させるので、他のマイクロ波源に比べ大電流の電子ビームでの動作が可能であり、大電力のマイクロ波出力を得ることが期待される。後進波発振器でマイクロ波出力を得るためには遅波回路 (Slow Wave Structure : SWS) に電子ビームを入射させる必要がある。本実験では、大出力化および高周波数化のために、大口径波形導波管を設計製作した。また、チェレンコフ相互作用に加え、これまで研究の進んでいなかった遅波サイクロトロン相互作用についても、その効果を調べていく。

大口径遅波導波管

遅波回路として内壁を正弦波状に加工する。大口径波形導波管のパラメータを Table5-3-1 に示す。後進波発振器の代表的な実験で用いられている X-Band(5.2~10.9GHz)のパラメータも参考のため載せている。本研究の大口径波形遅波導波管ではそれより高い K-band(18.0~26.5GHz), さらには Q-band(33.0~50.5GHz)での発振を目的とする。導波管半径に比べ、コルゲートの周期と振幅が非常に小さくなっていることが特徴である。特に、振幅は 1/5 以下である。製作した波形導波管は 1 セクションあたりコルゲート周期数が 10 周期のモジュールよりなる (Fig.5-3-1)。5 個のモジュールを準備した。遅波導波管長導波管長は、10 周期間隔で、最大で 50 周期まで可能である。

Fig.5-3-2 および Fig.5-3-3 に K-Band および Q-Band の波形遅波導波管の分散関係を示す。電磁波モードは、代表的な軸対称 TM である。原点を通る直線はビームのエネルギーをパラメータしたビームモードである。また、ビームエネルギー 50kV で、磁場 0.5T と 0.888T の場合のサイクロトロンモードも線種を変えてプロットした。図では、簡単のためビーム密度の効果は無視している。密度効果は空間電荷モードを押し下げる形で表れる。遅波ビームモードと電磁波モードの交点で、電磁波が励起される。 π モードを境に、分散曲線の傾き、つまり群速度は正から負に変わる。これが負のとき、すなわち接線の傾きが負になる領域が後進波領域である。反対に傾きが正になる領域は進行波領域である。後進波発振器では、後進波領域での発振を利用している。

Table5-3-1 大口径波形導波管のパラメータ

波形導波管	平均半径 R_0 [mm]	振幅 h_0 [mm]	波長 z_0 [mm]
X-Band	14.45	4.45	16.7
K-Band	15.7	1.7	3.4
Q-Band	15.0	1.0	2.0

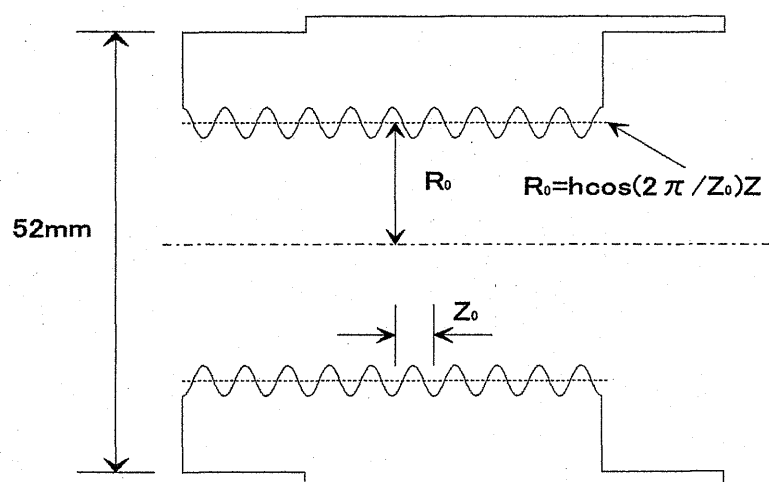


Fig.5-3-1 製作した波形遅波導波管モジュール

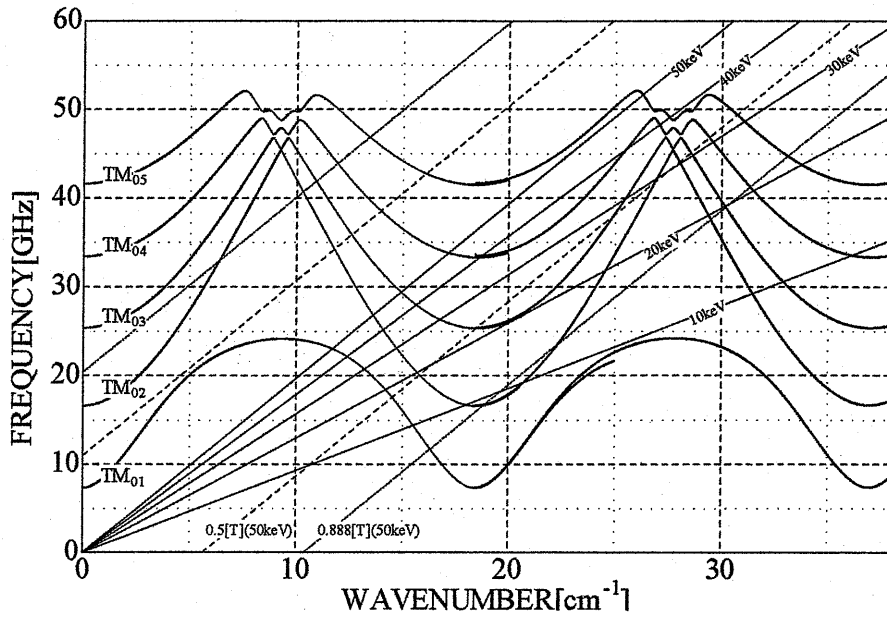


Fig.5-3-2 軸対称 TM モード (K-Band SWS)

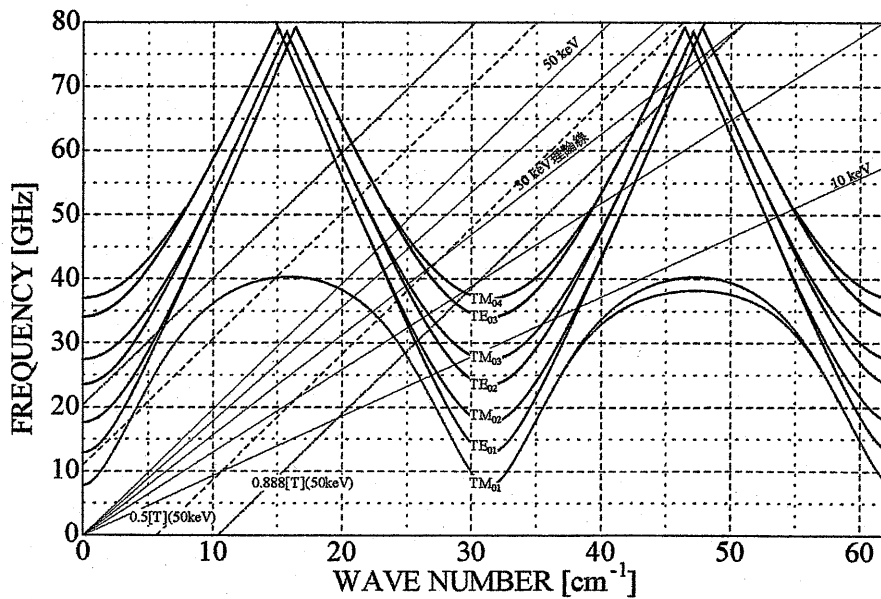


Fig.5-3-3 軸対称 TM モード (Q-Band SWS)

