論文・資料

UDC 513.712

混成木グラフについて

正員 仙石 正和†

On Hybrid Tree Graphs

Masakazu SENGOKU†, *Regular Member*

あらまし 木（tree），補木（cotree）はグラフ理論における重要な概念である．特に回路網理論においては位相幾何学的公式がその回路に対するグラフの木集合，補木集合などで表わされることから，木集合，補木集合の性質を調べることが重要な課題となり，木（補木）集合の要素間の関係を示す木（補木）グラフが定義されその性質が調べられてきた．これは木（補木）グラフを考えることにより木（補木）集合の性質を考察する上で便利なことが多いためである．本論文はこの木，補木グラフがその特別の場合として含まれるような混成木グラフを定義し，その性質を調べている．木グラフ，補木グラフとの違いは2種の枝を含むことであるが，技に正，負の符号を付けると混成木グラフは均衡していることが示される．さらに，その性質を用いた混成木グラフ実現の際の枝の類別法，実現の際得られるグラフの範囲などについてもふれている．これらの結果は木（補木）グラフの一般化および拡張である．

1．まえがき

木（tree），補木（cotree）はグラフ理論における重要な概念である．特に位相幾何学的立場から回路網を考察しようとする場合，回路の位相幾何学的公式がその回路に対応するグラフの木集合（補木集合）などで表わされる[1]ことから，木集合，補木集合の性質を調べることが一つの重要な課題となっている．R. L. Cummins[2]は木集合の要素間の関係を表わす木グラフ（tree graph）を定義しその性質を調べた．そして，その後木グラフ（補木グラフ）に関して種々の性質が調べられてきた[3],[4],[5]．これは木（補木）集合の性質を調べる上で木（補木）グラフを考えると便利な場合が多いためである．

小文は木グラフ，補木グラフがその特別の場合として含まれるような混成木グラフを定義し，その二，三の性質について述べたものであり，木グラフ（補木グラフ）の一般化および拡張理論である．

2．混成木グラフの定義

ここで取り扱うグラフ$G=(V, E)$，（V：節点集合，E：枝集合）は連結，無向とする．周知のように木および補木はそれぞれグラフの閉路およびカットセットを用いて定義される[6]．すなわち木は極大無閉路集合であり，補木は極大無カットセット集合である．そこで閉路とカットセット両方を用いて次のように定義される混成木（hybrid tree）[7]なる概念を考える（文献(7)の混成木の定義は閉路，カットセットの他に木なる語を含んだ表現であるが，ここでは閉路とカットセットのみによる表現にしている）．

混成木：グラフGの枝集合Eを二分割し，$E=E_y\cup E_z$，$E_y\cap E_z=\phi$とする．$E_z=\varepsilon_z\cup\bar{\varepsilon}_z$，$\varepsilon_z\cap\bar{\varepsilon}_z=\phi$とし，$\varepsilon_z$，$\bar{\varepsilon}_z$ はそれぞれGのカットセット，閉路を含まぬものとする．ε_zを開放除去，$\bar{\varepsilon}_z$を短絡除去してできるグラフG_yはE_yの枝からなっており，G_y において$E_y=\varepsilon_y\cup\bar{\varepsilon}_y$，$\varepsilon_y\cap\bar{\varepsilon}_y=\phi$とし，$\varepsilon_y$，$\bar{\varepsilon}_y$をそれぞれ G_y の閉路，カットセットを含まぬようにしたとき$\varepsilon_y\cup\varepsilon_z$（$=ht$）からなる部分グラフを$G$の E_y に関する混成木という．

この定義において$E_y\neq\phi$，$E_z=\phi$のとき$ht=\varepsilon_y$はGの極大無閉路集合となり（ε_yは閉路を含まず，$\bar{\varepsilon}_y$（$=E-\varepsilon_y$）がカットセットを含まぬように選んであるから[9]）Gの木となる．また，$E_y=\phi$，$E_z\neq\phi$のとき$ht=\varepsilon_z$ はGの極大無カットセット集合となり（ε_zはカットセットを含まず$\bar{\varepsilon}_z$（$=E-\varepsilon_z$）は閉路を含まぬように選んであるから）Gの補木となる．このことから混成木はその特別の場合として木，補木を含むことになる．以後の議論ではEの分割（E_y，E_z）は

