

## 混成木集合の実現について

正員 仙石 正和† 正員 黒部 貞一†  
正員 小川 吉彦†

## On the Realization of a Set of Hybrid Trees

Masakazu SENGOKU†, Member, Teichi KUROBE†, Member  
and Yoshihiko OGAWA†, Member

あらまし 回路行列式は回路の特性を示す重要な回路関数である。回路網解析で用いられる節点アドミタンス行列、閉路インピーダンス行列の行列式はそれぞれの回路のグラフに含まれるすべての木の枝アドミタンス積の和、補木の枝インピーダンス積の和として表わされる。このため木集合、補木集合からもとのグラフを求める問題は位相幾何学的合成問題の重要なものの一つである。小文は木、補木の一般化概念としてその両者の性質を有する混成木を定義し混成木集合の基本的性質を調べ、それらを用いて一つの混成木集合からもとのグラフの基本カットセット行列を求める一方法を示した。

**Summary** An important problem in the topological synthesis is the realization of a set of trees or a set of co-trees. In this paper, a hybrid tree having properties of both a tree and a co-tree is defined. And some properties of the set of hybrid trees of a graph are investigated and a procedure for finding a cut-set matrix of the graph which realizes a given set of hybrid trees is presented. This problem corresponds to that of synthesizing the network when the determinant of the hybrid matrix of a network is given.

## 1. まえがき

線形回路網を位相幾何学的立場から考察する場合、重要な問題として解析問題と合成問題がある。解析問題は必要な回路関数をその回路の構造から、その回路の素子値を媒介変数とした式（位相幾何学的公式）で表わすことである。逆に合成問題は与えられた位相幾何学的公式からそれを満足する回路構造を実現することである。ここでは注目する回路関数として回路行列式を考える。回路網解析において良く知られている節点解析、閉路解析で用いられる節点方程式の節点アドミタンス行列、閉路方程式の閉路インピーダンス行列の行列式は二端子インピーダンスまたはアドミタンスの分母多項式（また回路の固有多項式でもあり回路の特性を示す重要な回路関数である）であり、それぞれその回路網のグラフに含まれるすべての木の枝アドミタンス積の和、補木の枝インピーダンス積の和で表わ

される<sup>(1)</sup>。また二端子インピーダンス、またはアドミタンスの分子の多項式もそれぞれその入力端子の枝を短絡または開放した回路の回路行列式であり、その回路（短絡、開放した回路）のグラフに含まれるすべての木の枝アドミタンス積の和、補木の枝インピーダンス積の和として表わされる。このことからグラフの木集合、補木集合を求めることが解析問題の一つとなり、これに対する合成問題は木集合、補木集合からもとのグラフを実現する問題となる。ここではこの合成問題について述べる。

木集合の実現問題は S.L. Hakimi<sup>(2)</sup> によって行なわれ、実現のための二、三の必要条件と実現の一方法が示された。また木集合の属性を示す木グラフの部分グラフ（ローカルグラフ）からもとのグラフを実現する方法は岸、梶谷<sup>(3)</sup>によってなされた。これらはいずれもグラフの木に注目したものである。これに対して木、補木の一般化概念として木、補木両方の性質を有する混成木 (hybrid tree) を定義するとその特別の場合として木、補木が定義できる。そのため木、補木と同様に回路行列式(ハイブリッド行列の行列式に対応)

† 北海道大学工学部電子工学科, 札幌市  
Faculty of Engineering, Hokkaido University, Sapporo-shi,  
Japan 060  
論文番号: 昭 47-43 [A-13]

を混成木の枝イミタンス積の総和として表わすならば混成木集合の実現問題は回路行列式（アドミタンス次元の枝，インピーダンス次元の枝両方を含む）からもとの回路を求める合成問題となる．小文は一つのグラフの部分グラフとして混成木を定義し混成木集合の性質について考察し，それをを用いて一つのグラフの混成木集合からもとのグラフの基本カットセット行列を求める一方法について述べたものである．

## 2. 混成木の定義

ここで取り扱うグラフは連結，無向とする．グラフ  $G$  の枝集合  $E$  を二つの部分  $E_y, E_z$  に分割し， $E = E_y \cup E_z, E_y \cap E_z = \phi$  とする．

【定義】  $\epsilon_z, \bar{\epsilon}_z, (\bar{\epsilon}_z = E_z - \epsilon_z)$  をそれぞれ  $G$  のカットセット，閉路を含まない  $E_z$  の任意の部分集合とする． $\bar{\epsilon}_z$  を短絡除去， $\epsilon_z$  を開放除去したグラフの  $E_y$  の枝からなる木を  $t_y$  とするとき， $\epsilon_z \cup t_y$  からなる部分グラフを  $G$  の  $E_y$  に関する混成木 ( $ht$ ) という．

この定義から  $\bar{\epsilon}_z \cup t_y = t$  ( $t$  はグラフ  $G$  の木) となっており，混成木は  $ht = t \oplus E_z$  と表わされる ( $\oplus$  はリングサム)．このことから混成木  $ht$  とはグラフ  $G$  の木  $t$  の  $E_z$  に含まれる枝をその  $E_z$  に関する補集合で置き換えたものといえる．グラフ  $G$  の混成木の集合を  $HT$  とすると，

$$HT = \{ht | ht = t \oplus E_z, t \in T\} \quad (1)$$

またこれと双対の関係で  $ht = \bar{t} \oplus E_y$  ( $\bar{t}$  はグラフ  $G$  の補木) となり， $HT$  はつぎのようになる．

$$HT = \{ht | ht = \bar{t} \oplus E_y, \bar{t} \in CT\} \quad (2)$$

ただし  $T, CT$  はそれぞれグラフ  $G$  の木，補木集合である．式 (1), (2) から  $E_z = \phi, E_y = \phi$  のとき混成木集合  $HT$  はそれぞれ木集合  $T$ ，補木集合  $CT$  に一致する．

## 3. 混成木集合の基本的性質

一般に混成木集合  $HT$  の要素 ( $ht$ ) は同一の枝数からなっていない．可分グラフでその最大非可分部分の枝を  $E_y$  または  $E_z$  と置くと  $HT$  は同数枝の要素からなる．