電磁波出力の測定系

前節で述べた電子ビームをもとに、ガイド磁場と波形導波管を用いてマイクロ波発生実験を行った。波形導波管内で発生した電磁波を検出するために真空容器の終端部に、ポリカーボネイト製の出力窓を取り付け、そこから放射される電磁波をホーンアンテナによって受信し、同軸導波管変換器を用いて検波器に入力する。検波した信号は、オシロスコープで波形・出力値を測定した。大電力の電磁波出力による検波器破損を防ぐために、方向性結合器、減衰器で十分に減衰させた後で検波器に入力させる必要がある。また、検波器に触れる前には、アース線に触れるなどして、体内の静電気を除去する等、取り扱いには十分に注意する必要がある。検波器からオシロスコープに出力される信号波形は微小な電圧（1V程度以下）であるので、十分なシールドなどのノイズ対策が必要である。

発振電磁波の周波数を測定する場合は、ホーンアンテナで受信した信号を方向性結合器で2方向に分配する。そのうち一方はそのまま同軸線路を通して検波器で電圧に変換されオシロスコープで観測する。もう一方は、検波器までに長さ L [m]の矩形導波管（以下遅延線）を通してから検波器で電圧信号に変換しオシロスコープで観測する。測定系の構成図を Fig.5-3-4 に示す。この方法は、タイムオブフライト法などとも呼ばれ、比較的安価なシステムで、高い周波数まで測定可能で、広く利用されている。遅延線として使用した矩形導波管はEIAJ形式名 WRJ-260 で、断面の寸法は

$$a \times b = 8.636\text{mm} \times 4.318\text{mm}$$

である。この導波管のカットオフ周波数 f_c はカットオフ周波数 $\lambda_c = 2a = 17.272 \times 10^{-3}\text{m}$ より、 $f_c = 17.369\text{GHz}$ となる。遅延時間 T [sec]との関係から、発振周波数 f [GHz]は、

$$T = \frac{L}{V_g} = \frac{L}{c\sqrt{1-(\lambda/\lambda_c)^2}} \quad \text{より、} \quad f = \frac{f_c}{\sqrt{1-(L/cT)^2}}$$

となる。本実験ではこの方法を用いて発振周波数を測定した。遅延線を長くすると発振マイクロ波の減衰が大きくなるためにノイズが大きくなってしまい、逆に遅延線を短くすると遅延時間が短くなり周波数の特定が困難になってしまう。最適な遅延距離を求めることも課題である。ここでも、ノイズ対策が必要であった。

電磁波出力窓の中心を中心とする水平な円周上で、受信ホーンアンテナを左右に振れる支持台を準備し、発振電磁波の放射指向性を測定した。偏波面は水平方向と垂直方向の2方向を測定した。

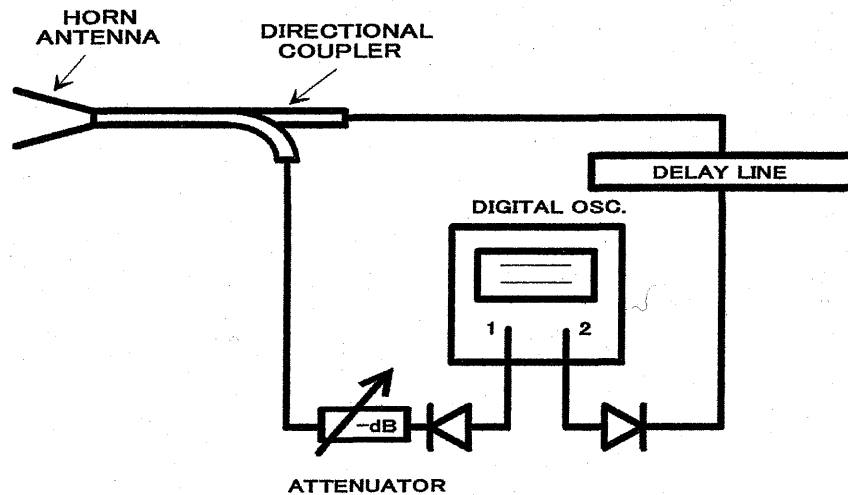


Fig.5-3-4 発振電磁波の周波数測定系構成図

5.4 K-band マイクロ波発生実験

メッシュアノードの有無によるマイクロ波出力の違い

今回の実験でアノードとして用いたメッシュアノードの効果を調べるために、メッシュアノードをつけた場合と取り外した場合について比較・検討した。波形導波管を5セクション使用し、カソード径 $\phi 28\text{mm}$ での実験結果を Fig.5-4-1 に、カソード径 $\phi 22\text{mm}$ での実験結果を Fig.5-4-2 に示す。カソード径の場合、メッシュアノードがある場合の方が、無い場合に比べて低磁界で発振が始まるということがわかった。しかし、磁界が強くなると、多少の違いは見られるものの、メッシュアノードの有無にかかわらず、ほぼ同レベルの出力が確認できた。カソード径 $\phi 22\text{mm}$ の場合、メッシュアノードがある場合では出力が確認できず、メッシュアノードが無い場合のみ出力を得ることができた。出力は、カソード径 $\phi 28\text{mm}$ に比べ、ピーク値は3割ほど小さかったが、低磁場ではカソード径 $\phi 22\text{mm}$ の場合の方が出力は大きくなった。

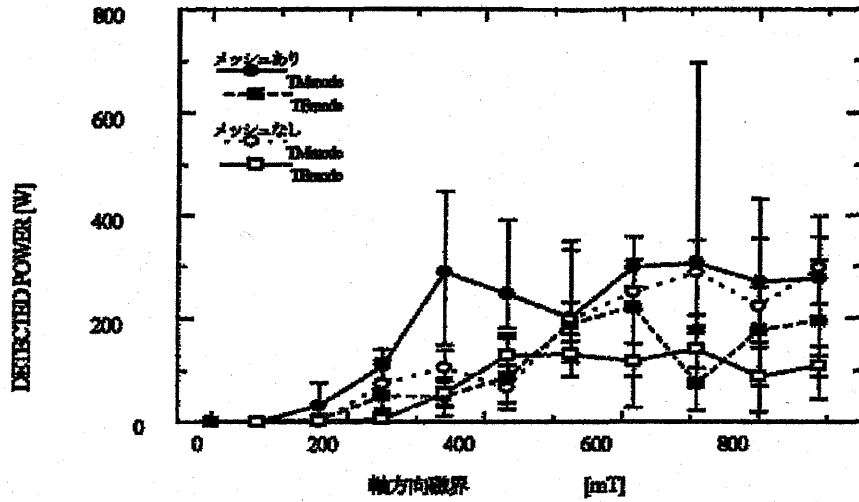
電子に与えられる垂直方向の運動エネルギーは、メッシュアノードの効果により、メッシュが無い場合に比べ小さくなる。低磁場では、メッシュアノードはその広がりを押さえる。遅波導波管のウェスト部の内径は $\phi 28\text{mm}$ である。ビーム直径がそれに近いと、導波管入り口で導波管に衝突するビームが増える。Fig.5-4-1 では、低磁場領域でメッシュアノードがある場合の方が、マイクロ波出力が大きくなった。これは、メッシュの効果で導波管に衝突するビームが減ったためと考えられる。逆に、Fig.5-4-2 では、元々の電子ビーム径が小さく、

