—— 論　文 ——

UDC 519.176

グラフにおける2点一致と中心度関数

正　員　篠田　庄司†　　　正　員　仙石　正和††

Coalescence of Two Vertices and Vertex-Centrality Functions of a Graph

Shoji SHINODA† and Masakazu SENGOKU††, *Regular Members*

あらまし　ネットワーク構造を有するシステム（通信網，交通網，社会集団等）をグラフでモデルした場合，点の中心らしさ（重要性）を論ずる必要が生ずる場合が多い．本論文では，点に重みが付けられた無向グラフ（連結，単純に限らない）を対象として，点の中心らしさを表現する関数（中心度関数と言う）について考察したものである．中心度関数として具備すべき条件を2点一致というグラフ変形に対する関数値変化分の傾向の条件として定式化している．グラフの点の上で定義される関数として，着目している点からの距離で分類された点の重みの和の線形結合として表わされるものを考え，その関数が対象とする任意のグラフの中心度関数となるための必要十分条件を結合係数の条件として導いている．また，弱中心度関数，強中心度関数についても考察している．この結果，この関数は，従来の中心度関数を特殊な場合として含むものであり，さらに，点の重みの付け方により，種々の中心度関数が考えられることがわかった．特に，枝に重みが付けられたグラフについても，点の重みに枝の重みを加味して付けることにより考慮できる点が興味深い．

1. まえがき

点に重みがつけられたグラフにおいて，点の上で定義される関数で，点の中心らしさを表わす関数を，そのグラフの中心度関数という．この関数について論ずることは種々のネットワーク形システムとの関連で注目される問題の一つである．

中心度関数に関するこれまでの研究は，対象とするグラフを点に重みがつけられていないグラフ（等価的には各点に単位重みがつけられたグラフ）に限定するものである．そして，梶谷，丸山の仕事[(1)]ならびにそれに引き続く仕事[(2)～(4)]以外は中心度関数を具体的に与え，中心らしい点の分布とグラフ構造との関連を論じているものがほとんどで，中心度関数として具備すべき条件を定式化し，中心度関数の一般形を論ずることを試みたものはない．ところで，梶谷，丸山は，対象とするグラフを点の重みは考えず，さらに並列枝，自己閉路を含まない単純連結無向非完全グラフに限定し，中心度関数の具備すべき条件を非隣接点対への枝付加というグラフ変形に対する関数値変化分の傾向の条件として定式化している．そして，グラフの点の上で定義される関数として，着目している点からの距離で分類された点の数の線形結合として表わされる関数を考え，その関数が対象とする任意のグラフの中心度関数となるための必要十分条件を結合係数の条件として導いている．ここで注意すべきことは，対象とするグラフが単純連結非完全グラフであり，点の重みを考慮していないということである．

本論文では，各点に1以上の実数値重みをもつ無向グラフ（単純連結グラフに限らない）を対象とし，中心度関数として具備すべき条件を2点一致というグラフ変形に対する関数値変化分の傾向の条件として定式化する．そして，グラフの点の上で定義される関数として，着目している点からの距離で分類された点の重みの和の線形結合として表わされる関数を考え，その関数が対象とする任意のグラフの中心度関数となるための必要十分条件を，梶谷，丸山と同様，結合係数の条件として導く．また，弱中心度関数と強中心度関数というべき概念も導入し，それらについても同様の考察を行なう．

† 中央大学理工学部電気工学科，東京都
Faculty of Science and Engineering, Chuo University, Tokyo, 112 Japan
†† 新潟大学工学部情報工学科，新潟市
Faculty of Engineering, Niigata University, Niigata-shi, 950-21 Japan
論文番号：昭57-論 379[A-93]

2. 中心度関数

本論文を通して対象とするグラフGは無向グラフとし，特に断わらないかぎり，各点には1以上の実数値重みをもつものとする．そして，その点集合をVと表わす．Gの任意の2点r，sに対して，その2点間の距離（すなわち，その2点間を結ぶ最短パスの長さ）を$d(r,s)$と表わす．

さて，Gの点rの上に定義される実数値関数$f(r,G)$を考える．Gの相異なる任意の2点p，qに対して，それらを一致させてGから得られるグラフをG'と表わし，その点集合をV'と表わす．ただし，2点p，qの一致によって生じた点を改めてp（又はq）と表わし，G'の点の重みは，一致点以外はGと同一とし，一致点では新たなる値をとるものとする．G'では点pと点qは同一となるから，$f(p,G')=f(q,G')$となる．グラフGの点の上の関数$f(\cdot,\cdot)$に対し，条件

