

# 一般化シグナルフローグラフにおける保存量

正員 仙石 正和†

## A Conservative Quantity in Generalized Signal Flow Graphs

Masakazu SENGOKU†, *Regular Member*

あらまし 集中定数電気回路網において、Tellegen の定理およびその一般化した種々の定理は回路網の性質を考察する上で重要な役割を果たしている。この定理はキルヒホッフの法則の直接の結果として得られるものであり、キルヒホッフの法則の成立する系に対して適用される。一方、キルヒホッフの法則に従っておらずシグナルフローグラフで記述される系に対して Tellegen の定理と類似した公式（デジタルフィルタにおける Tellegen の定理などと呼ばれている）が知られている。本論文は、有向枝の信号はその枝の始点の信号の単なる係数倍でなく始点の信号によって決まると定義した一般化シグナルフローグラフに関して、電気回路の Tellegen の定理と同様の手法で、この類似した公式が唯一であるのかという点に注目し一般化を試みている。そして点の信号と枝の信号に対して対称な双線形演算子（プラス定数）を作用させても同形式の公式は成立することを示し（この演算子を一般化シグナルフローグラフの保存量と名づけている）、最後にこの保存量の簡単な応用について述べている。

### 1. ま え が き

集中定数電気回路網において、Tellegen の定理およびその一般化した種々の定理は回路の感度解析を初めとして重要な役割を果たしている<sup>(1),(2)</sup>など。この定理はキルヒホッフの法則(KL)の直接の結果として得られるものである（逆に、Tellegen の定理または電力保存則と KL の一部から KL 全体を導出する方法はブランクの論理またはブランク・岡田の論理として知られている<sup>(3),(4)</sup>）。

一方、デジタルフィルタのようにキルヒホッフの法則に従っていなくてシグナルフローグラフによって記述される系も多い。このような系には Tellegen の定理は適用できないが、それに類似した公式（デジタルフィルタにおける Tellegen の定理またはシグナルフローグラフにおける Tellegen の定理などと呼ばれている）が知られている<sup>(5),(6)</sup>。本論文は、有向枝の信号はその枝の始点の信号の単なる係数倍になるという良く知られたシグナルフローグラフでなく有向枝の信号はその枝の始点の信号によって決まると定義した一

般化シグナルフローグラフに関して、電気回路網の Tellegen の定理と同様に、この類似した公式が唯一であるのかという点に注目して一般化を試みている。そして二つのシグナルフローグラフの点と枝の信号の2変数に対して、適当な2変数演算子を作用させても同様の公式が導出されることについて考察し、この演算子（保存量）を決定している。最後にこの保存量の簡単な応用について述べている。

### 2. シグナルフローグラフとそれに関する Tellegen の定理

#### 2.1 一般化シグナルフローグラフ

シグナルフローグラフ(SFGと略す)は連立線形方程式の変数を点に対応させ、係数を有向枝の重みとしたものであり、連立線形方程式の解法などに有用であることは良く知られている（例えば文献(7)~(9)など）。本論文では SFG を連立線形方程式の表現であるという立場からでなく、SFG は次のような性質を有する有向グラフであるという定義から出発する。

SFG は点集合  $V$  と有向枝集合  $E$  とから成る有向グラフ  $G$  とその上の信号とから成っている。

$$G = (V, E) \quad (1)$$

但し、 $|V| = N_v$ ,  $|E| = b$

信号(signal)は一般に時間の連続または離散的関数

†新潟大学工学部情報工学科, 新潟市  
Faculty of Engineering, Niigata University, Niigata-shi,  
950-21 Japan  
論文番号: 昭 57-論 9[A-9]

などと考える(“時間”の関数と限定されるわけではないが“信号”という語からそう考える)。グラフ  $G$  の点  $v_i \in V$  の信号を  $y_i$  とする。  $G$  に始点  $v_i$ 、終点  $v_j$  の有向枝  $e_k = (v_i, v_j) \in E$  があつたとする。  $e_k$  の枝入力信号は  $y_i$  とし、  $e_k$  の枝出力信号が  $x_{ij}$  のとき、

$$x_{ij} = f_{ij}(y_i) \quad (2)$$

(ここで、  $f_{ij}(y_i)$  は  $y_i$  の任意の関数である) とする(定義)。

$G$  において、

$$\delta^+ v_i = \{e_k | e_k = (v_i, v_j)\} \quad (3)$$

$$\delta^- v_i = \{e_k | e_k = (v_j, v_i)\} \quad (4)$$

としたとき、

$$\delta^- v_i = \phi \text{ のとき、 } v_i : \text{ソース (source) 点} \quad (5)$$

$$\delta^+ v_i = \phi \text{ のとき、 } v_i : \text{シンク (sink) 点} \quad (6)$$

という。枝  $e_k = (v_i, v_j)$  に対して、

$$v_i = \delta^+ e_k \quad (7)$$

とする。このとき、点  $v_j$  の信号  $y_j$  は、

$$y_j = \sum_{\substack{v_i = \delta^+ e_k \\ e_k \in \delta^- v_j}} x_{ij} \quad (8)$$