遅波導波管の管壁からビームは離れている。メッシュアノードが無い場合、電子に与えられる垂直方向の運動エネルギーは大きくなり、垂直方向へビームは広がる。**Fig.5-2-2** のビームの焼き付けパターンでも、磁場が低い方が円環状ビームの幅が広がっている。メッシュが無い方が、ビームは遅波導波管の管壁近くを伝搬することになる。**Fig.5-4-2** で、メッシュがある場合に出力が得られなかったのは、電子ビームが導波管壁の近くを通過できなかったためであると考えられる。以降の実験では、メッシュアノードを使用した。

発振マイクロ波出力のカソード口径依存性

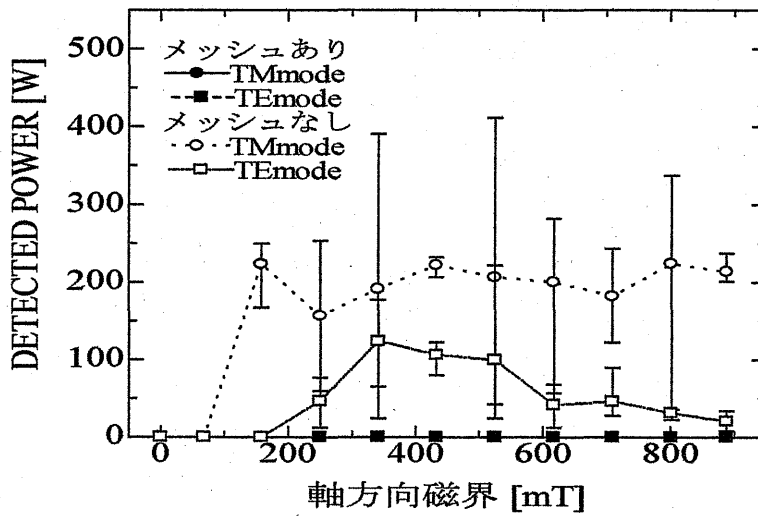
Fig.5-4-3 にカソードの口径による発振マイクロ波出力の磁場依存性についてまとめたものを示す。アノードには銅メッシュを使用している。波形導波管は5セクションを使用した。図を見ると、マイクロ波発振は、ガイド磁場 158mT より高い領域で見られ、341mT まではガイド磁場にほぼ比例して出力が増加した。しかし、それ以上の磁場では、マイクロ波出力はあまり変わらなかった。使用したカソードの口径別に見てみると、 $\phi 22\text{mm}$ のカソードを用いると発振がおこらず、発振が起こったのは $\phi 23\text{mm}$ のカソードからであったが、この時の出力は $\phi 24\text{mm}$ 以上のカソードを用いた場合に比べて小さかった。 $\phi 24\text{mm}$ 以上のカソードでは出力にあまり大きな違いは見られなかった。

カソードの口径によるマイクロ波出力の違いは、カソードから出る電子ビームの径の違いに起因していると考えられる。カソードの口径が遅波導波管の口径に近くなるほど、電子ビームが電場の強い遅波導波管壁付近を通過するため、このような違いが現れると考えられる。



(カソード直径 28mm)

Fig.5-4-1 アノードメッシュ有無と発振マイクロ波出力の磁場依存性



(カソード直径 22mm)

Fig.5-4-2 アノードメッシュ有無と発振マイクロ波出力の磁場依存性

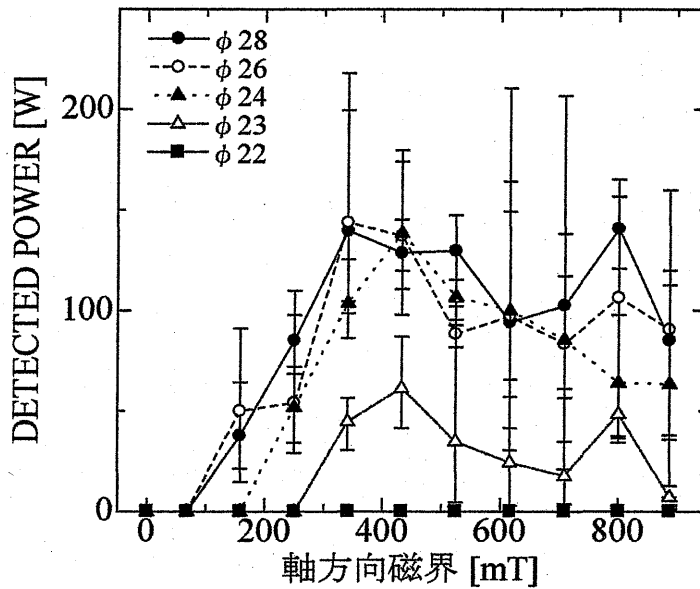


Fig.5-4-3 発振マイクロ波出力のカソード径依存性

波形導波管の周期数によるマイクロ波出力の違い

ここでは、波形導波管の周期数を変えることによって、マイクロ波出力がどのように変化するかを述べる。波形導波管の周期数をパラメータとした、マイクロ波出力のガイド磁場依存性についての測定結果を Fig.5-4-4 に示す。マイクロ波発振はコルゲート周期数 10 の時には見られず、コルゲート周期数 20 以上が必要であった。周期数は 10 間隔での変化であるので、10 から 20 の間のどれかまでは、実験的に調べることはできなかったが、10 から 20 の間という数字は、これはこれまでに米国やロシアで行われてきたオーバーサイズ後進波発振器実験とも一致している。また、コルゲート周期数 20 の場合では、コルゲート周期数 30 以上の場合に比べ、発振が始まるのに少し高いガイド磁場を要した。ガイド磁場を強くすると、コルゲート周期数による出力の変化はあまり見られず、図の検波電力で、150W 付近で落ち着いた。

波形導波管周期数を変えて、出力に含まれる TM, TE モード成分のガイド磁場依存性についても測定した結果を、Fig.5-4-5 に示す。カソード径 $\phi 28\text{mm}$ のときのものである。コルゲート周期数 50 の時のほうが TM, TE モード成分ともにコルゲート周期数 20 の時よりも低磁場で発振が始まった。TM モード成分は、磁場が高くなると出力がコルゲート周期数に関わらずほぼ同じになる。これに対し、TE モード成分はコルゲート周期数 50 のときの方が、出力が大きくなった。TM モード成分がドミナントとなる通常の後進波発振器動作は、コルゲート

周期数 20 で、ガイド磁場が強い場合に得られる。また、磁場が 0.5T 前後の低い領域や、波形導波管長が長い場合に TM モード成分の増加が見られる。このような傾向はカソード径 $\phi 24\text{mm}$ でも観測された。