(i) $f(p,G')>\max\{f(p,G),f(q,G)\}$

(ii) $d(p,r)\leqq d(q,r)$ である任意の点rに対して

$f(p,G')-f(p,G)\geqq f(r,G')-f(r,G)$

かつ，$d(p,r)\geqq d(q,r)$ である任意の点rに対して

$f(p,G')-f(q,G)\geqq f(r,G')-f(r,G)$

が成り立つとき，$f(r,G)$をGの中心度関数ということにする．これは「$f(r,G)$の値が大きいほど，点rは中心らしい」としたとき，$f(r,G)$に課せられる「中心らしさを表わす関数」に対する定義と言えよう（この意味については **5.** 参照）．

本論文では，点sの重みをx_sと表わす（ここに，$x_s\geqq 1$である）．そして，Gの任意の点rから距離がlである点の集合を$V_l(r)$と表わし，Gの点rの上で定義される関数として

$$f(r,G)=\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_l\left(\sum_{s\in V_l(r)}x_s\right) \tag{1}$$

を考える．ただし，α_lはGに依存しない非負実数とする．また，Gの点で，点rからのパスが存在しないものが存在するとき，そのような点を点rからの距離が∞である点と言う．この関数は特殊な場合として梶谷，丸山によって提案された関数[1]を含むことに注意されたい．2点p，qを一致させて得られたグラフG'において，点rから距離がlである点の集合を$V'_l(r)$と表わす．G'の任意の点sの重みx_s'を，

$$x_s'=\begin{cases}x_s & : s\neq p,\ q\text{のとき}\\ x_p+x_q & : s=p\text{のとき}\end{cases} \tag{2}$$

とし，G'の点rの上で定義される関数を

$$f(r,G')=\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_l\left(\sum_{s\in V'_l(r)}x'_s\right) \tag{3}$$

と考える．式(2)は，グラフの2点一致の変形に対して，新たなグラフの新しい点の重みは元の2点の重みの和で表わされると仮定していることを表わしている．以下，式(1)の関数について議論を進めてゆくことにする．

3. 中心度関数の諸性質

Gの点の上で定義された式(1)の関数$f(r,G)$は係数$\{\alpha_l\}$によって定まる．しかし，それが中心度関数であるか否かはグラフ構造によるであろう．一方，グラフによらず，つまり任意のグラフ構造（点の重みは有限と限定されていたとしても）で式(1)の$f(r,G)$が中心度関数となる場合があるとすればどのような関数であろうか．このような関数は中心度関数の中で特別な位置を占めると考えられる．以下この関数を決めることにする．

〔定理1〕 式(1)の$f(r,G)$が各点に1以上の実数値重みをもつ任意の連結無向グラフGの中心度関数となるための必要十分条件は，係数$\{\alpha_l\}$が

$$\alpha_0>\alpha_1\geqq\alpha_2\geqq\cdots \tag{4}$$

$$2\alpha_l\leqq\alpha_{l-1}+\alpha_{l+1}\ (\forall l\geqq 1) \tag{5}$$

を同時に満たすことである．

（証明）

十分性の証明：$\{\alpha_l\}$が式(4)，(5)を満足しているとし，Vを

$S_p=\{r\mid d(p,r)<d(q,r)\}$

$S_0=\{r\mid d(p,r)=d(q,r)\}$

$S_q=\{r\mid d(p,r)>d(q,r)\}$

と分割する．S_p，S_0，S_qのそれぞれの代表元をr_p，r_0，r_qと表わす．Gのある2点間の距離が，2点p，qの一致により，減少したとすると，G'では必ずその2点間を結ぶ最短パスは点pを通る．ここで，Gの2点r_pとr_qの間の距離が2点p，qの一致により減少したとする．そして，G上で