とする(定義)。

以上の説明において、有向グラフ  $G$  の枝および点の信号がそれぞれ式(2)及び式(8)で定義されているとき  $G$  を一般化シグナルフローグラフと呼ぶ。式(2)において、  $f_{ij}(y_i) = a_{ij} \cdot y_i$  ( $a_{ij}$ : 定数) であるとき、一般化シグナルフローグラフは従来のシグナルフローグラフに一致することは明らかである。

以下特に断らない限り、一般化シグナルフローグラフを単にシグナルフローグラフ(SFG)と呼ぶことにする。

## 2.2 シグナルフローグラフにおける

### Tellegen の定理

集中定数電気回路網における Tellegen の定理

(Tellegen の半電力定理) は同一のグラフ構造を有する二つの電気回路網  $N$  と  $N'$  において、対応する枝の  $N, N'$  の電流  $i_k^N, i_k^{N'}$  と  $N, N'$  の電圧  $v_k^N, v_k^{N'}$  に対して、

$$\sum_{k=1}^M i_k^N v_k^{N'} = \sum_{k=1}^M i_k^{N'} v_k^N = 0 \quad (9)$$

(ここで、  $M$  は回路の枝数)

が成立するというものである。これには種々の別表現もあるが、これらは枝電圧、枝電流が KL に従うことから由来するものである。

SFG では有向枝に対して電圧、電流に対応するような変数はなく、グラフ上の変数は点の信号  $y_i$  と枝の信号  $x_{ij}$  である。同一のグラフ構造を有する二つの

SFG,  $G$  と  $G'$  に対して、対応する点、枝の信号をそれぞれ  $y_i, x_{ij}$  と  $y'_i, x'_{ij}$  とする。このとき、

$$\sum_{e_k = (v_i, v_j) \in E} (y_j x'_{ij} - y'_j x_{ij}) = 0 \quad (10)$$

が成立する。これは SFG の定義から直接導出される。つまり、  $G(G')$  のソース点からなる点集合を  $S \subset V$  とすると、式(10)の左辺は、

$$\begin{aligned} & \sum_{e_k = (v_i, v_j) \in E} (y_j x'_{ij} - y'_j x_{ij}) \\ &= \sum_{\substack{v_j \notin S \\ v_j \in V}} \sum_{\substack{v_i = \delta^+ e_k \\ e_k \in \delta^- v_j}} (y_j x'_{ij} - y'_j x_{ij}) \\ &= \sum_{\substack{v_j \notin S \\ v_j \in V}} (y_j \sum_{\substack{v_i = \delta^+ e_k \\ e_k \in \delta^- v_j}} x'_{ij} - y'_j \sum_{\substack{v_i = \delta^+ e_k \\ e_k \in \delta^- v_j}} x_{ij}) \\ &= \sum_{\substack{v_j \notin S \\ v_j \in V}} (y_j y'_j - y'_j y_j) = 0 \quad (\because \text{式(8)より}) \end{aligned}$$

この式(10)は SFG における Tellegen の定理またはデジタルフィルタにおける Tellegen の定理と呼ばれるものでデジタルフィルタの感度解析などに応用されている<sup>(5),(6),(10)</sup>。ここで、式(10)の導出から明らかのように、式(10)は SFG が線形、つまり  $f_{ij}$  が線形関数である必要はないことに注意すべきである。

## 3. シグナルフローグラフにおける保存量

グラフ構造が同一(同形)である二つの SFG において、式(10)が成立することが分かった。つまり、

$$\sum_{e_k \in (v_i, v_j) \in E} y_j x'_{ij} = \sum_{e_k \in (v_i, v_j) \in E} y'_j x_{ij} \quad (10')$$

では、同一のグラフ構造の場合、式(10)' の表現のみであろうか。この点について以下検討する。

信号には無関係で、単にグラフが同形な二つの SFG,  $G$  と  $G'$  において、

$$\sum_{e_k = (v_i, v_j) \in E} f_G(y_j, x'_{ij}) = \sum_{e_k = (v_i, v_j) \in E} f_G(y'_j, x_{ij}) \quad (11)$$

を満たす 2 変数の演算子  $f_G$  を SFG の保存量と名づける(定義)。

この演算子  $f_G$  は同形な二つの SFG,  $G$  と  $G'$  の信号の間に、式(11)の関係を成立せしめるものとして定義されたものである。式(11)の左辺の量と右辺の量が二つのグラフの間で保存されるという意味で便宜上 SFG の保存量と名づけたものであり特別の意味はない。