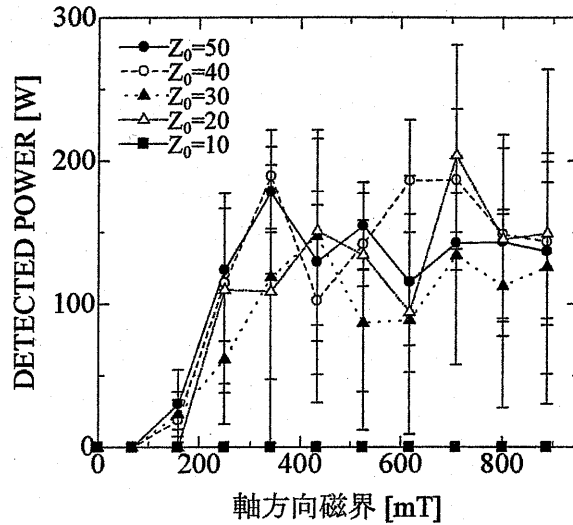


Fig.5-4-4 遅波導波管の周期数と発振マイクロ波出力の磁場依存性

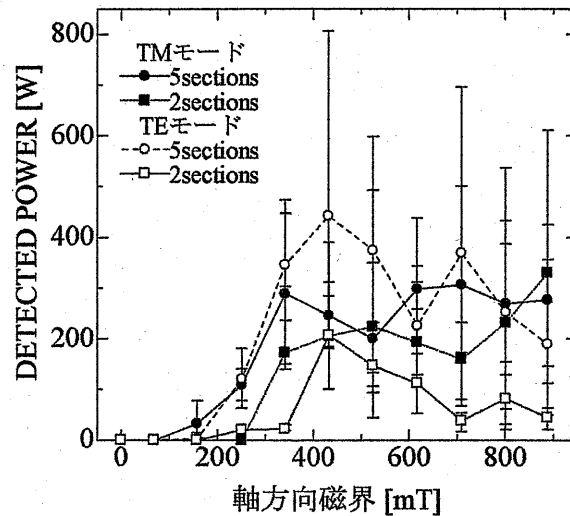
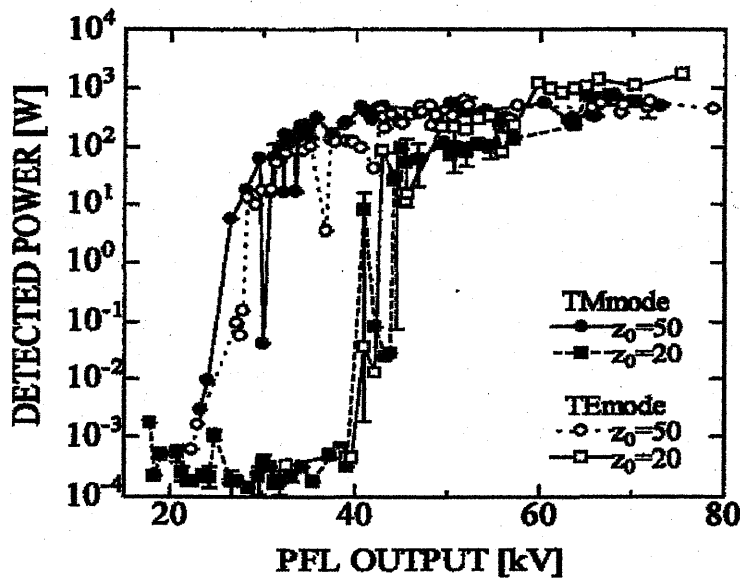


Fig.5-4-5 遅波導波管の周期数と発振マイクロ波出力の磁場依存性

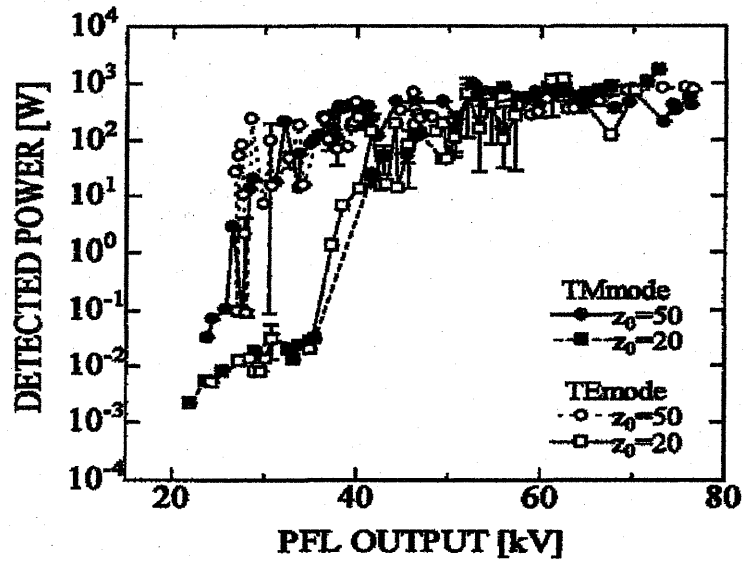
マイクロ波発振のスタート電圧の測定

マイクロ波発振は電子ビームと導波管との相互作用によって起こるものである。ここでは、マイクロ波発振に電子ビーム電圧がどのように影響しているのかを実験的に調べた。コルゲート周期数、ガイド磁場、カソードの口径を変化させ、マイクロ波発振が起こるスタート電圧がどのように変化するかを測定した。カソード径 $\phi 28\text{mm}$ で、ガイド磁場 433mT と 801mT の時のものを Fig.5-4-6 と Fig.5-4-7 に示す。図の横軸は PFL Output, すなわちビーム電圧であり、縦軸はマイクロ波の検波出力となっている。測定の結果、TM, TE モード成分ともに、コルゲート周期数に依存して発振スタート電圧が変化した。コルゲート周期数 20 の場合は 40kV 付近、コルゲート周期数 50 の場合は 30kV 付近からマイクロ波の発振が強くなり始めた。カソード径 $\phi 24\text{mm}$ でも同様な結果が得られ、カソード径による発振スタート電圧の変化は、特には見られなかった。前述したマイクロ波発振実験では、電子ビームの電圧は約 50kV であり、このときでは、コルゲート周期数 50 および 20 の場合ともにマイクロ波出力が得られている。コルゲート周期数が多くなると発振スタート電圧が低くなる原因としては、コルゲート周期数が多くなるにともない電子ビームと遅波導波管との相互作用が持続する時間・距離が長くなりマイクロ波発振が起こりやすくなるためであると考えられる。



(カソード直径 28mm)

Fig.5-4-6 マイクロ波出力のビーム電圧依存性



(カソード直径 24mm)

Fig.5-4-7 マイクロ波出力のビーム電圧依存性

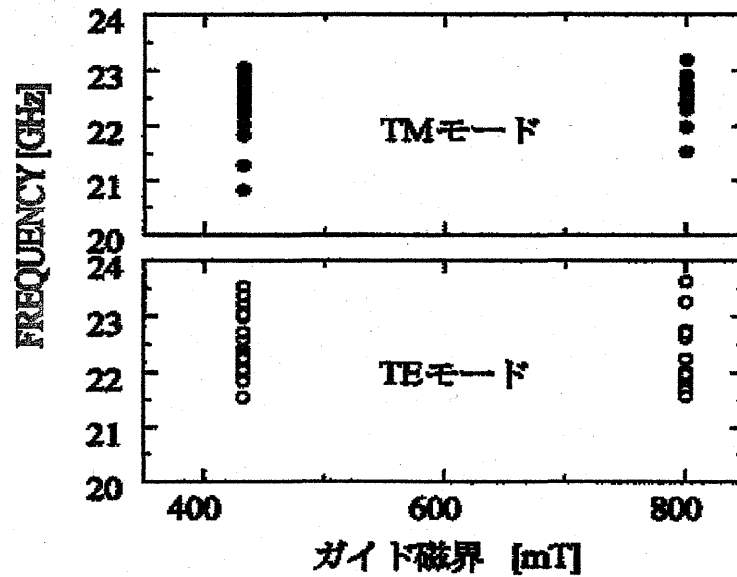


Fig.5-4-8 マイクロ波周波数の測定結果

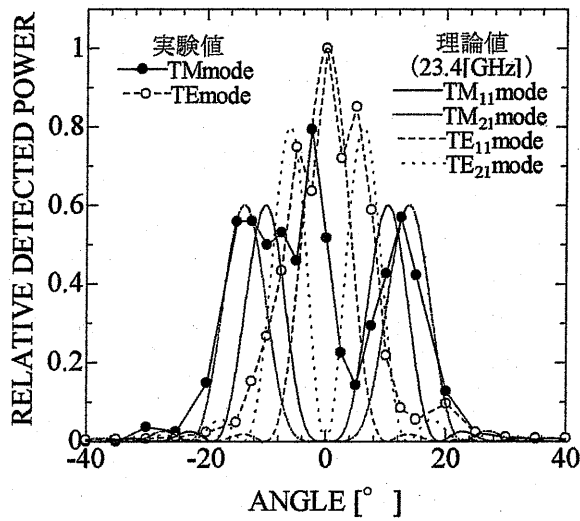
発振周波数測定とマイクロ波放射パターン

Fig.5-3-4 の測定系で発振周波数スペクトルの測定を行った結果を、Fig.5-4-8 に示す。測定結果としては、ガイド磁場による影響はあまり見られず、20~24GHzでの発振が多く見られ、K-bandでの発振であった。