†北海道大学工学部電子工学科，札幌市
Faculty of Engineering, Hokkaido University, Sapporo-shi, 060 Japan
論文番号：昭 49-190［A-65］

固定して考えることとし，上記の定義を式で示すとつぎのようになる[7]．すなわち，Gの混成木集合をHTとすると，

$$HT=\{ht \mid ht=t \oplus E_z,\ \ t \in T\} \tag{1}$$
$$=\{ht \mid ht=\bar{t} \oplus E_y,\ \ \bar{t} \in CT\} \tag{2}$$

（ここでT，CTはそれぞれGの木集合，補木集合である）

となる．またHTをその要素の枝数によってつぎのように類別することができる[8]．

$$HT=\{hT_m,\ hT_{m-2},\ \cdots,\ hT_{l+2},\ hT_l\} \tag{3}$$

ただし，$hT_n=\{ht \mid ht \in HT,\ \ |ht|=n\}$

$hT_n \neq \phi$　$(n=l,\ l+2, \cdots,\ m)$

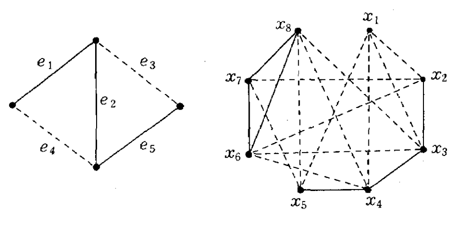
（$|g|$は部分グラフgの枝の数を示す）

〔定義〕 混成木グラフ$HT_g=(X,\ B)$：混成木集合HTの要素（混成木）を節点に対応させ，

$$ht_l=ht_n \oplus \{e_i,\ e_j\}$$
$$(ht_l, ht_n \in HT,\ \ e_i, e_j \in E)$$

の関係にある混成木（ht_l）の節点x_lと混成木（ht_n）の節点x_nを無向枝$b_k=(x_l,\ x_n)$で結んでできるグラフを混成木グラフ$HT_g=(X,\ B)$，（$b_k \in B$，x_l，$x_n \in X$）という．ただし，$B=P \cup N$，$P \cap N=\phi$とし，$|ht_l|=|ht_n|$のとき$b_k=(x_l,\ x_n) \in P$，$|ht_l| \neq |ht_n|$のとき$b_k=(x_l,\ x_n) \in N$とする．（定義終）

混成木グラフHT_gには並列枝を含まない（$\because ht_i \neq ht_j$，$i \neq j$）ので枝を単に（x_i，x_j）と表わすことにする．つぎに例によって混成木グラフを説明する．図1(a)の混成グラフを考える．



(a) 混成グラフ　　(b) 混成木グラフ

図1　混成グラフと混成木グラフ
Fig.1-A hybrid graph and a hybrid tree graph.

$E=\{e_1\ e_2\ e_3\ e_4\ e_5\}$，$E_y=\{e_1\ e_2\ e_5\}$，$E_z=\{e_3\ e_4\}$とすると，混成木集合$HT$はつぎのようになる．

$$HT=\{e_1\ e_2\ e_3\ e_4\ e_5,\ e_1\ e_2\ e_4,\ e_1\ e_4\ e_5,\ e_1\ e_3\ e_5,\ e_2\ e_3\ e_5,\ e_1,\ e_2,\ e_5\}$$
$$=\{ht_1,\ ht_2,\ ht_3,\ ht_4,\ ht_5,\ ht_6,\ ht_7,\ ht_8\}$$
$$=\{hT_5,\ hT_3,\ hT_1\}$$

この混成木集合HTの混成木グラフは図1(b)のようになる．ここで実線枝はPの枝，破線枝はNの枝で，

$$P=\{(x_2,\ x_3), (x_3,\ x_4), (x_4,\ x_5), (x_6,\ x_7), (x_6,\ x_8), (x_7,\ x_8)\}$$
$$N=\{(x_1,\ x_2), (x_1,\ x_3), (x_1,\ x_4), (x_1,\ x_5), (x_2,\ x_6), (x_2,\ x_7), (x_3,\ x_6), (x_3,\ x_8), (x_4,\ x_6), (x_4,\ x_8), (x_5,\ x_7), (x_5,\ x_8)\}$$