式(11)が成立するための演算子  $f_G$  の性質を調べるためにまず次の補題を証明する。

[補題 1] 2 変数の演算子  $f(x, y)$  が連続、対称

で  $x$  に関して加法的の場合  $f$  は双線形演算子 (写像) となる。

(証明) 証明すべきことは

$$f(x+y, z) = f(x, z) + f(y, z) \quad (12)$$

: (加法的)

$$f(x, y) = f(y, x) \quad (13)$$

: (対称性)

から,

$$\left. \begin{aligned} f(z, x+y) &= f(z, x) \\ &\quad + f(z, y) \\ f(ax, y) &= f(x, ay) \\ &= af(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

を導出することである。式(12), (13)より,

$$f(z, x+y) = f(z, x) + f(z, y)$$

となり, 双加法的となる。そこで,  $f(ax, y) = af(x, y)$  を証明すればよい。式(12)より,  $y=0$  とすると,

$$\begin{aligned} f(x, z) &= f(x, z) + f(0, z) \\ \therefore f(0, z) &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

又, 式(12)において,  $y=-x$  とすると,

$$\begin{aligned} f(x+(-x), z) &= f(x, z) + f(-x, z) \\ f(0, z) &= f(x, z) + f(-x, z) \end{aligned}$$

式(15)より

$$f(-x, z) = -f(x, z) \quad (16)$$

式(15), (16)より式(14)は  $a > 0$  の場合のみを示せばよい。

又,  $f$  の連続性から,  $a = n/m$  ( $n, m$ : 正の整数,  $a$ : 有理数) の場合について証明すればよい (なぜならば, 実数  $a > 0$  に対して,  $r_n > 0$  の有理数 (列) は,

$$r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \quad \text{となり,}$$

$f(r_n x, y) = r_n f(x, y)$  とすると,  $f$  の連続性より,  $n \rightarrow \infty$  に対して,

$$f(ax, y) = af(x, y)$$

となるからである。

式(12)より,

$$\begin{aligned} f(nx, y) &= f(x+x+\dots+x, y) \\ &= f(x, y) + \dots + f(x, y) \\ &= nf(x, y) \end{aligned}$$

$x = mz$  とすると,

$$\begin{aligned} f(nmz, y) &= nf(mz, y) \\ &= mf(nz, y) \end{aligned}$$

又,  $z = u/m$  とすると

$$\begin{aligned} mf((n/m)u, y) &= nf(u, y) \\ \therefore f((n/m)u, y) &= (n/m)f(u, y) \end{aligned} \quad (17)$$

故に,  $f$  は双線形演算子 (写像) となる。

(証明終)

この補題 1 を用いて次の定理が得られる。

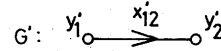
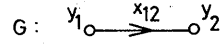


図1 グラフ  $G$  と  $G'$   
Fig.1-Graphs  $G$  and  $G'$ .

[定理 1] 連続な演算子  $f_G(x, y)$  が SFG の保存量となるための必要十分条件は

$$f_G(x, y) = g(x, y) + c \quad (18)$$

但し,  $g(x, y)$  は対称な双線形演算子 (写像),  $c$  は定数である。

(証明) まず必要性の証明をする。図 1 のような同形な二つのグラフ  $G$  と  $G'$  において, 枝は 1 本であるので, 式(11)より,

$$f_G(y_2, x_{12}') = f_G(y_2', x_{12}) \quad (19)$$

SFG の定義式(8)より,

$$y_2 = x_{12}, \quad y_2' = x_{12}' \quad (20)$$

故に,

$$f_G(x_{12}, x_{12}') = f_G(x_{12}', x_{12}) \quad (21)$$

次に図 2 のグラフ  $G$  と  $G'$  において, 式(11)より,

$$\begin{aligned} f_G(y_2, x_{12}') + f_G(y_2, z_{12}') \\ = f_G(y_2', x_{12}) + f_G(y_2', z_{12}) \end{aligned} \quad (22)$$

又, 式(8)より,

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= x_{12} + z_{12} \\ y_2' &= x_{12}' + z_{12}' \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

式(23)を式(22)へ代入して,

$$\begin{aligned} f_G(x_{12} + z_{12}, x_{12}') + f_G(x_{12} + z_{12}, z_{12}') \\ = f_G(x_{12}' + z_{12}', x_{12}) + f_G(x_{12}' + z_{12}', z_{12}) \end{aligned} \quad (24)$$

ここで,  $x_{12}' = z_{12}'$  とすると,

$$\begin{aligned} 2f_G(x_{12} + z_{12}, x_{12}') = f_G(2x_{12}', x_{12}) \\ + f_G(2x_{12}', z_{12}) \end{aligned} \quad (25)$$

$x_{12} = z_{12}, x_{12}' = 0$  とすると,

$$f_G(2x_{12}, 0) = f_G(0, x_{12}) \quad (26)$$

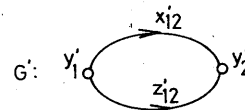
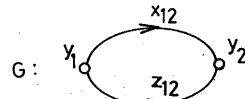


図2 グラフ  $G$  と  $G'$   
Fig.2-Graphs  $G$  and  $G'$ .