【性質 1】 非可分グラフにおいては，混成木集合  $HT$  の要素がすべて同数の枝からなるのは  $HT$  が木または補木集合に一致するときである．（証明略）

混成木集合  $HT$  の要素をその要素に含まれる枝数に従って類別する．たとえば  $k$  個の枝からなる混成木を集めて  $hT_k$  で表わす． $HT$  の中で最大枝数，最少

枝数からなる混成木の部分集合をそれぞれ  $hT_m, hT_l$  と表わすことにする．

【性質 2】  $hT_{k+1}$  または  $hT_{k-1}$  が存在する場合  $hT_k$  は存在しない．

（証明） グラフ  $G$  の階数を  $\rho$  とし， $E_z = \{e_{z1}, e_{z2}, \dots, e_{zn}\}$  とする． $n=1$  のとき， $HT = HT \binom{e_{z1}}{1} \cup HT \binom{e_{z1}}{0}$  と表わされる．ここで  $A \binom{e}{1}$ ， $A \binom{e}{0}$  はそれぞれ  $e$  を含む， $e$  を含まぬ  $A$  の部分集合である．定義から  $HT \binom{e_{z1}}{1} = hT_{\rho+1} = hT_m$ ， $HT \binom{e_{z1}}{0} = hT_{\rho-1} = hT_l$  となりこの性質は成立する． $n-1$  まで，つまり  $E_z = \{e_{z1}, e_{z2}, \dots, e_{zn-1}\}$  まで成立したとして，その混成木集合を  $HT'$  とする．任意の  $k$  に対する  $HT'$  の部分集合を  $hT'_k$  とすると  $hT'_k = hT'_k \binom{e_{zn}}{1} \cup hT'_k \binom{e_{zn}}{0}$ ， $e_{zn}$  を新たに  $E_z$  に加えると  $hT'_k \binom{e_{zn}}{1}$  の要素は  $hT_{k-1}$ ， $hT'_k \binom{e_{zn}}{0}$  の要素は  $hT_{k+1}$  の要素となる．また  $hT'_{k+2} (hT'_{k+2} \subset HT')$  の要素も  $hT_{k+1}$ ， $hT_{k+3}$ ， $hT_{k-1}$ ， $hT_{k-3}$  に含まれることになり， $hT_{k+1}$ ， $hT_{k-1}$  が存在する場合  $hT_k$  は存在しない．ただし  $hT_{k+1}$ ， $hT_{k+3} \subset HT$ ．（証明終）

さてグラフ  $G$  の一つの混成木を  $ht_0$  とし， $e_i, e_j$  をグラフ  $G$  の枝とすると，

$$ht_0 \oplus \{e_i, e_j\} = ht' \quad (3)$$

の演算によって得られる  $ht'$  がグラフ  $G$  の混成木の場合，この演算を初等混成木変換， $ht_0$  を基準混成木と呼ぶ．以下枝集合  $E$  の分割 ( $E_y, E_z$ ) を固定して考える．基準混成木  $ht_0$  に対する補混成木（または混成補木，なぜならば，混成補木  $= E_z \oplus \bar{t}_0$  とする．ただし  $\bar{t}_0$  は木  $t_0$  の補木． $E_z \oplus \bar{t}_0 = E_z \oplus (E \oplus t_0) = E \oplus (E_z \oplus t_0) = E \oplus ht_0 = E - ht_0 = \overline{ht_0}$ ）を  $\overline{ht_0}$  とする． $\epsilon_y, \epsilon_z$  および  $\bar{\epsilon}_y = E_y - \epsilon_y, \bar{\epsilon}_z = E_z - \epsilon_z$  を  $ht_0 = \epsilon_y \cup \epsilon_z, (\epsilon_y \cap \epsilon_z = \phi), \overline{ht_0} = \bar{\epsilon}_y \cup \bar{\epsilon}_z, (\bar{\epsilon}_y \cap \bar{\epsilon}_z = \phi)$  と定義し，

$$\epsilon_y = \{e_{y1}, e_{y2}, e_{y3}, \dots, e_{yp}\} \quad (4)$$

$$\epsilon_z = \{e_{z1}, e_{z2}, e_{z3}, \dots, e_{zq}\} \quad (5)$$

$$\bar{\epsilon}_y = \{e_{y1}, e_{y2}, e_{y3}, \dots, e_{yp}\} \quad (6)$$

$$\bar{\epsilon}_z = \{e_{z1}, e_{z2}, e_{z3}, \dots, e_{zq}\} \quad (7)$$

とする．式 (3) の演算において  $e_i, e_j$  が  $\epsilon_y, \bar{\epsilon}_y, \epsilon_z, \bar{\epsilon}_z$  のいずれに属するかによって  $ht'$  の枝数が異なる． $ht_0 \in hT_k$  とするとつぎの場合がある．

$$(i) \quad e_i \in \bar{\epsilon}_y, e_j \in \epsilon_y \text{ または } e_i \in \epsilon_y, e_j \in \bar{\epsilon}_y \text{ のとき} \\ ht' \in hT_k \quad (8)$$

$$(ii) \quad e_i \in \bar{\epsilon}_z, e_j \in \epsilon_z \text{ または } e_i \in \epsilon_z, e_j \in \bar{\epsilon}_z \text{ のとき} \\ ht' \in hT_k \quad (9)$$

$$(iii) \quad e_i \in \epsilon_z, e_j \in \epsilon_y \text{ または } e_i \in \epsilon_y, e_j \in \epsilon_z \text{ のとき} \\ ht' \in hT_{k-2} \quad (10)$$

(iv)  $e_i \in \bar{\varepsilon}_y, e_j \in \bar{\varepsilon}_z$  または  $e_i \in \bar{\varepsilon}_z, e_j \in \bar{\varepsilon}_y$  のとき  
 $ht' \in hT_{k+2}$  (11)

この結果からつぎの性質を得る.