である．

さて，$HT_g=(X,\ B)$において，$B=P \cup N$，$P \cap N=\phi$としたが，Pに属する枝を“正の枝”（positive edge），Nに属する枝を“負の枝”（negative edge）と呼ぶことにする．そのとき，混成木グラフおよび木（補木）グラフの定義[2]から明らかなように，混成木グラフ$HT_g=(X,\ B)=(X\ ;\ P,\ N)$の枝$P$，$N$の区別を無視し，すべて正の枝としたグラフは木（補木）グラフとなる．このことから，木（補木）グラフは混成木グラフの特別の場合と考えることができ，混成木グラフは木，補木グラフの一般化概念となる．

3. 混成木グラフの性質

2.において，木（補木）グラフは混成木グラフの特別の場合として定義できることが示された．そのため，木（補木）グラフの位相幾何学的性質はすべて混成木グラフが有することになる．さらにここでは混成木グラフ独特の性質を調べる．

3.1 混成木グラフの均衡性

混成木グラフ$HT_g=(X\ ;\ P,\ N)$の枝に符号を付けて考える．すなわち，Pに属する枝（正の枝）に正（＋），Nに属する枝（負の枝）に負（－）の符号を付けることにする．また，混成木グラフHT_gの道または閉路の符号をそれぞれの道または閉路に含まれる枝の符号の積で定義する．ただし，その積は表1の乗法表による．

表1　乗法表

	＋	－
＋	＋	－
－	－	＋

$s(x_i,\ x_j)$を枝（x_i，x_j）の符号とすると，図1(b)の混成木グラフの道（x_1，x_2），（x_2，x_3），（x_3，x_4）の符号は，$s(x_1,\ x_2) \times s(x_2,\ x_3) \times s(x_3,\ x_4)=(-)\times(+)\times(+)=(-)$となる．また，閉路（$x_1$，$x_2$），（$x_2$，$x_3$），（$x_3$，$x_4$），（$x_4$，$x_1$）の符

号は，$s(x_1, x_2) \times s(x_2, x_3) \times s(x_3, x_4) \times s(x_4, x_1) = (-) \times (+) \times (+) \times (-) = (+)$ となる．

次に，均衡グラフを次のように定義する[4,10]．

均衡グラフ：グラフ G のすべての閉路の符号が正ならば，このグラフは均衡しているといい，そのグラフのことを均衡グラフ（balanced graph）という．

さて，上述のように混成木グラフの枝に符号を付けると，つぎのような性質を得る．

〔定理２〕　混成木グラフ $HT_g = (X ; P, N)$ は均衡している．

（証明）　HT_g の任意の一つの閉路を $L = \{(x_{l_1}, x_{l_2}), (x_{l_2}, x_{l_3}), \cdots, (x_{l_k}, x_{l_1})\}$ とする．$ht_{l_i} \in hT_n$，$(1 \leq i \leq k-1)$ とすると，$ht_{l_{i+1}} = ht_{l_i} \oplus \{e_{j_i}, e_{j_{i+1}}\}$ で得られる $ht_{l_{i+1}}$ は hT_n か hT_{n+2} または hT_{n-2} に含まれる．つまり，$ht_{l_{i+1}} = ht_{l_i} \oplus \{e_{j_i}, e_{j_{i+1}}\}$ の演算によって ht_{l_i} から $ht_{l_{i+1}}$ が得られるが，こうして得られた $ht_{l_{i+1}}$ の属する混成木集合 HT の式(3)の類別による部分集合は hT_n かまたはせいぜいその前後（hT_{n+2}，hT_{n-2}）に移るだけである．hT_{n-2} に移ったとすると，その枝（x_{l_i}，$x_{l_{i+1}}$）の符号は負となる．ところで L は閉路であるので L の枝にはその両端の節点に対応する混成木が含まれる部分集合が hT_{n-2} から hT_n へ移るような枝も含まれなければならない．つまり，L の中には（$ht_{l_i} \in hT_n$，$ht_{l_{i+1}} \in hT_{n-2}$）の条件を満足する枝（$x_{l_i}$，$x_{l_{i+1}}$）の数と同数の（$ht'_{l_i} \in hT_{n-2}$，$ht'_{l_{i+1}} \in hT_n$）を満足する枝（$x'_{l_i}$，$x'_{l_{i+1}}$）が存在する．$ht_{l_{i+1}}$ が hT_{n+2} に移った場合も同様である．このことから閉路 L の中には N に含まれる枝が偶数個存在することになり，その符号は正となる．（証明終）