円筒導波管からマイクロ波が放射されると、マイクロ波の発振モードによって固有の放射パターンが観測され。これを利用して発振しているマイクロ波の発振モードを推測する。測定実験においては、マイクロ波出力はバラツキがあるため、各点で複数回測定してその平均をとった。カソード径 ϕ 28mm、コルゲート周期数20でガイド磁場433mT、801mTの時のものをFig.5-4-9、Fig.5-4-10に示す。周期数を50としたものをFig.5-4-11、Fig.5-4-12に示す。図の横軸はマイクロ波出力窓からの角度、縦軸はそれぞれの最大値で規格化した検波電力である。

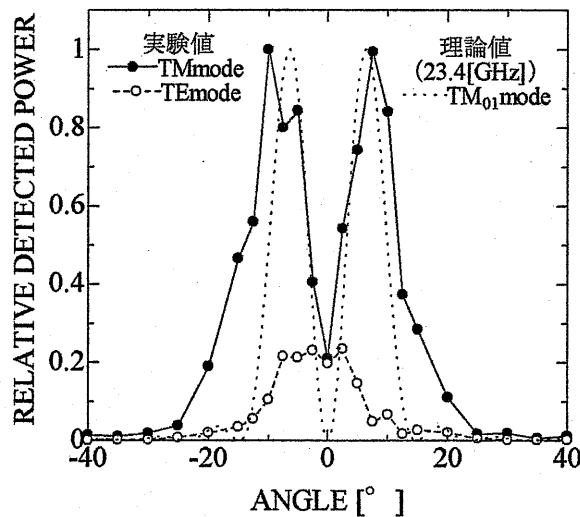
全体的に見てガイド磁場を強くすると、TMモード成分がTEモード成分に比べて大きくなり、軸対称モードの特徴が現れる。ガイド磁場433mTの場合ではTM、TEモード成分が混在しており、軸方向モード数 $m=1$ 、もしくは $m=2$ のハイブリッドモードでの発振であると考えられるのに対し、ガイド磁場801mTの場合では、TMモード成分がTEモード成分を大きく上回っており、 TM_{01} モードに近い発振であると考えられる。

また、コルゲート周期数を多くすると放射パターンは複雑になる傾向があった。これは、コルゲート周期数が多くなると電子ビームと導波管モードとの相互作用が強くなり、多数のモードでマイクロ波が励起される可能性が高まるためであると考えられる。



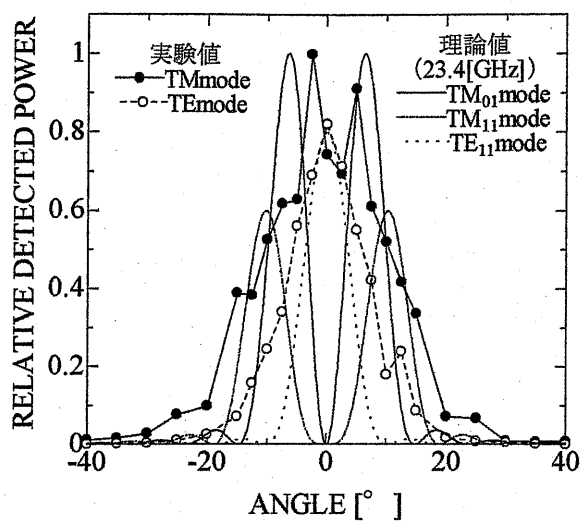
(周期数 20, 磁場 433mT)

Fig.5-4-9 マイクロ波出力の放射パターン測定結果



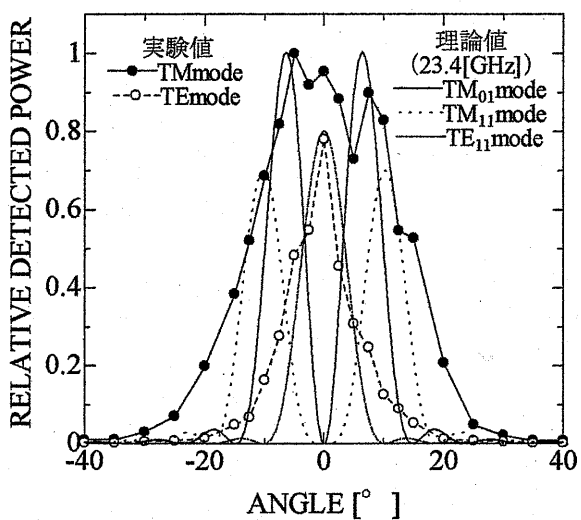
(周期数 20, 磁場 801mT)

Fig.5-3-10 マイクロ波出力の放射パターン測定結果



(周期数 50, 磁場 433mT)

Fig.5-3-11 マイクロ波出力の放射パターン測定結果



(周期数 50, 磁場 801mT)

Fig.5-3-12 マイクロ波出力の放射パターン測定結果

5.5 Q-band ミリ波発生実験

ここでは Q-Band 遅波導波管を使用し、ガイド磁場、カソードの口径、遅波導波管の波形周期数等を変化させ、ミリ波出力、発振ミリ波の周波数、放射パターンを測定することによって、モードの推定や、出力の変化などを観測した。以下に結果を示す。

発振ミリ波出力のカソード口径依存性

Fig.5-5-1 に Q-Band 遅波導波管を使用した場合の発振ミリ波のガイド磁場依存性をカソードの口径をパラメータとして、まとめたものを示す。波形導波管 5 セクションで実験を行った。図を見ると、ガイド磁場 158mT まではミリ波発振は見られない。ミリ波の発振は、ガイド磁場 158mT 以降で見られ、約 250mT や 341mT 付近でピーク値をとり、それ以降ではミリ波出力はあまり変わらなかった。使用したカソードの口径別に考えると、 $\phi 22\text{mm}$ のカソードでは発振が起らず、発振が観測されたのは $\phi 23\text{mm}$ のカソードからであった。 $\phi 24\text{mm}$ 以上のカソードでは出力にあまり大きな違いは見られなかった。これは、K-Band SWS によるマイクロ波発生と同じ傾向である。

波形導波管の周期数によるマイクロ波出力の違い

ここでは、波形導波管の周期数を変えることによって、ミリ波出力がどのように変化するかを測定した。波形導波管の周期数によるミリ波出力のガイド磁場依存性の測定結果を Fig.5-5-2 に示す。K-Band マイクロ波発生と同様に、ミリ波発振はコルゲート周期数 10 の時には見られず、20 以上が必要であった。また、コルゲート周期数 20, 30, 40 と増やすのにもない、発振が始まるガイド磁場は下がる傾向を示した。コルゲート周期数 20 の時の出力は、それ以上の長さ比べ、あまり大きくならなかった。ガイド磁場を強くすると、導波管の周期数による出力の変化はあまり見られず、検波出力の平均値は 50W 付近のところで落ち着いた。