[性質 3] 混成木集合  $HT$  内の一つの混成木  $ht_0$  (基準混成木,  $ht_0 \in hT_k$ ) から初等混成木変換によって得られる混成木は  $hT_k$  と  $hT_{k+2}$  ( $hT_{k+2} = hT_{k+2} \cup hT_{k-2}$ ) の中に含まれる.

この初等混成木変換は  $G$  の木  $t_0 = \varepsilon_y \cup \bar{\varepsilon}_z$  を基準とする初等木変換に対応するものである. 初等混成木変換式 (3) の操作で, 式 (8) は  $t_0$  の枝  $e_j (\in \varepsilon_y)$  と  $e_j$  に関する基本カットセットに含まれる枝  $e_i (\in \bar{\varepsilon}_y)$  とを交換 (または  $e_i (\in \bar{\varepsilon}_y)$  と,  $e_i$  と  $t_0$  の枝からなる基本閉路に含まれる枝  $e_j (\in \varepsilon_y)$  とを交換) する初等木変換を示している. 式 (9) は  $t_0$  の枝  $e_i (\in \bar{\varepsilon}_z)$  と  $e_i$  に関する基本カットセットに含まれる枝  $e_j (\in \varepsilon_z)$  とを交換 (または  $e_j (\in \varepsilon_z)$  と,  $e_j$  と  $t_0$  の枝からなる基本閉路に含まれる枝  $e_i (\in \bar{\varepsilon}_z)$  とを交換) する初等木変換を示している. 式 (10) は  $t_0$  の枝  $e_j (\in \varepsilon_y)$  と  $e_j$  に関する基本カットセットに含まれる枝  $e_i (\in \varepsilon_z)$  とを交換 (または枝  $e_i (\in \varepsilon_z)$  と,  $e_i$  と  $t_0$  の枝からなる基本閉路に含まれる枝  $e_j (\in \bar{\varepsilon}_y)$  とを交換) する初等木変換に対応しているが,  $e_i \in \varepsilon_z, e_j \in \varepsilon_y$  であるので  $ht_0$  から  $e_i, e_j$  を除く操作となっている. 式 (11) は  $t_0$  の枝  $e_j (\in \bar{\varepsilon}_z)$  と  $e_j$  に関する基本カットセットに含まれる枝  $e_i (\in \bar{\varepsilon}_y)$  とを交換 (または枝  $e_i (\in \varepsilon_y)$  と,  $e_i$  と  $t_0$  の枝からなる基本閉路に含まれる枝  $e_j (\in \bar{\varepsilon}_z)$  とを交換) する初等木変換に対応しているが,  $e_i \in \bar{\varepsilon}_y, e_j \in \bar{\varepsilon}_z$  であるので  $ht_0$  に  $e_i, e_j$  を加える操作となっている. 実際の演算はつぎのようになる.

[性質 4] 基準混成木  $ht_0$  に対して,  $HT(e_{y_j}), (1 \leq j \leq p)$ :  $\bar{\varepsilon}_z$  を含まず  $\varepsilon_y$  との非共通枝が  $e_{y_j}$  である混成木の集合,  $HT(e_{z_j}), (1 \leq j \leq s)$ :  $\varepsilon_y$  を含み  $\bar{\varepsilon}_z$  との共通枝が  $e_{z_j}$  である混成木の集合,  $HT(e_{y_j}), (1+j \leq r)$ :  $\varepsilon_y$  を含み  $\bar{\varepsilon}_y$  との共通枝が  $e_{y_j}$  である混成木の集合,  $HT(e_{z_j}), (1 \leq j \leq q)$ :  $\bar{\varepsilon}_y$  を含まず  $\varepsilon_z$  との非共通枝が  $e_{z_j}$  である混成木の集合, とすると,

- (a)  $HT(e_{y_i}) = \{e_{y_i}\} * \left( \frac{\partial}{\partial Q_{z_i j}} \cup \int dQ_{y_i j} \right) ht_0$
- (b)  $HT(e_{z_j}) = \{e_{z_j}\} \times \left( \frac{\partial}{\partial Q_{z_j}} \cup \int dQ_{y_j} \right) ht_0$
- (c)  $HT(e_{y_j}) = \{e_{y_j}\} \times \left( \frac{\partial}{\partial P_{y_j}} \cup \int dP_{z_j} \right) ht_0$
- (d)  $HT(e_{z_i}) = \{e_{z_i}\} * \left( \frac{\partial}{\partial P_{y_i j}} \cup \int dP_{z_i j} \right) ht_0$

ここで,  $Q_{ij} = e_{y_{ij}}$  の両端の節点を分割するカットセット,  $Q_{ij} = Q_{y_{ij}} \cup Q_{z_{ij}}, Q_{y_{ij}} \cap Q_{z_{ij}} = \phi, Q_{y_{ij}} \subset \bar{\varepsilon}_y, Q_{z_{ij}} \subset \varepsilon_z, Q_j = e_{z_j}$  の両端の節点を分割するカットセット,  $Q_j = Q_{y_j} \cup Q_{z_j}, Q_{y_j} \cap Q_{z_j} = \phi, Q_{y_j} \subset \bar{\varepsilon}_y, Q_{z_j} \subset \varepsilon_z, P_j = e_{y_j}$  の両端を結ぶ道,  $P_j = P_{y_j} \cup P_{z_j}, P_{y_j} \cap P_{z_j} = \phi, P_{y_j} \subset \varepsilon_y, P_{z_j} \subset \bar{\varepsilon}_z, P_{ij} = e_{z_{ij}}$  の両端を結ぶ道,  $P_{ij} = P_{y_{ij}} \cup P_{z_{ij}}, P_{y_{ij}} \cap P_{z_{ij}} = \phi, P_{y_{ij}} \subset \varepsilon_y, P_{z_{ij}} \subset \bar{\varepsilon}_z$  である (注: グラフ  $G$  の部分グラフ  $g_i$  からなる集合を  $A, B$  とすると,  $A \times B = \{g_i \cup g_j | g_i \in A, g_j \in B\}$ .  $A * B = \{g_i \oplus g_j | g_i \in A, g_j \in B\}$ ,  $\partial g_i \partial g_j = g_i \oplus e(e \in g_i$  のとき), または  $\phi(e \notin g_i$  のとき),  $\int g_i de = g_i \cup e(e \in g_i$  のとき), または  $\phi(e \notin g_i$  のとき), ただし  $e \in E$ . 詳しくは文献 (4), (5) 参照).