式(2)を用いて,

$$f_G(2x_{12}, 0) = f_G(x_{12}, 0) \quad (27)$$

故に,  $n$ : 正整数として,

$$\begin{aligned} f_G(2^n x_{12}, 0) &= f_G(2^{n-1} x_{12}, 0) \\ &= f_G(2^{n-2} x_{12}, 0) \\ &\vdots \\ &= f_G(x_{12}, 0) \end{aligned} \quad (28)$$

$x = 2^n x_{12}$  とすると,

$$f_G(x, 0) = f_G(x/2^n, 0) \quad (29)$$

$f_G$  は連続であるので,  $n \rightarrow \infty$  に対して,

$$f_G(x, 0) \rightarrow f_G(0, 0)$$

故に,

$$\begin{aligned} f_G(x, 0) &= f_G(0, x) \\ &= f_G(0, 0) \equiv c \end{aligned} \quad (30)$$

ここで,  $c$ : 定数

そこで,

$$g(x, y) = f_G(x, y) - c \quad (31)$$

と定義する. 式(25)において,  $z_{12} = 0$  とおくと,

$$2f_G(x_{12}, x_{12}') = f_G(2x_{12}', x_{12}') + f_G(2x_{12}', 0)$$

式(30)を用いて,

$$2f_G(x_{12}, x_{12}') = f_G(2x_{12}', x_{12}') + c$$

つまり,

$$f_G(2x_{12}', x_{12}') = 2f_G(x_{12}, x_{12}') - c \quad (32)$$

式(32)を式(25)へ代入して,

$$\begin{aligned} 2f_G(x_{12} + z_{12}, x_{12}') &= 2f_G(x_{12}, x_{12}') \\ &\quad + 2f_G(z_{12}, x_{12}') - 2c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_G(x_{12} + z_{12}, x_{12}') &= f_G(x_{12}, x_{12}') \\ &\quad + f_G(z_{12}, x_{12}') - c \end{aligned} \quad (33)$$

故に,

$$\begin{aligned} g(x_{12} + z_{12}, x_{12}') &= g(x_{12}, x_{12}') \\ &\quad + g(z_{12}, x_{12}') \end{aligned} \quad (34)$$

又, 式(2)と式(31)より

$$g(x, y) = g(y, x) \quad (35)$$

であるので, 式(34), (35)と補題1より,  $g$  は対称な双線形演算子である.

次に十分性を証明する.  $G(G')$  のソース点の点集合を  $S \subset V$  とする.

$$\sum_{e_k=(v_i, v_j) \in E} f_G(y_j, x_{i_j}') = \sum_{\substack{v_j \in S \\ v_j \in V}} \sum_{\substack{v_i = \delta^+ e_k \\ e_k \in \delta^- v_j}} f_G(y_j, x_{i_j}') \quad (36)$$

$g$  の双線形性より,

$$\sum_{\substack{v_i = \delta^+ e_k \\ e_k \in \delta^- v_j}} f_G(y_j, x_{i_j}') = \sum_{\substack{v_i = \delta^+ e_k \\ e_k \in \delta^- v_j}} g(y_j, x_{i_j}') + c_j$$

$$= g(y_j, \sum_{\substack{v_i = \delta^+ e_k \\ e_k \in \delta^- v_j}} x_{i_j}') + c_j \quad (37)$$

ここで,  $c_j$ : 定数 ( $c_j = |\delta^- v_j| \cdot c$ )

ところで, 式(8)より

$$y_j' = \sum_{\substack{v_i = \delta^+ e_k \\ e_k \in \delta^- v_j}} x_{i_j}'$$

であるので,

$$\sum_{\substack{v_i = \delta^+ e_k \\ e_k \in \delta^- v_j}} f_G(y_j, x_{i_j}') = g(y_j, y_j') + c_j \quad (38)$$

故に, 式(36)は

$$\sum_{e_k=(v_i, v_j) \in E} f_G(y_j, x_{i_j}') = \sum_{\substack{v_j \in S \\ v_j \in V}} g(y_j, y_j') + c_j' \quad (39)$$

ここで,  $c_j'$ : 定数 ( $c_j' = |b| \cdot c$ )

同様に,

$$\sum_{e_k=(v_i, v_j) \in E} f_G(y_j', x_{i_j}') = \sum_{\substack{v_j \in S \\ v_j \in V}} g(y_j', y_j) + c_j' \quad (40)$$