例えば，図１(b)の混成木グラフにおいて，どの閉路を考えてもその符号は正であることがわかる．ところで，混成木グラフ HT_g の一つの木 t の枝の符号が既知であるとする．t に対する補木の枝（$B - t$）を一つ t に加えると一つの閉路ができる．その閉路では加えた補木の一つの枝以外は木 t の枝であり，又，すべての閉路の符号が正であることから補木の符号が定められる．このことからつぎの系を得る．

〔系１〕　混成木グラフ HT_g の一つの木の枝の符号がわかれば，HT_g のすべての枝の符号がわかる．

（系終）

定理２において，混成木グラフは均衡しているという結果を得たが，この性質からつぎの定理[4,10]が得られる．

〔定理３〕　混成木グラフ $HT_g = (X ; P, N)$ の節点集合 X を二つの部分集合に分割，つまり $X = X^1 \cup X^2$，$X^1 \cap X^2 = \phi$ とし，$x_i \in X^1$，$x_j \in X^1$（または，$x_i \in X^2$，$x_j \in X^2$），$(i \neq j)$ のとき x_i，x_j 間の道の符号は正，$x_i \in X^1$，$x_j \in X^2$（または，$x_i \in X^2$，$x_j \in X^1$）のとき負とすることができる．

（証明）　X の部分集合 X^1 をつぎのように作る．任意の一点を取り X^1 に入れる．その点と負の道で結ばれていない点を X^1 に加える．更に X^1 に含まれる点と負の道で結ばれていない点を X^1 に加える．この操作を続けて，X^1 に含まれる点と負の道で結ばれていない点がなくなったとする．このとき X^1 の X に関する補集合を X^2 とする．X^1 の節点間の道の符号はすべて正，つまり X^1 の節点間の枝はすべて正の枝である．

$x_i \in X^1$，$x_j \in X^2$ の２点を考える．x_i と x_j の間の道の符号が正とする．この場合 x_j との道の符号が負である x_k（$\in X^1$）が少なくとも一つ存在するはずである．なぜならば，そうでないと x_j は X^1 に含まれることになるからである．この場合 $x_i \to x_j \to x_k$ という負の道が存在する．ところが x_i と x_k の間の道の符号はすべて正であったので（$\because x_i \in X^1$，$x_k \in X^1$）これは矛盾を生じ x_i と x_j 間の道の符号は負となる．つぎに，$x_i \in X^2$，$x_j \in X^2$ の２点を考える．節点 x_k（$\in X^1$）を考えると，x_i と x_k，x_j と x_k の間の道の符号はいずれも負である．定理２の混成木グラフ HT_g のすべての閉路の符号は正であることから，任意の２点間のすべての道は同じ符号をもつことに注意して，$x_i \to x_k \to x_j$ の道の符号が正であるので x_i と x_j 間のすべての道の符号は正となる．　　（証明終）

次に，この X の分割（X^1，X^2）と混成木集合 HT の式(3)の類別との関係を調べてみると次の定理が成立する．

〔定理３〕　HT の類別 $HT = \{hT_n, hT_{n-2}, \cdots, hT_l\}$ に対して，hT_n（$n = m, m-2, \cdots, l$）の任意の一つの要素を ht_i とし，ht_i に対する HT_g の節点 x_i が X^1 に含まれているとき，hT_n の要素に対応する HT_g のすべての節点は X^1 に含まれ，hT_{n+2}，hT_{n-2} の要素に対応するすべての節点は X^2 に含まれる．