(証明) (a) の  $HT(e_{y_i})$  はグラフ  $G$  から  $\bar{\varepsilon}_z$  と  $e_{y_{ij}}$  以外の  $\bar{\varepsilon}_y$  を短絡除去し,  $e_{y_{ij}}$  を開放除去してきたグラフ  $G'$  の混成木集合  $HT'$  に対応している.  $e_{y_{ij}}$  の両端の節点を  $v_1, v_2$  とすると,  $G'$  の混成 2-木  $HT'_{v_1, v_2}$  は  $\varepsilon_y \cup \bar{\varepsilon}_z$  が  $G$  の木であることから明らかに  $\varepsilon_z$  のみである. ところで, 一般に混成木集合  $HT$  と混成 2-木集合  $HT_{v_i, v_j}$  との間には,  $HT = (\partial / \partial Q_{z_{v_i v_j}} \oplus \int dQ_{y_{v_i v_j}}) HT_{v_i, v_j}$ , ただし  $Q_{v_i v_j} = Q_{z_{v_i v_j}} \cup Q_{y_{v_i v_j}}, (Q_{z_{v_i v_j}} \subset E_z, Q_{y_{v_i v_j}} \subset E_y)$  は  $v_i, v_j$  を分割するカットセット, という関係<sup>(4)</sup>がある. これを用いて,  $v_1, v_2$  を分割するカットセットを  $Q_{ij} = Q_{y_{ij}} \cup Q_{z_{ij}}, (Q_{y_{ij}} \subset \bar{\varepsilon}_y, Q_{z_{ij}} \subset \varepsilon_z)$  とすると  $G'$  の混成木集合  $HT'$  は

$$HT' = \left( \frac{\partial}{\partial Q_{z_{ij}}} \oplus \int dQ_{y_{ij}} \right) HT'_{v_1, v_2}$$

$$= \left( \frac{\partial}{\partial Q_{z_{ij}}} \cup \int dQ_{y_{ij}} \right) \varepsilon_z,$$

$$\left( \because \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial Q_{z_{ij}}} \cap \int \varepsilon_z dQ_{y_{ij}} = \phi \right).$$

ゆえに,  $HT(e_{y_i}) = \{e_{y_i}\} * \varepsilon_y \times HT'$ .  $\varepsilon_y \times \varepsilon_z = \varepsilon_y \cup \varepsilon_z = ht_0$  に注意して,

$$HT(e_{y_i}) = \{e_{y_i}\} * \left( \frac{\partial}{\partial Q_{z_{ij}}} \cup \int dQ_{y_{ij}} \right) ht_0$$

(b) についても同様に証明される. (c), (d) は (a), (b) の双対な関係であり証明<sup>(6)</sup>は省略. (証明終)

この初等混成木変換 (a), (b) または (c), (d) の繰り返しによって  $ht_0$  から任意の混成木を得ることができる<sup>(6)</sup>ことから,

[性質 5]  $hT_l, hT_m (l < m)$  が存在すれば,  $hT_{l+2}, hT_{l+4}, \dots, hT_{m-2}$  も必ず存在する.

この性質 5 と性質 2 より, 混成木集合  $HT$  をつぎのように類別することができる.

$$HT = \{hT_l, hT_{l+2}, \dots, hT_{m-2}, hT_m\} \quad (12)$$

さて性質4の演算(a),(b)は任意の $e_{yij}, e_{zj}$ (可分枝でないとき)に対して常に可能であり, 明らかに

$$HT(e_{yij}) \cap HT(e_{zik}) = \phi \quad (j \neq k) \quad (13)$$

$$HT(e_{zj}) \cap HT(e_{zk}) = \phi \quad (j \neq k) \quad (14)$$

の関係が成立する. 式(4),(7)から $\varepsilon_y = \{e_{y1}, e_{y2}, \dots, e_{yip}\}$ ,  $\bar{\varepsilon}_z = \{e_{z1}, e_{z2}, \dots, e_{zs}\}$ であったから, 初等混成木変換式(3)によって得られる混成木は少なくとも $p+s=\rho$ 個( $\rho$ : グラフ $G$ の階数)存在する. 同様に(c),(d)の演算は任意の $e_{yij}, e_{zj}$ に対して常に可能であり,

$$HT(e_{yij}) \cap HT(e_{yk}) = \phi \quad (j \neq k) \quad (15)$$

$$HT(e_{zj}) \cap HT(e_{zik}) = \phi \quad (j \neq k) \quad (16)$$

の関係が成立する. また(6),(5)から $\bar{\varepsilon}_y = \{e_{y1}, e_{y2}, \dots, e_{yr}\}$ ,  $\varepsilon_z = \{e_{z1}, e_{z2}, \dots, e_{zs}\}$ であったから初等混成木変換式(3)によって得られる混成木は少なくとも $r+s=\mu$ 個( $\mu$ : グラフ $G$ の零度)存在する. この結果と性質3から $HT$ の部分集合 $hT_k, hT_{k+2}$ の中には少なくとも $\rho$ 個( $\rho \geq \mu$ ) (可分枝を含まぬとき) または $\mu$ 個( $\rho \leq \mu$ )の混成木が含まれなければならない. しかし非可分グラフの場合, 初等混成木変換式(3)で用いられる枝対 $\{e_i, e_j\}$ の集合を $E_p$ とし, その任意の一つの要素を $\{e_i, e_j\}$ とすると, 非可分であるので $e_i$ または $e_j$ を共通とする枝対が $E_p$ の中に必ず一つ以上存在する. また $E_p$ の中には性質4の(a),(b)または(c),(d)からわかるように $G$ のすべての枝が含まれる. そのため $E_p$ の中には少なくとも(枝の数-1)個の枝対が含まれる. つまり式(3)の初等混成木変換によって得られる混成木の数は少なくとも( $ht_0$ を含めて) $\rho+\mu$ (=枝の数)存在する(詳しくは文献(3)). ゆえに性質3から,

[性質6] 非可分グラフでは, 混成木集合 $HT$ の式(12)の類別において $hT_k$ と $hT_{k+2}$ , 特に $k=m$ または $l$ のときはそれぞれ $hT_m, hT_{m-2}$ または $hT_l, hT_{l+2}$ に少なくとも枝の数に等しい混成木が含まれなければならない.