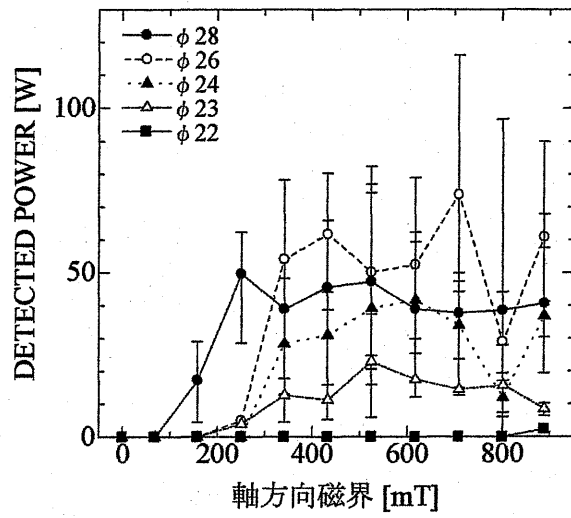


Fig.5-5-1 発振ミリ波出力のカソード径依存性 (Q-Band SWS)

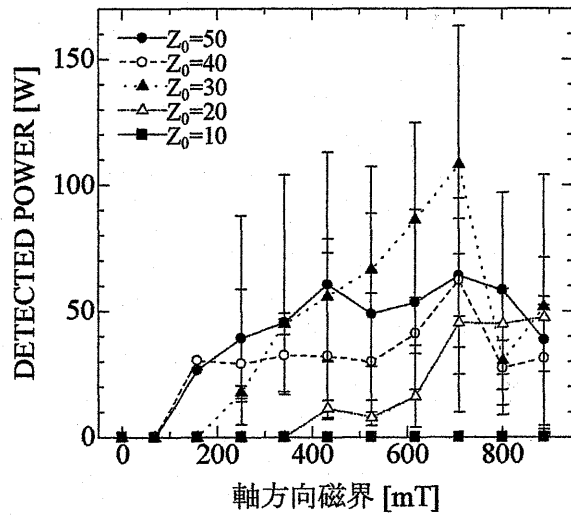


Fig.5-5-2 発振ミリ波出力の磁場依存性 (Q-Band SWS)

発振周波数の測定

K-Bandでの測定と同じ遅延線路を用いた測定系で、Q-Bandのミリ波出力の周波数測定を行った。カソード径 $\phi 28\text{mm}$ 、コルゲート周期数20のものを Fig.5-5-3 に示す。測定結果としては、30~50GHzでの発振が多く見られ、Q-bandでの発振であると言える。また、低磁場で周波数の高い発振が観測されたが、不安定であった。低磁場領域における高次モードでの動作について検討する必要がある。全体的にK-bandマイクロ波発振実験の場合に比べ出力波形の時間的変化が複雑であり、測定が困難であった。特に、マッチング抵抗 48Ω の場合に波形が複雑であった。PFL後に取り付けてあるマッチング抵抗が大きい時には、発振周波数のバラツキが大きい。カソード印加電圧が長くなるため、発振パルス幅が長くなる。また、複数のパルス発振も観測された。このため遅延線を前と後のパルス時間の遅れを用いる周波数測定の精度が落ちたのが、原因の一つとして挙げられる。マッチング抵抗を小さくするとパルス幅は短く、また単パルスでの発振が多くなり、測定精度が上がり、発振周波数が一定になりやすいという傾向があった。カソード径の違いによる発振周波数の変化は特に見られなかったが、カソード径 $\phi 24\text{mm}$ の場合の方が発振周波数のばらつきが少なかった。

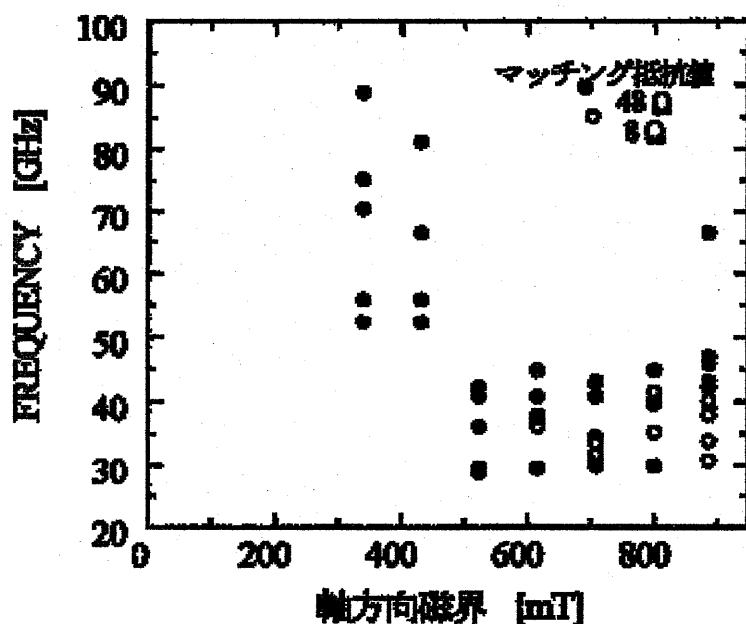


Fig.5-5-3 発振ミリ波出力の周波数測定結果 (Q-Band SWS)

発振周波数測定でバラツキが大きくなった原因として、波形が複雑であったことのほかに遅延線の特徴が考えられる。今回用いた遅延線のカットオフ周波数は 17.369GHz であるため、Q-band での測定では本質的に精度が悪くなる。さらに、遅延時間が K-band での発振の場合の遅延時間に比べて短く、遅延時間の少しの違いが計算上で大きな違いとなり、このような結果になったと考えられる。また、マッチング抵抗を小さくした場合の方が、発振周波数が安定する原因としては、マッチング抵抗を小さくするとそこに流れ込む電流が多くなり、電子ビーム強度が低下することによって波形導波管との相互作用が弱まり、励起されるモードが少なくなることも考えられる。

ミリ波出力の放射パターン測定

K-Band での放射パターン測定に対応した測定実験を、Q-Band ミリ波発生に対しても行った。今回も、各点で複数回測定してその平均をとった。カソード径 $\phi 28\text{mm}$ 、コルゲート周期数 20 でガイド磁場 433mT、801mT の時のものを Fig.5-5-4、Fig.5-5-5 に示す。また、同じ条件でコルゲート周期数 50 としたものを、Fig.5-5-6、Fig.5-5-7 に示す。図の横軸はミリ波出力窓からの角度、縦軸は最大値で規格化した検波電力である。コルゲート周期数 20 では、ガイド磁場 433mT と 801mT のいずれの場合も、 TM_{01} モードに近い放射パターンが得られた。しかし、コルゲート周期数 50 の場合では、角度 0° 付近でピークをとる放射パターンが測定されるようになる。周期数 20 の場合と比較して TE モード成分が大きくなり、 TE_{11} モードに近い放射指向性が得られた。TM モード成分、TE モード成分が同じような形になった。K-Band マイクロ波発生と同様に、回転角方向モード数 $m=1$ や $m=2$ 、あるいはさらに大きな m のハイブリッドモードでの発振と考えられる。また、コルゲート周期数を多くすると放射パターンは複雑になることも、K-Band マイクロ波発生と同様であった。