（証明）　hT_n の任意の二つの要素を ht_i，ht_j とし，ht_i，ht_j に対応する HT_g の節点をそれぞれ x_i，x_j とすると，x_i と x_j の間の道の符号が正となることは定理１の証明と同様にして証明される．また，hT_{n+2}，hT_{n-2} の任意の要素をそれぞれ ht_k，ht'_k とし，それらに対応する HT_g の節点をそれぞれ x_k，x'_k とすると，同様に x_i と x_k，x_i と x'_k の間の道の符号は負と

なる．ゆえに定理２から明らかにこの定理は成立する．
（証明終）

この定理から$HT=\{hT_m,\ hT_{m-2},\ \cdots,\ hT_l\}$に対して，$hT_n$に対応する$HT_g$の節点の部分集合を$X_n$，（$n=m,\ m-2,\ l$）とすると，

$$X^1=\{X_m,\ X_{m-4},\ X_{m-8},\ \cdots\} \tag{4}$$

$$X^2=\{X_{m-2},\ X_{m-6},\ X_{m-10},\ \cdots\} \tag{5}$$

となる．たとえば，図１(b)の混成木グラフでは，

$$X^1=\{X_5,\ X_1\}=\{x_1,\ x_6,\ x_7,\ x_8\}$$

$$X^2=\{X_3\}=\{x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\}$$

となる．

3.2 混成木グラフの実現に関する考察

位相幾何学的合成問題として知られる木（補木）集合からもとのグラフを実現する問題（このとき木（補木）はもとのグラフのラベル付き枝で表現されている）に対して，ラベル付きの木（補木）は与えられずに単に木（補木）集合の要素間の関係だけからもとのグラフを実現しようとする問題が考えられる．G.Kishi, Y.Kajitani は木グラフの部分グラフ（ローカルグラフ）からもとのグラフを実現するアルゴリズムを示した[5]．ここではこれを混成木グラフに拡張した場合について考察する．混成木グラフと木（補木）グラフとは枝の種類が２種（PとN）と１種（P）である点を除いては同じであるから，混成木グラフ実現のアルゴリズムに対して，$P\neq\phi$，$N=\phi$とすれば木(補木)グラフのものとなる．そして，そのアルゴリズムの本質的な違いは与えられたP，Nからもとのグラフ$G=(V,\ E)$の枝集合Eの分割（E_y，E_z）を求める点にある．そこで，ここではその違いのみ述べることにする．

ht_0をHTの任意の一つの混成木（基準混成木）とし，$ht_0=\varepsilon_y\cup\varepsilon_z$，$\varepsilon_y\cap\varepsilon_z=\phi$，$\varepsilon_y\subset E_y$，$\varepsilon_z\subset E_z$，$\bar{\varepsilon}_y=E_y-\varepsilon_y$，$\bar{\varepsilon}_z=E_z-\varepsilon_z$とする．$ht_0$に対応する$HT_g$の節点を$x_0$とし，$x_0$から距離１にある点の集合を$X_0$，$(X_0\not\ni x_0)$とする．$X_0$に対応する$HT$の部分集合を$H_0$とし$ht_0$のローカル集合と呼ぶ．$X_0$の節点を含み，それらの節点を両端点とする枝からなるHT_gの部分グラフをx_0のローカルグラフと呼び$HT_{g_0}[H_0]$で表わす（これらの言葉は木グラフの場合と同じものを用いている）．HT_gの実現には$HT_{g_0}[H_0]$のみが必要（木グラフの場合と同様に証明される）であり，そのため$HT_{g_0}[H_0]$が与えられた場合について考えればよい．

$ht_0\in hT_k$とすると，$HT_{g_0}[H_0]$の節点X_0はhT_kに含まれる混成木と$hT_{k\pm2}$（$=hT_{k+2}\cup hT_{k-2}$）に含まれる混成木に対応する節点に分けられる．hT_k，$hT_{k\pm2}$に含まれる混成木に対応する節点をそれぞれX_0^k，$X_0^{k\pm2}$，（$X_0^k\cup X_0^{k\pm2}=X_0$，$X_0^k\cap X_0^{k\pm2}=\phi$）とする．定理３を用いてただちに次の定理が得られる．