これらの性質は混成木集合実現の必要条件である.

#### 4. 混成木集合の実現について

ある一つの混成木集合からもとのグラフを実現する一つの方法は, その混成木集合からもとのグラフのカットセット行列または閉路行列を見出すことである. ここではカットセット行列を見出す一方法について述べる.

性質4の(a),(b)において,  $\varepsilon_y \cup \bar{\varepsilon}_z$ はグラフ $G$

の一つの木であるから $Q_{ij}$ は木 $\varepsilon_y \cup \bar{\varepsilon}_z$ の $e_{yij}$ に関する基本カットセットであり,  $Q_j$ は $e_{zj}$ に関する基本カットセットである. また初等混成木変換の操作で

$$\text{式(8)は } HT(e_{yij}) \text{ の } \{e_{yij}\} * \int ht_0 dQ_{yij} \quad (17)$$

$$\text{式(9)は } HT(e_{zj}) \text{ の } \{e_{zj}\} * \frac{\partial ht_0}{\partial Q_{zj}} \quad (18)$$

$$\text{式(10)は } HT(e_{yij}) \text{ の } \{e_{yij}\} * \frac{\partial ht_0}{\partial Q_{zj}} \quad (19)$$

$$\text{式(11)は } HT(e_{zj}) \text{ の } \{e_{zj}\} * \int ht_0 dQ_{yij} \quad (20)$$

にそれぞれ対応している. このことからつぎの性質が得られる.

[性質7] 混成木集合 $HT$ の中の一つの基準混成木 $ht_0$ ( $ht_0 \in hT_k$ )と $hT_k, hT_{k+2}$ に含まれる混成木 $ht'$ とから,  $ht_0 \oplus ht'$ が二つの枝( $e_i, e_j$ )だけからなるものを選び, その二つの枝の対の集合を $E_p$ とする.  $E_p$ の中で $e_i(e_i \in \varepsilon_y$ または $e_i \in \bar{\varepsilon}_z)$ と,  $e_i$ と対になっているすべての枝は木 $\varepsilon_y \cup \bar{\varepsilon}_z$ の $e_i$ に関する基本カットセットである.

さて, 基本カットセット行列 $D$ をつぎのように分割する.

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon_y & \bar{\varepsilon}_z & \bar{\varepsilon}_y & \varepsilon_z \\ U_{11} & 0 & N_{11} & N_{12} \\ 0 & U_{22} & N_{21} & N_{22} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_y & \varepsilon_z \\ N_{11} & N_{12} \\ \bar{\varepsilon}_z & N_{21} & N_{22} \end{pmatrix} \quad (21)$$

ここで,  $U_{11}, U_{22}$ は単位行列,  $N$ は $D$ の主要部である. また, 枝対集合 $E_p$ は $hT_k, hT_{k-2}, hT_{k+2}$ から求めたものからなっており, それをそれぞれ $E_{pk}, E_{pk-2}, E_{pk+2}$ とする. つまり,  $E_p = E_{pk} \cup E_{pk-2} \cup E_{pk+2}$ とすると, 式(17)~(20)の関係から,  $N_{11}, N_{22}$ は $E_{pk}$ から,  $N_{12}, N_{21}$ はそれぞれ $E_{pk-2}, E_{pk+2}$ から求まる. その際, 与えられる条件によって多少の求め方の違いがあり, ここでは三つの場合について述べてゆく.

(i) 枝集合 $E$ の分割 $E = E_y \cup E_z$ ( $E_y \cap E_z = \phi$ ), 基準混成木 $ht_0$ , 枝対集合 $E_p$ が与えられた場合.

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= ht_0 - E_z, \quad \bar{\varepsilon}_y = E_y - \varepsilon_y, \quad \varepsilon_z = ht_0 - E_y, \\ \bar{\varepsilon}_z &= E_z - \varepsilon_z \end{aligned} \quad (22)$$

であり, また式(8)~(11), 性質3より

$$E_{pk-2} = \{(e_i, e_j) | (e_i, e_j) \subset ht_0, (e_i, e_j) \in E_p\} \quad (23)$$

$$E_{pk+2} = \{(e_i, e_j) | e_i \notin ht_0, e_j \notin ht_0, (e_i, e_j) \in E_p\} \quad (24)$$

$$E_{pk} = E_p - (E_{pk-2} \cup E_{pk+2}) \quad (25)$$

となるから式(21)のように $\varepsilon_y, \bar{\varepsilon}_z$ を行に,  $\bar{\varepsilon}_y, \varepsilon_z$ を

列に取って性質 7 を用いて  $E_{pk}$  から  $N_{11}, N_{22}$  を,  $E_{pk+2}$  から  $N_{21}, E_{pk-2}$  から  $N_{12}$  をつぎのように求める. つまり  $E_p$  内の枝対  $(e_i, e_j)$ ,  $e_i(e_j)\epsilon e_y$  (または  $e_i(e_j)\epsilon \bar{e}_z$ ) に対し  $e_i(e_j)$  行,  $e_j(e_i)$  列要素を 1 と置く. これを  $E_{pk}, E_{pk+2}, E_{pk-2}$  について行ない, 1 以外の要素を零と置く. 以上で行列  $N$  が得られ, カットセット行列  $D=[U_1N]$  となる ( $U_1$  は単位行列).

(ii) 基準混成木  $ht_0$  と  $E_p$  が与えられた場合 ( $E_y, E_z$  の分割不明の場合).

式 (13), (14) を考慮して, つぎのようにカットセット行列を求めることができる.

[手順 1]  $E_p, ht_0$  から式 (23)~(25) によって,  $E_p$  を  $E_{pk}, E_{pk+2}, E_{pk-2}$  に分ける.