故に, 式(39), (40)と  $g$  の対称性より,

$$\sum_{e_k=(v_i, v_j) \in E} f_G(y_j, x_{i_j}') = \sum_{e_k=(v_i, v_j) \in E} f_G(y_j', x_{i_j}') \quad (41)$$

(証明終)

SFGの保存量  $f_G$  は対称な双線形演算子プラス定数であることが分かった. この結果は式(10)の内容を含むことは明らかである. さて, この定理1の十分条件の証明の際に  $G$  と  $G'$  が同形であることをはっきりと使用していなかった. そこで必ずしも同形でない二つのSFG,  $G=(V, E)$  と  $G'=(V', E')$  を考える.  $|V|=|V'|$ ,  $|E|=|E'|$  とし,  $G$  及び  $G'$  のソース点の点集合をそれぞれ  $S \subset V$  及び  $S' \subset V'$  とする. 更に,  $G$  と  $G'$  において  $S=S'$  とする. このとき

$$\sum_{e_k=(v_i, v_j) \in E'} f_E(y_j, x_{i_j}') = \sum_{e_k=(v_i, v_j) \in E} f_E(y_j', x_{i_j}') \quad (42)$$

を満足する2変数演算子  $f_E(x, y)$  に関して, 次の定理が成立する.

[定理2] 点数, 枝数が等しく又ソース点の集合が同一である二つのグラフ  $G$  と  $G'$  において, 連続な演算子  $f_E(x, y)$  が式(42)を満足するための必要十分条件は

$$f_E(x, y) = g(x, y) + c = f_G(x, y) \quad (43)$$

である. 但し,  $g(x, y)$  は対称な双線形演算子(写像),  $c$  は定数である.

(証明) 必要性については  $G$  と  $G'$  が同形の場合も成立しななければならないことから, 定理1の必要性の証明より明らかである. 次に十分性を示す.

$$\sum_{\substack{e_k=(v_i, v_j) \in E'}} f_E(y_j, x_{i_j}') = \sum_{\substack{v_j \in S \\ v_j \in V}} \sum_{\substack{v_i=\delta^+ e_k \\ e_k \in \delta^- v_j}} f_E(y_j, x_{i_j}') \quad (44)$$

$g$  の双線形性より、

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{v_i=\delta^+ e_k \\ e_k \in \delta^- v_j'}} f_E(y_j, x_{i_j}') &= \sum_{\substack{v_i=\delta^+ e_k \\ e_k \in v_j}} g(y_j, x_{i_j}') + c_j \\ &= g(y_j, \sum_{\substack{v_i=\delta^+ e_k \\ e_k \in v_j}} x_{i_j}') + c_j \\ &= g(y_j, y_j') + c_j \quad (\because \text{式(8)より}) \end{aligned} \quad (45)$$

故に、式(44)は、

$$\sum_{e_k=(v_i, v_j) \in E'} f_E(y_j, x_{i_j}') = \sum_{\substack{v_j \in S \\ v_j \in V}} g(y_j, y_j') + c_j' \quad (46)$$

但し、 $c_j, c_j'$  は定数

同様に、

$$\sum_{e_k=(v_i, v_j) \in E} f_E(y_j', x_{i_j}) = \sum_{\substack{v_j \in S \\ v_j \in V'}} g(y_j', y_j) + c_j' \quad (47)$$

故に、式(46)、(47)と  $g$  の対称性より、

$$\sum_{e_k=(v_i, v_j) \in E'} f_E(y_j, x_{i_j}') = \sum_{e_k=(v_i, v_j) \in E} f_E(y_j', x_{i_j}) \quad (48)$$

(証明終)

定理 2 から、グラフ  $G$  と  $G'$  が同形でなくとも、点数、枝数が等しく、ソース点の集合が同一であるとき、式(42)の関係が成立するためには  $f_E$  は  $f_G$  と同様に対称な双線形演算子プラス定数であることが分かった。次に、枝数が必ずしも等しくない二つのグラフ  $G$  と  $G'$  を考える。つまり、 $|V|=|V'|, S=S'$  である二つのグラフ  $G$  と  $G'$  について、

$$\sum_{e_k=(v_i, v_j) \in E'} f_V(y_j, x_{i_j}') = \sum_{e_k=(v_i, v_j) \in E} f_V(y_j', x_{i_j}) \quad (49)$$

を満足する 2 変数演算子  $f_V$  に関して次の定理が成立する。

[定理 3] 点数が等しく、ソース点の集合が同一である二つのグラフ  $G$  と  $G'$  において、連続な演算子  $f_V(x, y)$  が式(49)を満足するための必要十分条件は、 $f_V$  が対称な双線形演算子(写像)であることである。