〔定理４〕 ローカルグラフ$HT_{g_0}[H_0]$の節点集合X_0を二分割し，$X_0=X_0^a\cup X_0^b$，$X_0^a\cap X_0^b=\phi$ として，X_0^aの節点間およびX_0^bの節点間の道の符号を正，X_0^aとX_0^bの節点間の道の符号を負とするようにしたとき，$X_0^a=X_0^k$，$X_0^b=X_0^{k\pm2}$または$X_0^a=X_0^{k\pm2}$，$X_0^b=X_0^k$である．

（証明） $HT_{g_0}[H_0]$は混成木グラフHT_gの部分グラフであるので定理１から均衡しており，そのため定理２から，節点集合X_0を二分割し，$X_0=X_0^a\cup X_0^b$，$X_0^a\cap X_0^b=\phi$ として，X_0^aの節点間およびX_0^bの節点間の道の符号を正，X_0^aとX_0^bの節点間の道の符号を負とするようにできる．また，X_0は$ht_0\in ht_k$とすると，hT_kと$hT_{k\pm2}$に属する混成木に対応する節点だけしか含んでいない．そのため定理３から，$X_0^a=X_0^k$，$X_0^b=X_0^{k\pm2}$または$X_0^a=X_0^{k\pm2}$，$X_0^b=X_0^k$である．

（証明終）

この定理によって，$HT_{g_0}[H_0]$の節点のhT_kの混成木に対応する節点か，$hT_{k\pm2}$の混成木に対応する節点かの類別ができる．ここで，系１から$HT_{g_0}[H_0]$のすべての枝の符号は必要なく，$HT_{g_0}[H_0]$の一つの木の枝の符号だけが必要であることに注意すべきである．

それでは，X_0^aとX_0^bが求まった場合にもとのグラフG（$HT_{g_0}[H_0]$を含む混成木グラフHT_gを持つようなグラフ）の枝集合Eの分割をどのように求めるかについて簡単に述べておく．まず，$HT_{g_0}[H_0]$はその位相幾何学的構造とその中の一つの木の枝の符号のみが与えられたとする．

(1) $HT_{g_0}[H_0]$の節点に適当に名札を付け，その節点の集合を$X_0=\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$とする．そして，$X_0$の部分集合$X_0^a$をつぎのように作る．任意の一つの節点を選び$X_0^a$に入れる．$x_1$と正の道で（符号の与えられている木の枝をたどる道）結ばれているすべての節点をX_0^aに加える．X_0^aのX_0に関する補集合をX_0^bとする．

(2) $HT_{g_0}[H_0]$の任意の一つの枝$b_1=(x_{i_1},\ x_{j_1})$，（$i_1\neq j_1$，$1\leq i_1$，$j_1\leq n$）を選び，b_1に関する最大完全部分グラフ（b_1を含む完全グラフのすべての和）を求めこれをθ_1とする．次にθ_1に属さない任意の枝$b_2=(x_{i_2},\ x_{j_2})$，（$i_2\neq j_2$，$1\leq i_2$，$j_2\leq n$）を選び，b_2に関する最大完全部分グラフを求めこれ

をθ_2とする．この操作を続けてHT_{g_0}〔H_0〕のすべての枝がいずれかの最大完全部分グラフに属するようにしたときの最大完全部分グラフの集合を$A_1=\{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l\}$とする．つぎに，$A_1$の唯一の要素（完全部分グラフ）にだけ含まれるような節点のすべてを求めこれを$A_2=\{\theta_{l+1}, \theta_{l+2}, \cdots, \theta_m\}$とする（$A_2$の要素は唯一の節点からなる完全部分グラフ）．$A_1$と$A_2$の和集合をとって，$A=\{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l, \theta_{l+1}, \cdots, \theta_m\}$とする．（注意：この(2)の操作は木グラフ[5]の場合と同様であるため説明は省略）