[手順 2]  $Et_0$  に含まれる枝を行,  $E_p$  内に含まれる枝で  $ht_0$  に含まれない枝を列とするように行と列を番号付した行列を考える.

[手順 3]  $E_{pk}$  に含まれる枝対  $(e_i, e_j)$  で  $e_i(e_j)\epsilon ht_0$  に対して  $e_i(e_j)$  行,  $e_j(e_i)$  列要素を 1 とする. この操作を  $E_{pk}$  のすべての枝対について行ない 1 でうめた以外の行列要素は零とする.

[手順 4]  $E_{pk-2}$  の枝対  $(e_i, e_j)$  に対し,  $e_i$  (または  $e_j$ ) が列に番号付されているときは  $e_j(e_i)$  行,  $e_i(e_j)$  列要素を 1 とする.  $e_i, e_j$  ともに行に番号付されているとき,  $e_j$  行 (または  $e_i$  行) で 1 の要素を持つ列と, その列に 1 の要素を持つすべての行 ( $e_j$  行 (または  $e_i$  行) を含めて) の行と列を交換する. もし  $e_j$  行 ( $e_i$  行) がすべて零要素の場合は  $e_j(e_i)$  を列に置き換える. この場合, 行と列の交換によって, 考えてきた行列の行数, 列数が変わるが, 枝対の関係は不変である. こうしてできた行列の  $e_i(e_j)$  行,  $e_j(e_i)$  列要素を 1 と置く. この操作を  $E_{pk-2}$  のすべての枝対に対して行ない 1 以外の行列要素は零とする.  $E_{pk-2} = \phi$  のときは手順 4' へ.

[手順 4']  $E_{pk+2}$  について手順 4 で "行" と "列" を入れ換えた操作を行なう.  $E_{pk+2} = \phi$  の場合は手順 5 へ.

[手順 5] 手順 4' までで得られた行列  $N'$  の行の枝全体を  $b$  とすると,  $b \oplus ht_0 = E_z, E_y = E - E_z$ , または  $b \oplus ht_0 = E_y, E_z = E - E_y$ , ( $E$  は  $E_p$  に含まれるすべての枝の集合) として  $E_y, E_z$  の分割が求まる. 式 (22) を用いて,  $e_y, \bar{e}_y, e_z, \bar{e}_z$  を求め, 式 (21) のように  $N'$  の行と列を並べ換えて  $N$  を得る. カットセット行列は  $D_1=[U_1N], D_2=[U_2N']$ , ここで  $U_1, U_2$  は  $p+s$  次, または  $r+q$  次の単位行列,  $N^t$  は  $N$  の

転置行列である.

[例題 1]\*

$HT = \{e_2, e_4, e_5, e_1e_2e_3, e_1e_2e_5, e_1e_3e_4, e_1e_3e_5, e_1e_4e_5, e_2e_3e_6, e_2e_3e_7, e_2e_4e_6, e_2e_4e_7, e_2e_5e_6, e_2e_5e_7, e_3e_4e_6, e_3e_4e_7, e_3e_5e_6, e_3e_5e_7, e_1e_2e_3e_4e_6, e_1e_2e_3e_4e_7, e_1e_2e_3e_5e_6, e_1e_2e_3e_5e_7, e_1e_3e_4e_5e_6, e_1e_3e_4e_5e_7\} = \{hT_1, hT_2, hT_3\}$ , を実現するカットセット行列を求める.

$ht_0 = \{e_1e_2e_3e_4e_6\}$ , ( $ht_0 \epsilon hT_1$ ) とすると,  $\overline{ht_0} = E - ht_0 = \{e_3e_7\}$ . ここでは  $hT_2, hT_3$  が与えられている (条件 (ii) 以上のものが与えられているため手順 1 は不要) ので,  $E_{p5}, E_{p3}$  はすぐ求まる.  $E_{p5} = \{e_3e_7, e_2e_5, e_3e_5\}$ ,  $E_{p7} = \phi$ ,  $E_{p3} = \{e_4e_6, e_2e_6, e_1e_4, e_1e_3, e_1e_2\}$ .

$$\begin{matrix} & e_5 & e_7 & & & & e_5 & e_7 \\ \text{手順 2} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} & \xrightarrow{(e_3e_7), (e_2e_5), (e_3e_5)} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{手順 4} & \begin{matrix} e_4 & e_5 & e_7 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{(e_1e_6)} & \begin{matrix} e_2 & e_3 & e_4 & e_7 \\ e_1 \\ e_5 \\ e_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{(e_1e_4), (e_1e_5), (e_1e_2)} N' = \begin{matrix} & e_2 & e_3 & e_4 & e_7 \\ e_1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ e_5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ e_6 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

手順 5  $\xrightarrow{\quad} b = \{e_1e_2e_6\}, E_z = b \oplus ht_0 = \{e_2e_3e_4e_6\}, E_y = \{e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7\} - E_z = \{e_1e_6e_7\}$ , 式 (22) より,  $e_y = \{e_1e_6\}, \bar{e}_y = \{e_7\}, e_z = \{e_2e_3e_4\}, \bar{e}_z = \{e_5\}$ . ゆえに

$$N = \begin{matrix} & e_7 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_1 & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ e_5 & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$D_1 = \begin{matrix} & e_y & \bar{e}_z & \bar{e}_y & e_z \\ e_1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$D_1$  を満足するグラフを図 1 に示す. 実線枝は  $E_y$  に含まれる枝, 破線枝は  $E_z$  に含まれる枝をそれぞれ示している. また  $E_z = \{e_1e_6e_7\}, E_y = \{e_2e_3e_4e_5\}$  とした場合, 同様にして  $e_y = \{e_2e_3e_4\}, \bar{e}_y = \{e_5\}, e_z = \{e_1e_6\}$ ,

\* 本文の例題では部分グラフを枝の積の形で表わしている.