コルゲート周期数 50 でマッチング抵抗を 8Ω とした場合、すなわち発振パルス幅を短くした場合、発振マイクロ波出力の TM モード成分が TE モード成分に比べ大きくなり、放射パターンは TM_{01} モードに近いものになる。このことから、発振が起こっているパルスの初めと終わり、発振モードが変化している可能性もある。発振特性のさらなる研究が必要である。

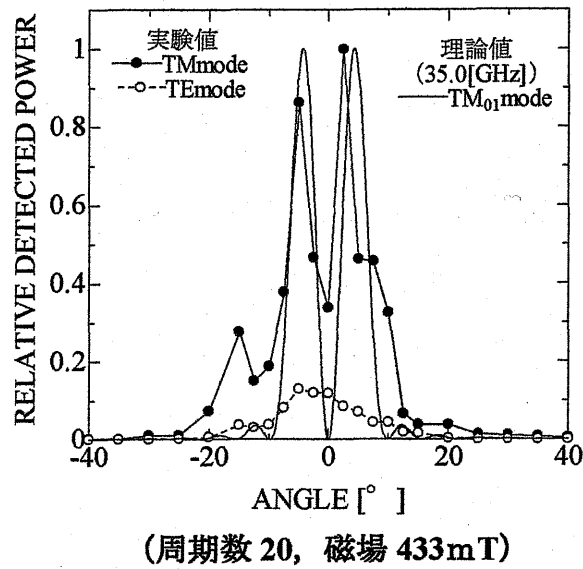


Fig.5-5-4 ミリ波出力の放射パターン測定結果 (Q-Band SWS)

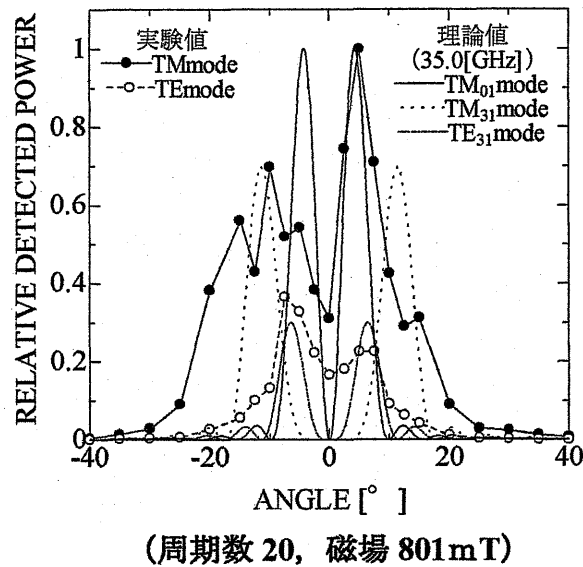
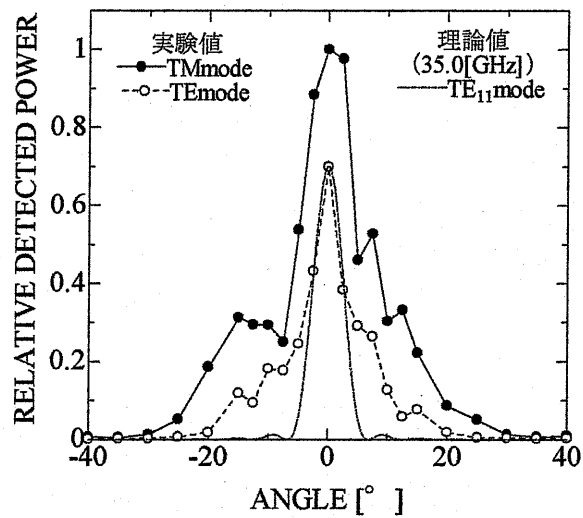
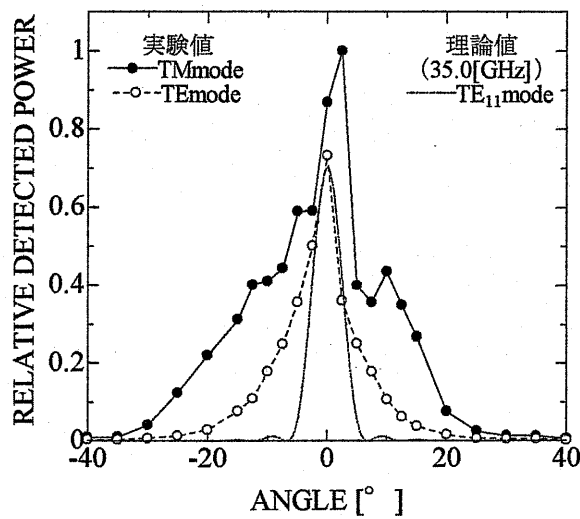


Fig.5-5-5 ミリ波出力の放射パターン測定結果 (Q-Band SWS)



(周期数 50, 磁場 433mT)

Fig.5-5-6 ミリ波出力の放射パターン測定結果 (Q-Band SWS)



(周期数 50, 磁場 801mT)

Fig.5-5-7 ミリ波出力の放射パターン測定結果 (Q-Band SWS)

6 まとめ

相対論的電子ビームを用いる大電力ミリ波・マイクロ波源には、ジャイロトロン、自由電子レーザ、相対論的マグネトロン、後進発振器等があるが、数 100A クラス以上の電流を用いて、しかもミリ波帯まで高周波数化した実験が報告されているのは後進波発振器の改良型である相対論的回折発振器（表面波発振器とも呼ばれる）および多重波動チェレンコフ発振器のみである。チャンピオンデータを目的とした実験であり、電圧 1MV 以上、電流は 10kA 以上と大変なものである。これらの発振機構の解明には、ビームと電磁波のチェレンコフ相互作用を基礎としたモデルが提案されてきた。サイクロトロン運動の効果は、速波（ファースト）サイクロトロン相互作用をチェレンコフ相互作用の補助的なものとして取り入れたモデルとなっている。本研究では、異常ドップラー効果による遅波サイクロトロンメーザ動作の効果をも、セルフコンシステントなモデルにより自然な形で取り入れることに成功している。解析の途中で取り入れる仮定あるいは簡単化のためのモデルの整合性についての議論は必要とせず、遅波サイクロトロン相互作用とチェレンコフ相互作用を同時に扱える理論である。今さら「線形解析とは」との批判も聞かれるが、物理の本質を理解する上で、非常に重要なステップと言える。「線形」か「非線形」が問題になるのは、このステップを踏んだ後である。計算機の性能が格段に良くなっているが、大変重要で大きな効果である遅波サイクロトロンメーザ動作を無視した理論は、例えば「非線形効果を扱える理論」でも、本質から外れる危険がある。重要なことは、物理や原理を理解し、対象とする現象の本質を理解することである。遅波サイクロトロン相互作用も含めて、ビームと電磁波の相互作用を正しく評価する必要がある。今後、それぞれの相互作用に対応する結合係数を妥当な形に定式化し、非線形解析に発展させることも視野に入れている。

遅波サイクロトロンメーザ動作では、軸方向入射のビームでありながら、異常ドップラー効果という機構を使うことで、軸方向の運動エネルギーを電磁波に変換できる。相互作用相手の電磁波の回転成分が非常に重要となる可能性がある。実は、この事実はつい最近まで、我々も見落としていた。気が付いてしまえば、当たり前のようであるが、もともと軸方向のみの運動エネルギーしか持たない初期電子ビームを扱っていたため、固有モード自身は m の奇数次の項は無く、 m の符号には影響されない。しかし、現実にはビームと真空の境界が存在する。これが本質と思われる。今後の研究が必要である。本研究の理論的解析からは、このように遅波サイクロトロンメーザ動作が有望な相互作用であったことが示され、新たな展開の可能性（それも非常に有望な可能性である）が見えてきた。今後の理論的発展が楽しみである。