(3) $X_0^k=X_0^a$，$X_0^{k\pm2}=X_0^b$と置く．m個の枝の集合$E=\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$を考え，枝対$(e_i, e_j)$，$(1\leq i, j\leq m)$の集合$E_{p_k}$，$E_{p_{k\pm2}}$をつぎのように作る．$A$の共通部分をもつ任意の二つの要素$\theta_{i_1}$，$\theta_{i_2}$，$(1\leq i_1, i_2\leq m)$を選び，$\theta_{i_1}$，$\theta_{i_2}$の共通部分である唯一の節点を$x_j$ $(1\leq j\leq n)$としたとき，$x_j\in X_0^k$であれば枝対(e_{i_1}, e_{i_2})をE_{p_k}，$x_j\in X_0^{k\pm2}$であれば枝対(e_{i_1}, e_{i_2})を$E_{p_{k\pm2}}$の要素とする．この操作を続けてAの要素と要素の共通部分になる節点がなくなるまで行う（これで得られる枝対集合$E_{p_k}\cup E_{p_{k\pm2}}$の要素数は$n$である）．

つぎに，$X_0^k=X_0^b$，$X_0^{k\pm2}=X_0^a$として，同様の枝対集合を求めE'_{p_k}，$E'_{p_{k\pm2}}$とする．ただし，$E'_{p_k}=E_{p_{k\pm2}}$，$E'_{p_{k\pm2}}=E_{p_k}$であるので実際にはE_{p_k}と$E_{p_{k\pm2}}$を求める操作だけでよい．

(4) 得られたE_{p_k}，$E_{p_{k\pm2}}$（またはE'_{p_k}，$E'_{p_{k\pm2}}$）に文献(8)の(iii)の手順を適用してEの分割ともとのグラフのカットセット行列が得られる．

以上(1)〜(4)によってEの分割の方法が示されたが，得られるEの分割は一とおりではない．すなわち枝対集合にもE_{p_k}，$E_{p_{k\pm2}}$（$X_0^k=X_0^a$，$X_0^{k\pm2}=X_0^b$として得られる枝対集合）とE'_{p_k}，$E'_{p_{k\pm2}}$（$X_0^k=X_0^b$，$X_0^{k\pm2}=X_0^a$として得られる枝対集合）の二とおりがあった．ではこれらがもとのグラフの枝集合の分割にどのように影響するか考える．

ht_0から$ht_0\oplus\{e_i, e_j\}=ht'$，$(e_i, e_j\in E)$によって得られる$ht'$は$hT_k$または$hT_{k\pm2}$に含まれ，

$$\text{(i)}\ \begin{cases} e_i\in\varepsilon_y \\ e_j\in\bar{\varepsilon}_y \end{cases}\text{または}\begin{cases} e_i\in\bar{\varepsilon}_y \\ e_j\in\varepsilon_y \end{cases}\text{のとき，}\ ht'\in hT_k$$

$$\text{(ii)}\ \begin{cases} e_i\in\varepsilon_z \\ e_j\in\bar{\varepsilon}_z \end{cases}\text{または}\begin{cases} e_i\in\bar{\varepsilon}_z \\ e_j\in\varepsilon_z \end{cases}\text{のとき，}\ ht'\in hT_k$$

$$\text{(iii)}\ \begin{cases} e_i\in\varepsilon_y \\ e_j\in\varepsilon_z \end{cases}\text{または}\begin{cases} e_i\in\varepsilon_z \\ e_j\in\varepsilon_y \end{cases}\text{のとき，}\ ht'\in hT_{k-2}$$

$$\text{(iv)}\ \begin{cases} e_i\in\bar{\varepsilon}_y \\ e_j\in\bar{\varepsilon}_z \end{cases}\text{または}\begin{cases} e_i\in\bar{\varepsilon}_z \\ e_j\in\bar{\varepsilon}_y \end{cases}\text{のとき，}\ ht'\in hT_{k+2}$$