(証明) 必要性は  $G$  と  $G'$  が同形の場合も成立しなければならないことから定理 1 の必要条件と同様に得られ、但し  $G$  と  $G'$  では枝数が異なる場合もあることから定理 1 の定数  $c=0$  となる。十分性については定理 2 の十分性の証明において  $c_j=c_j'=0$  とすればよい。

(証明終)

以上二つの SFG、 $G$  と  $G'$  において同形の場合、同形でなくとも点数、枝数が等しく、ソース点の集合が同一である場合、点数が等しく、ソース点の集合が同一である場合などについて考察してきた。これらは二つの SFG の信号の間の関係を表現するものであり、二つの SFG に関する保存量と考えられる。

#### 4. シグナルフローグラフの保存量の応用

ここでは SFG の保存量の簡単な応用について述べる。その前に、便利のために SFG のソースとシンクをセルフループにより統一的に表現する方法を述べておく。図 3 のようにセルフループをソース又はシンクに付加すると、ソース点またはシンク点が枝 ( $q$  の値) として扱える。つまり、

$$x_{ii} = f_{ii}(y_i) = q \quad (50)$$

となり、

$$\left. \begin{aligned} q \neq 0 \text{ のとき } & v_i : \text{ソース} \\ q = 0 \text{ のとき } & v_i : \text{シンク} \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

となる。

さて、SFG には種々の性質があり、点と点の間の信号の比、つまり伝達関数(システム関数)を求める位相幾何学的公式等も知られている。その中で、転置 SFG に関して次の性質がある。ソースとシンクを一つずつ持つ線形 ( $f_{ij}$  が線形) SFG において、SFG とその転置 SFG の伝達関数は等しい。この性質はデジタルフィルタの実現法などに利用されている<sup>10)</sup>。ある SFG の転置 SFG とは、その SFG のすべての枝の向きを逆転させ、枝に割り当てられている関数はそのままとしたものである。線形 SFG に関するこの性質は種々の方法で証明できる<sup>(6),(7),(10)</sup>が、この性質は一般化 SFG においても成立するであろうか。又、もし成立しないとすると枝の関数としてどのような関数が許されるのであろうかという疑問が起る。これに関して、SFG の枝関数がすべて同一種類と仮定すると、SFG の保存量を利用して次の定理が得られる。

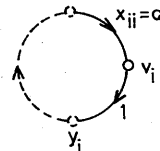


図 3 ソースとシンクのセルフループによる表現  
Fig. 3- Representation of a source or a sink by means of a self-loop.

[定理4] ソースとシンクが一つずつの任意の SFG において、SFG とその転置 SFG との伝達関数が等しいための必要十分条件は SFG が線形であることである。

(証明) 必要性の証明をする。任意の SFG について成立することから、図4の SFG を考える。G と G' のセルフループはソースとシンクを表現するために付加したものである。G と G' は同形でないが(点を  $v_i$  と  $v'_i$  のように対応して考えると枝が逆向きである)、点数、枝数が一致しており、ソース点の集合も同一(ここでは空集合)であることから定理2の  $f_E$  が利用できる。 $f_E(x, y) = xy$  とし、式(42)より、

$$y_1 x_{11}' + y_1 x_{21}' + y_2 x_{22}' = y_1' x_4 + y_2' x_{12} + y_2' x_{22}$$

ここで、 $y_1 = x_{11}$ 、 $y_2' = x_{22}'$ 、 $x_{22} = 0$ 、 $x_{11}' = 0$  とし、

$$x_{21}' = f_{21}'(y_2') = f_{12}(y_2') \quad (\because \text{転置 SFG より})$$

とすると、

$$y_1 f_{12}(y_2') + y_2 y_2' = y_1' y_1 + y_2' f_{12}(y_1)$$

G と G' で伝達関数が等しいことから、

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{y_1'}{y_2'} \quad \text{故に、} \quad y_1 y_1' = y_2 y_2'$$

これを上式に代入して、

$$y_1 f_{12}(y_2') = y_2' f_{12}(y_1)$$

つまり

$$\frac{f_{12}(y_1)}{y_1} = \frac{f_{12}(y_2')}{y_2'} \quad (52)$$

式(52)において、 $y_1$  と  $y_2'$  は独立に変る。故に任意の  $y_1$  と  $y_2'$  に対して式(52)が成立するためには、

$$\frac{f_{12}(y_1)}{y_1} = \frac{f_{12}(y_2')}{y_2'} = a_{12} \quad (53)$$

ここで、 $a_{12}$  : 定数。つまり、

$$f_{12}(y_1) = a_{12} y_1 \quad (54)$$

となる。

次に十分性を証明するために、 $f_{ij}(y_i) = a_{ij} y_i$  と仮定する。G とその転置 SFG、G' のソースとシンクをそれぞれ  $v_s$ 、 $v_0$  及び  $v_0'$ 、 $v_s'$  とし、G' の信号など

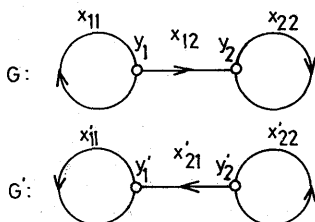


図4 SFGとその転置SFG

Fig.4-A SFG and its transpose SFG.