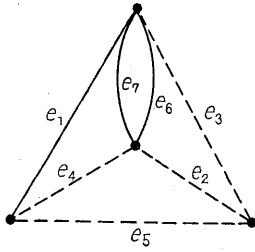


図1 例題1のグラフ  
Fig. 1—A hybrid graph of example 1.

$$\bar{e}_z = \{e_7\},$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} \bar{e}_z & e_y & e_z & \bar{e}_y \\ e_7 & e_2 & e_3 & e_4 & e_1 & e_6 & e_5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix} = [U_2 N^t]$$

となる。\$D\_2\$ は \$D\_1\$ と双対の関係にあり、\$D\_2\$ を満足するグラフは図1の双対グラフとなる。(例題1終)

(iii) \$E\_{pk}\$ と \$E\_{pk+2} (= E\_{pk+2} \cup E\_{pk-2})\$ が与えられた場合

この場合は \$E\_y, E\_z\$ の分割を基準混成木を用いずに求める問題である。

[手順1] \$E\_{pk}, E\_{pk+2}\$ に含まれる枝 \$E\$ を行と列に適当に番号付した行列を考え、\$E\_{pk}\$ の枝対 \$(e\_i, e\_j)\$ に対して、\$e\_i(e\_j)\$ 行、\$e\_j(e\_i)\$ 列要素を1とし他の要素を零とする行列を作る。

[手順2] (ii) の手順4, 手順4' を \$E\_{pk+2}\$ に適用して \$E\_{pk+2}\$ の枝対がすべて終わるまで続ける。

式(13), (14) からこの操作は常に可能であり、もし不可能の場合はその混成木集合は実現不可能となる。ここまでで得られた行列を \$N'\$ とする。

つぎに、初等混成木変換の操作式(8)~(11)からつぎのことがいえる。

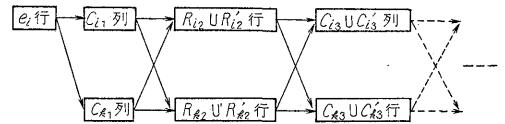
[性質8] \$E\_{pk}\$ の枝対は両枝とも \$E\_y\$ または \$E\_z\$ に含まれ、\$E\_{pk+2}\$ の枝対の一方の枝は \$E\_y\$ に、他方の枝は \$E\_z\$ に含まれる。

この性質を用いて \$E\$ を \$E\_y, E\_z\$ に分割することができる。

[手順3] \$N'\$ 内で \$E\_{pk}\$ より求めた行列の要素“1”を \$E\_{pk+2}\$ より求めた要素と区別するために“①”とする。

[手順4] \$N'\$ の任意の一つの行 \$e\_i\$ において、“①”の列(の集まり) \$C\_{i\_1}\$ は \$e\_i\$ と同種枝、“1”の列(の集まり) \$C\_{k\_1}\$ は異種枝である。

[手順5] \$C\_{i\_1}\$ 列で“①”の行(の集まり) \$R\_{i\_2}\$ は \$C\_{i\_1}\$ と同種枝、“1”の行(の集まり) \$R\_{k\_2}\$ は \$C\_{i\_1}\$ と異種枝、\$C\_{k\_1}\$ 列で“①”の行(の集まり) \$R\_{k\_2}'\$ は \$C\_{k\_1}\$ と同種枝、“1”の行(の集まり) \$R\_{i\_2}'\$ は \$C\_{k\_1}\$ と異種枝。ここで得られた \$R\_{i\_2} \cup R\_{i\_2}'\$ と \$R\_{k\_2} \cup R\_{k\_2}'\$ は異種枝である。つぎに \$(R\_{i\_2} \cup R\_{i\_2}'), (R\_{k\_2} \cup R\_{k\_2}') 行について、\$C\_{i\_1}, C\_{k\_1}\$ 列と同様(列を行に置き換えた操作)の操作を行ない \$(C\_{i\_3} \cup C\_{i\_3}'), (C\_{k\_3} \cup C\_{k\_3}') 列を得る。この操作を \$N'\$ の行と列がすべて分類されるまで続ける。これを図式で示すとつぎのようになる。



この結果 \$E\_y, E\_z\$ は、

$$E_y \text{ (または } E_z) = e_i \cup C_{i_1} \cup \left\{ \bigcup_{j=2,4,6,\dots} (R_{ij} \cup R_{ij}') \cup C_{ij+1} \cup C_{ij+1}' \right\}$$

$$E_z \text{ (または } E_y) = C_{k_1} \cup \left\{ \bigcup_{j=2,4,6,\dots} (R_{kj} \cup R_{kj}') \cup C_{kj+1} \cup C_{kj+1}' \right\}$$

として求める。この \$E\_y, E\_z\$ の分割は初等混成木変換の連続変換性<sup>(6)</sup>から必ず可能である(ただし、可分グラフの場合はその成分(最大非可分部分)ごとに枝を分類しなければならない)。

[手順6] 手順5で求めた \$E\_z\$ と \$N'\$ の行の枝の全体 \$b\$ とから基準混成木 \$ht\_0\$ は、\$ht\_0 = b \oplus E\_z\$ で求まる。\$ht\_0, E\_y, E\_z\$ と式(22)より \$e\_y, \bar{e}\_y, e\_z, \bar{e}\_z\$ を求め \$N'\$ の行と列を式(21)のように並べ換えて \$N\$ を得る。カットセット行列は、\$D\_1 = [U\_1 N], D\_2 = [U\_2 N^t]\$ となる。ここで \$U\_1, U\_2\$ は \$p+s\$ 次、または \$r+q\$ 次の単位行列、\$N^t\$ は \$N\$ の転置行列。

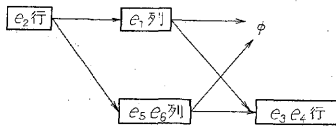
[例題2]

\$E\_{pk} = \{e\_3e\_5, e\_4e\_6, e\_1e\_2\}, E\_{pk+2} = \{e\_1e\_3, e\_1e\_4, e\_2e\_5, e\_2e\_6\}\$ からカットセット行列を求める。