本研究の実験では、ミリ波・マイクロ波源で重要となる大口径遅波導波管を用いている。K-Band と Q-Band の発振出力をまとめたものが Fig.6-1 である。Q-Band 大口径波形導波管を使用した高周波数化の実験では、周波数が約 35GHz のミリ波出力が得られた。発振電力は最大で 30 kW 程度以下（発振効率は約 0.4%）で、K-Band のマイクロ波出力に比べ約 1/4 程度であった。上図の $Pf^2 \approx 2.0 \times 10^4 \text{ kW} \cdot \text{GHz}^2$ の曲線上にある。1MV 程度の相対論的ビームでは、この値は、さらに高いものである。今後、100kV 以下と比較的低い弱い相対論的電子ビームで、 Pf^2 を上げていくことが必要になる。また、Q-Band のミリ波発生実験において、低磁場で周波数の高い高次モードでの発振が観測されたが、不安定であった。高次モードでの動作には、低磁場領域における安定化動作を検討する必要がある。

大口径遅波電磁波源では遅波導波管壁の近傍に存在するエバネッセント波、つまり表面波が非常に重要な働きをする。しかし、ビームはそのエバネッセント波と相互作用するため、管壁すぐ近くを伝搬する必要がある。実は、これが遅波電磁波源を高周波数化する場合の障害になっていた。電子ビームを管壁近くに集中的に伝搬させることは、低電流では比較的容易に実現できるが、大電流では非常に困難となる。

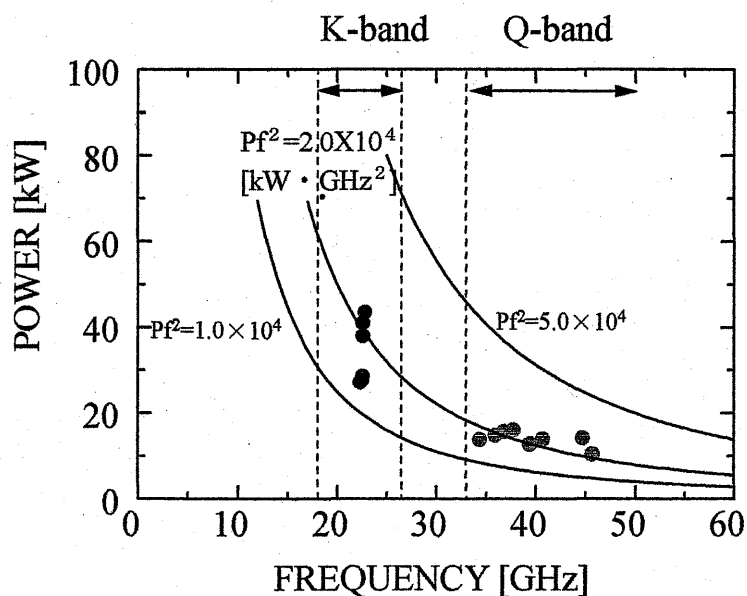


Fig.6-1 K-Band と Q-Band における発振出力のまとめ

特に、ミリ波帯・サブミリ波帯大電力電磁波源では、管壁から離れた電子ビームをエバネッセント波といかに効率よく結合させるかの問題が未解決である。一つの解決策として、多重波動チェレンコフ発振器が提案されているが、ビーム電流は10kA以上で電圧は1MV以上である。実用化に有利な100kV程度以下、100A程度の領域での解決策が必要である。本研究では、Q-Band(約40GHz)で、遅波サイクロトロンメーザ動作が利用できる可能性を示している。磁場が弱い領域でその効果は大きく、実用化には非常に有利と言える。実験で観測された非軸対称モードの発振は、チェレンコフ相互作用のみでは説明困難で、遅波サイクロトロン相互作用の効果を正しく評価する必要がある。また、現在も続けている磁場ゼロでの、チェレンコフ・サイクロトロン縮重相互作用によるマイクロ波発生も、今後さらに理論的、実験的に調べていく予定である。この機構との関連も含め、今後、更に実験的な研究を進めていく必要性を感じている。実用面での利点に加え、チェレンコフ相互作用、速波・遅波サイクロトロン相互作用およびそれらが縮態した相互作用の研究であり、物理的にも興味のあるテーマである。

本研究で調べ報告した遅波サイクロトロンメーザやチェレンコフ相互作用による後進波発振器の実験は、100Aレベルの大電流電子ビームを用いているが、100kV以下と比較的低エネルギーなため、要求されるパルス電源は比較的小型と言える。プラズマ物理・応用分野としても今後の発展が期待できるテーマといえる。

謝辞

本研究を進めるに当たり、筑波大学の長照二教授、新潟大学の石田昭男教授、文部省核融合科学研究所の渡辺二太教授、福井大学の出原敏孝教授、渡辺理博士、宇都宮大学の湯上登助教授および金沢大学の鎌田啓一助教授には有益なご助言とご指摘を頂きました。深く感謝致します。実験の遂行、データ解析、数値計算等に当たっては、次の学生諸氏に負うところが大きいです。新潟大学大学院自然科学研究科の山崎星征氏、吉田涼氏、山下雄市郎氏、鈴木善高氏、岩井誠氏、小宮山清文氏、酒井将和氏。ここに感謝致します。

添付資料 (学会誌・国際会議等)

- 1) "Normal Modes and Their High-Frequency Instabilities in Unbounded and Bounded Systems with Magnetized Electron Beam" Watanabe Osamu and Kazuo Ogura, Journal of Plasma and Fusion Research SERIES, Vol.3 (2000) pp.601~604.
- 2) "Slow Wave Electron Cyclotron Maser Utilizing Periodically Corrugated Waveguide" Kazuo OURA, Osamu WATANABE and Daizo KAMIYAMA, Transactions of Fusion Technology, Vol.39, no.1T (2001) pp.320~323.
- 3) "Self-Consistent Linear Analysis of Slow Cyclotron and Cherenkov Instabilities" O. Watanabe, K. Ogura, T. Cho and Md. R. Amin, Physical Review E, Vol.63, no.5-1 (2001) pp.056503-1~056503-9.
- 4) "Study on Open Gradient Magnetic Separation Using Multiple Magnetic Field Sources" S.Fukui, H.Nakajima, A.Ozone, M.Hayatsu, M.Yamaguchi, T.Sato, H.Imaizumi, S.Nishijima and T.Watanabe, IEEE Transactions on Applied Superconductivity, Vol.22, no.1 (2002) pp.959-962.
- 5) "Experiment on Oversized Backward Wave Oscillator Driven by Weakly Relativistic Electron Beam" K. Ogura, Y. Sakurai, R. Yoshida, O. Watanabe and Y. Yamazaki, Japan-US Joint Technical Meeting on Plasma Science and Technology and Pulsed Power Technology, (August 5.6, 2002, Kailua-Kona, Hawaii, USA) PST-02-67/PPT-02-24.
- 6) "Cherenkov and Slow Cyclotron Instabilities of Non-Axisymmetric Modes in Periodic Slow Wave Structure" O. Watanabe, Y. Yamashita, H. Yamazaki and K. Ogura, Japan-US Joint Technical Meeting on Plasma Science and Technology and Pulsed Power Technology, (August 5.6, 2002, Kailua-Kona, Hawaii, USA) PST-02-68/PPT-02-25.