となる．この(i)〜(iv)はEの分割が(E_y, E_z)，$(E_y=\varepsilon_y\cup\bar{\varepsilon}_y,\ E_z=\varepsilon_z\cup\bar{\varepsilon}_z)$の場合である．$E$の分割を$(E'_y, E'_z)$，$(E'_y=\bar{\varepsilon}_z\cup\bar{\varepsilon}_y,\ E'_z=\varepsilon_z\cup\varepsilon_y)$または$(E''_y, E''_z)$，$(E''_y=\varepsilon_y\cup\varepsilon_z,\ E''_z=\bar{\varepsilon}_y\cup\bar{\varepsilon}_z)$に変えた場合，基準混成木はそれぞれ$ht'_0=\bar{\varepsilon}_z\cup\varepsilon_y$および$ht''_0=\varepsilon_y\cup\bar{\varepsilon}_y$となり$|ht'_0|=k'$，$|ht''_0|=k''$とすると，(i)は$hT_k$は$hT_{k'+2}$（$hT_{k''-2}$）に，(ii)の$hT_k$は$hT_{k'-2}$（$hT_{k''+2}$）に，(iii)，(iv)の$hT_{k-2}$，$hT_{k+2}$は$hT_{k'}$（$hT_{k''}$）になる．(i)〜(iv)から明らかなようにこのようなことはこれらの分割以外には生じない．（注意：$E'_y=E''_z$，$E'_z=E''_y$であるから分割(E''_y, E''_z)のグラフは分割(E'_y, E'_z)のグラフのE'_yとE'_zの枝をそっくり入れ換えたものとなっている）．このことから，Eの分割(E_y, E_z)に対してε_yと$\bar{\varepsilon}_z$を交換（分割を(E'_y, E'_z)にする）することは，HT_{g_0}〔H_0〕の上では（X_0^aとX_0^bのどちらがX_0^kまたは$X_0^{k\pm2}$なのかわからない）X_0^kと$X_0^{k\pm2}$の区別を入れ換えることと同じであることがわかる．

以上をまとめて次の定理を得る．

〔定理5〕 混成木グラフのローカルグラフHT_{g_0}〔H_0〕から得られるもとのグラフの範囲は

(1)[5] 2同形グラフ，双対グラフおよびそれらに任意の可分枝，自己閉路を加えたもの

(2) ε_yと$\bar{\varepsilon}_z$を交換したグラフとそれらのグラフのE_yとE_zの枝を交換して得られるグラフ

である．

この定理の(1)は木グラフの場合の結果であり，混成木グラフの場合はさらに(2)が加わっている．

4．むすび

混成木集合HTの要素間の関係を示す混成木グラフHT_gを定義し，木グラフ，補木グラフが混成木グラフに含まれることを示し，木（補木）グラフにない混成木グラフ独特の基本的性質について調べた．混成木グラフと木（補木）グラフとの違いは2種の枝を含むことであるが，枝に正負の符号を付けることによってHT_gが均衡グラフであることが示された．そしてその性質を用いて，あるHT_gを持つもとのグラフの枝の類別法について考察し，さらに混成木グラフのある部分グラフHT_{g_0}〔H_0〕から得られるもとのグラフの範囲についてもふれた．これらの結果は木（補木）グラフの拡張とみることができる．

謝辞　終りに，日ごろご指導いただく本学黒部貞一，松本正両教授に感謝の意を表する．

文　献

(1) S. Seshu and M. B. Reed : "Linear graphs and electrical networks", Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass (1961).

(2) R. L. Cummins : "Hamilton circuits in tree graphs", IEEE Trans., CT-13, p.82 (March 1966).

(3) G. Kishi and Y. Kajitani : "On hamilton circuits in tree graphs", IEEE Trans., CT-15, p.42 (March 1968).

(4) 小野寺力男："グラフ理論の基礎"，数学ライブラリー6，森北出版（昭43）．

(5) G. Kishi and Y. Kajitani : "On the realization of tree graphs", IEEE Trans., CT-15, p.271 (Sept. 1968).

(6) 伊理正夫："グラフの理論とその応用"，信学誌，講座，55，1，p.51（昭47-01）．

(7) 仙石，黒部，小川："混成木とその性質"，信学論（A），54-A，7，p.426（昭46-07）．

(8) 仙石，黒部，小川："混成木集合の実現について"信学論（A），55-A，2，p.60（昭47-02）．

(9) 高橋秀俊："線形集中定数系論，I"，岩波講座，基礎工学6，岩波書店，東京（昭44）．

(10) C. Flament : "Applications of graph theory to group structure", Prentice Hall Inc. (1963).

（昭和48年3月9日受付）