[手順1] \$E = \{e\_1e\_2e\_3e\_4e\_5e\_6\}, E\_{pk}\$ の枝対 \$(e\_3e\_5), (e\_4e\_6), (e\_1e\_2)\$ から、

$$\begin{matrix} e_2 & e_5 & e_6 & & e_1 & e_5 & e_6 \\ e_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \xrightarrow[\substack{\text{手順2} \\ (e_1e_2), (e_1e_4), \\ (e_2e_5), (e_2e_6)}}]{\text{手順2}} & e_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ e_3 & & & & e_3 & & \\ e_4 & & & & e_4 & & \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\text{手順3}} \begin{matrix} e_1 & e_5 & e_6 \\ e_2 \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 1 \\ 1 & \textcircled{1} & 0 \\ 1 & 0 & \textcircled{1} \end{pmatrix} & \xrightarrow{\text{手順4,5}} & \end{matrix}$$



ゆえに  $\begin{cases} E_y = \{e_1, e_2\} \\ E_z = \{e_3, e_4, e_5, e_6\} \end{cases}$  または  $\begin{cases} E_y = \{e_3, e_4, e_5, e_6\} \\ E_z = \{e_1, e_2\} \end{cases}$

[手順 6]  $E_y = \{e_3, e_4, e_5, e_6\}$ ,  $E_z = \{e_1, e_2\}$  を用いると,  $b = \{e_2, e_3, e_4\}$  であるからから,  $ht_0 = b \oplus E_z = \{e_1, e_3, e_4\}$  となる. 式(22) から,  $\epsilon_y = \{e_3, e_4\}$ ,  $\bar{\epsilon}_y = \{e_5, e_6\}$ ,  $\epsilon_z = \{e_1\}$ ,  $\bar{\epsilon}_z = \{e_2\}$ . ゆえに,

$$N = \begin{array}{c|cc|c} & e_3 & e_4 & e_1 \\ \hline e_3 & 1 & 0 & 1 \\ e_4 & 0 & 1 & 1 \\ \hline e_2 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$D_1 = \begin{array}{c|cc|cc|c} & \epsilon_y & \bar{\epsilon}_z & \bar{\epsilon}_y & \epsilon_z & \\ \hline e_3 & e_4 & e_2 & e_5 & e_6 & e_1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

参考のために  $D_1$  を満足するグラフを図2に示す. また,  $E_y = \{e_1, e_2\}$ ,  $E_z = \{e_3, e_4, e_5, e_6\}$  の場合も同様に試みて求まり,

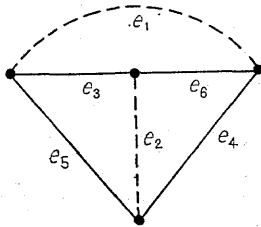


図2 例題2のグラフ  
Fig. 2—A hybrid graph of example 2.

$$D_2 = \begin{array}{c|cc|cc|c} & \bar{\epsilon}_z & \epsilon_y & \epsilon_z & \bar{\epsilon}_y & \\ \hline e_3 & e_4 & e_1 & e_2 & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} = [U_2 N']$$

となる.  $D_2$  と  $D_1$  は双対の関係にある. (例題2終)  
以上 (i), (ii), (iii) 三つの場合について混成木集合の実現法を述べた. これからいえることは, (i) の場合得られるグラフはすべて互いに2-同形なグラフであり, (ii), (iii) の場合得られるグラフはすべて互いに2-同形かまたはその双対グラフ(平面グラフの場合)となる, ということである. また枝集合  $E$  の分

割 ( $E_y, E_z$ ) が与えられない場合, 基準混成木  $ht_0$  または  $E_{pk}$  と  $E_{pk+2}$  の区別が与えられれば枝の分類ができ, 基準混成木  $ht_0$  が与えられた場合 (ii) の場合) 一つの枝の所属 ( $E_y$ かまたは  $E_z$ ) がわかれば一意的にカットセット行列を得ることができる.

### 5. むすび

回路行列式は回路の特性を示す回路関数の代表的なものである. これに対する位相幾何学的公式に用いられるグラフ上の概念木, 補木の一般化概念として混成木を定義し, 混成木集合の基本的性質を調べ, 一つの混成木集合が与えられた場合にその混成木集合を有するグラフの基本カットセット行列を求める一方法を示した. 混成木集合の実現問題は回路的には回路のハイブリッド行列の行列式からもとの回路を求める問題に相当するものである.

なお混成木集合  $HT$  はその中の要素(混成木)の数は木または補木集合と同じであるが, その要素に含まれる枝数の総和は両者より少ない場合があり, また4. で枝対集合  $E_p$  を求める際に  $HT$  の中で注目すべき部分集合が限定されるなど, 木集合, 補木集合を取り扱うより有利な場合がある.

謝辞 終わりに, 混成木に関してご助言, ご討論いただいた東京工業大学の岸源也教授, 梶谷洋司博士に感謝の意を表する次第である.

### 文 献

- (1) 大附, 石崎, 渡部: “回路網解析と位相幾何学的自由度”, 信学論 (A), 51-A, 6, p. 238(昭43-06).
- (2) S.L. Hakimi: “On the realization of a set of trees”, IRE Trans. CT-8, p. 11 (March 1961).
- (3) 岸, 梶谷: “部分木グラフからグラフを構成する一方法”, 信学会回路とシステム理論研究, CT 67-39 (1968-1) または, G. Kishi and Y. Kajitani: “On the realization of tree graphs”, IEEE Trans, CT-51, p. 271 (Sept. 1968).
- (4) 仙石, 黒部, 小川: “混成木とその性質”, 信学論 (A), 54-A, 7, p. 426 (昭 46-07).
- (5) 仙石, 小川, 黒部: “混合表現グラフの木, 補木集合の代数的関係とそれによる能動回路解析”, 信学会回路とシステム理論研究, CT 70-27 (1970-10).
- (6) S.L. Hakimi, W. Mayeda: “On coefficients of polynomials in network functions”, IRE Trans. CT-7, p. 40 (March 1960).
- (7) 仙石, 黒部, 小川: “混成木集合の実現について”, 信学会回路とシステム理論研究, CT 70-40 (1970-12).
- (8) S. Seshu and M.B. Reed: “Linear graphs and electrical networks”, Addison-Wesley Publishing Co. Reading, Mass. (1961).

(昭和 46 年 3 月 15 日受付)