はすべて'を付けて表す。このソースとシンクにセルフループを付加すると定理2の条件を満足するので、式(42)を用いて ( $f_E(x, y) = xy$  とする)、

$$\sum_{e_k=(v_i, v_j) \in E'} y_j x_{ij}' = \sum_{e_k=(v_i, v_j) \in E} y_j' x_{ij} \quad (55)$$

ここで、 $x_{ij} = f_{ij}(y_i) = a_{ij} y_i$ 、 $x_{j'i}' = f_{j'i}'(y_j') = a_{j'i}' \cdot y_j' = a_{ij} y_j'$  (但し、 $i, j \neq s, 0$ ) であることに注意すると、式(55)は

$$y_s x_{ss}' + y_0 x_{00}' = y_s' x_{ss} + y_0' x_{00} \quad (56)$$

となる。 $x_{00} = 0$ 、 $x_{ss}' = 0$  とすると、

$$y_0 x_{00}' = y_s' x_{ss}$$

つまり

$$\frac{y_0}{x_{ss}} = \frac{y_s'}{x_{00}'} \quad (57)$$

従ってGとG'の伝達関数が等しくなる。(証明終)

この定理4はSFGの保存量として最も簡単な  $f_E(x, y) = xy$  を用いた応用例である。次に別の例を示す。

線形SFGの性質として、

$$\frac{\partial T_{s0}}{\partial a_{nm}} = T_{sn} \cdot T_{m0} \quad (58)$$

(但し、 $T_{ab}$  は点  $v_a$  から  $v_b$  への伝達関数、 $f_{nm}(y_n) = a_{nm} y_n$  である)。

が知られている。これはシステムの感度解析などに利用されており、その導出にはSFGにおけるTellegenの定理が利用されている<sup>(5),(6),(10)</sup>。ここでは、SFGの保存量として対称な双線形演算子

$$f_E(x, y) = x \frac{\partial y}{\partial a_{nm}} + y \frac{\partial x}{\partial a_{nm}} \quad (59)$$

を用いると式(58)はより簡単に導出できることを示す。

Gとその転置SFG、G'のソースとシンクをそれぞれ  $v_s$ 、 $v_0$  及び  $v_0'$ 、 $v_s'$  とし、G'の信号などはすべて'を付けて表す。このソースとシンクにはセルフループが付加されているものとする。GとG'について定理2の条件を満足するので式(42)を用い演算子として式(59)を用いると、

$$\begin{aligned} \sum_{e_k=(v_i, v_j) \in E'} \left( y_i \frac{\partial x_{ij}'}{\partial a_{nm}} + x_{ij}' \frac{\partial y_j}{\partial a_{nm}} \right) \\ = \sum_{e_k=(v_i, v_j) \in E} \left( y_j' \frac{\partial x_{ij}}{\partial a_{nm}} + x_{ij} \frac{\partial y_j'}{\partial a_{nm}} \right) \end{aligned} \quad (60)$$

ところが、

$$\frac{\partial x_{ij}'}{\partial a_{nm}} = 0, \quad \frac{\partial y_j'}{\partial a_{nm}} = 0 \quad (61)$$

及び、

$$x_{ij} = a_{ij} y_i, \quad x_{ij}' = a_{j'i}' y_j' \quad (62)$$

であるので、

$$\sum_{e_k=(v_i, v_j) \in E'} a_{ji} y_i' \frac{\partial y_j}{\partial a_{nm}} = \sum_{e_k=(v_i, v_j) \in E} y_j' \frac{\partial a_{ij} y_i}{\partial a_{nm}} \quad (63)$$

$(v_i, v_j) \in E$  のとき、 $(v_j, v_i) \in E'$  であることに注意すると  $i = n$ ,  $j = m$  及び  $i = j = s$ ,  $i = j = 0$  以外の項は両辺に同じものがあるため消え、

$$\begin{aligned} a_{nm} y_m' \frac{\partial y_n}{\partial a_{nm}} + x_{00}' \frac{\partial y_0}{\partial a_{nm}} + x_{ss}' \frac{\partial y_s}{\partial a_{nm}} \\ = y_m' \frac{\partial a_{nm} y_n}{\partial a_{nm}} + y_0' \frac{\partial x_{00}}{\partial a_{nm}} + y_s' \frac{\partial x_{ss}}{\partial a_{nm}} \quad (64) \end{aligned}$$

$x_{00} = 0$ ,  $x_{ss}' = 0$ , 又  $x_{ss}$  は  $a_{nm}$  に無関係の定数であるので式(64)は

$$\frac{\partial y_0}{\partial a_{nm}} = \frac{y_m' y_n}{x_{00}'} \quad (65)$$

となる。

$$\frac{\partial (y_0/x_{ss}')}{\partial a_{nm}} = \frac{y_m'}{x_{00}'} \cdot \frac{y_n}{x_{ss}'} \quad (66)$$

ところで、

$$\left. \begin{aligned} \frac{y_0}{x_{ss}'} = T_{s0}, \quad \frac{y_m'}{x_{00}'} = T_{m0} \quad (\because \text{式(57)より}) \\ \frac{y_n}{x_{ss}'} = T_{sn} \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

であるので式(58)が得られる。

従来、式(58)をもとのSFG,  $G$  とその転置SFG,  $G'$  を2回用いて導出する方法が知られていた<sup>(6), (10)</sup>。保存量の式(59)を用いた上述の方法は  $G$  と  $G'$  を1回使用するのみであり、より理解しやすい簡便な方法であると考えられる。

以上SFGの保存量の簡単な応用について述べてきた。これらのSFGの性質(定理4, 式(58))は従来のSFGのTellegenの定理を用いても得られるものであるが、種々の保存量(例えば式(59)のような)を考えることにより、それらがSFGの性質を調べる上で有効な手段となると考えられる。これらに関しては今後の課題である。なお、電気回路網において、その性質を調べるのによく利用される演算子<sup>(11), (12)</sup>,

$$f(x, y) = x \frac{\partial y}{\partial u} - y \frac{\partial x}{\partial u} \quad (68)$$

(例えば、 $x$ ,  $y$  は電圧, 電流,  $u$  はインピーダンスなどを表す)などは双線形であるが非対称であるためSFGの保存量として利用できないことに注意する必要がある。

## 5. むすび

有向グラフとそれに付随した信号からなるSFGに

関して、保存される量(演算子)について考察し、演算子の形を決定した。これらは集中定数電気回路網のTellegenの定理およびその一般化と同様の手法に従ったものである。ここで、信号は時間関数であるとしたが、信号の線形演算から得られる変数(例えば  $z$  変換)に対してもこれは成立するため種々の変形が考えられる。最後にその応用についても簡単に述べたが、電気回路網におけるような広い応用があるかどうかは今後の課題である。保存量が不連続の場合、対称な加法的演算子としかいえないが、これらに関して及び一見グラフ構造とはあまり関係ないように見えるこの保存量が、有向グラフのグラフ構造とどのようなかかわりをもつのか<sup>(11)</sup>なども今後の課題である。

謝辞 日ごろ御指導頂く本学阿部教授, および熱心に御討論, 御助言を頂いた, 東工大梶谷研究室の諸氏, 特に梶谷助教授と上野修一氏に感謝の意を表する。

## 文 献

- (1) Penfield, Jr. P., Spence, R. and Duninker, S. : "Tellegen's Theorem and Electric Networks", MIT Press, Cambridge, Mass. (1970).
- (2) 岸, 木田 : "多端子対回路網における保存量", 信学論(A), 51-A, 7, pp.275-281 (昭43-07).
- (3) 小野寺, 大類 : "電気回路網と接続理論", 森北出版(昭48).
- (4) 梶谷, 篠田 : "回路解析", 日本理工出版会(昭54).
- (5) Seviara, S. and Sablatash, M. : "A Tellegen's theorem for digital filters", IEEE Trans. Circuit Theory, CT-18, pp.201-203 (Jan.1971).
- (6) Fettweis, A. : "A general theorem for signal-flow networks, with applications", Arch. Electron. & Ubertragungstechn., 25, pp.557-561 (1971).
- (7) Mason, S. J. and Zimmermann, H. J. : "Electronic Circuits, Signals, and Systems", John Wiley & Sons., Inc. (1960); 大河内訳 : "電子回路と信号伝送(上)", 近代科学社(昭41).
- (8) 尾崎, 白川 : "グラフとネットワークの理論", コロナ社(昭48).
- (9) 篠田 : "線形代数系におけるグラフ理論諸技法(I~VIII)", システムと制御, 23, 1~8 (昭54).
- (10) Oppenheim, A. V. and Schaffer, R. W. : "Digital Signal Processing", Prentice Hall (1975); 伊達訳 : "ディジタル信号処理(上)", コロナ社(昭53).
- (11) 仙石正和 : "一般化シグナルフローグラフの一保存量について", 信学技報, CAS80-44 (1980-07).
- (12) 仙石正和 : "一般化シグナルフローグラフの保存量の応用に関する考察", 信学技報, CAS81-18 (1981-06).

(昭和56年3月19日受付, 8月4日再受付)