$d(r_p,p)=A$，　$d(p,q)=B$

$d(p,r_q)=C$，　$d(r_p,r_q)=D$

とおくと，G'上では$0<B'\leqq B$なるB'が存在して

$d'(r_p,r_q)=C-B'+A$

$d'(p,r_q)=C-B'$

となる．ただし，$d'(r,s)$はG'上の2点rとsの間の距離を表わすものとする．また，ここで，$f(r_p,G')-f(r_p,G)$と$f(p,G')-f(p,G)$への点r_qの寄与分をそれぞれ$\partial_{r_q}f(r_p)$と$\partial_{r_q}f(p)$と表わすと，

$$\partial_{r_q} f(r_p) = (\alpha_{C-B'+A} - \alpha_D)\, x_{r_q} \tag{6}$$
$$\partial_{r_q} f(p) = (\alpha_{C-B'} - \alpha_C)\, x_{r_q} \tag{7}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned} &\partial_{r_q} f(p) - \partial_{r_q} f(r_p) \\ &\quad = (\alpha_{C-B'} - \alpha_C - \alpha_{C-B'+A} + \alpha_D)\, x_{r_q} \end{aligned} \tag{8}$$

となる．ところで，三角不等式

$$C + A \geqq D$$

と式(4)から

$$\alpha_{C+A} \leqq \alpha_D \tag{9}$$

となるから

$$\begin{aligned} &\partial_{r_q} f(p) - \partial_{r_q} f(r_p) \\ &\quad \geqq (\alpha_{C-B'} - \alpha_C - \alpha_{C-B'+A} + \alpha_{C+A})\, x_{r_q} \end{aligned} \tag{10}$$

が成り立つ．また，式(4)，(5)から容易に導かれる不等式として

$$\alpha_{C-B'} - \alpha_C \geqq \alpha_{C-B'+A} - \alpha_{C+A} \tag{11}$$

が成り立つから，$x_{r_q} \geqq 1$ を考慮して式(10)から

$$\partial_{r_q} f(p) - \partial_{r_q} f(r_p) \geqq 0 \tag{12}$$

を得る．

点 r_p を点 r_q との間の距離が２点 p，q の一致により不変であったとすると，$\partial_{r_q} f(r_q) = 0$ となるが，式(7)と式(4)から明らかなように S_q の任意の点 r_q に対して

$$\partial_{r_q} f(p) \geqq 0 \tag{13}$$

が成り立つから，結局，S_q の任意の点 r_q に対して

$$\partial_{r_q} f(p) - \partial_{r_q} f(r_p) \geqq 0 \tag{14}$$

が満たされることがわかる．

他方，点 r_p と $S_p \cup S_0$ の任意の点 r_x との間の距離は２点 p，q の一致により不変であるから，$\partial_{r_x} f(r_p) = 0$ となるが，点 p と $S_p \cup S_0$ の任意の点 r_x との間の距離も２点 p，q の一致により不変であるから，

$$\partial_{r_x} f(p) = 0 \tag{15}$$

となり，$S_p \cup S_0$ の任意の点 r_x に対して

$$\partial_{r_x} f(p) - \partial_{r_x} f(r_p) = 0 \tag{16}$$

が満たされることがわかる．

以上のことから

$$f(p, G') - f(p, G) \geqq f(r_p, G') - f(r_p, G) \tag{17}$$

また，式(4)，(7)，(13)，(15)より

$$f(p, G') - f(p, G) > 0 \tag{18}$$

が成り立つことがわかる．ただし，式(18)において等号が成り立たないのは，$f(p, G') - f(p, G)$ における点 r_q（$r_q = q$ の場合）の寄与分 $\partial_q f(p)$ が式(4)のもとで

$$\partial_q f(p) = (\alpha_0 - \alpha_B)\, x_q > 0 \tag{19}$$

となるからである．

ここで，特に説明しないが，

$$f(p, G') - f(q, G) > 0 \tag{20}$$
$$f(p, G') - f(q, G) \geqq f(r_q, G') - f(r_q, G) \tag{21}$$

が同様に示される．また，G' における点 r_0 から他のどの点への最短パスの長さも，２点 p，q の一致により不変であり，$f(r_0, G') - f(r_0, G) = 0$ となるから，式(4)と式(5)が同時に満たされるとき，$f(r, G)$ が G の中心度関数となることがわかる．

必要性の証明：図１のグラフ G と G' を考える．

$$\begin{aligned} f(p, G) &= \alpha_0 x_p + \alpha_1 (x_{r_p} + x_q) + \alpha_2 x_{s_1} + \alpha_3 x_{s_3} \\ &\quad + \cdots + \alpha_k x_{s_{k-1}} + \alpha_{k+1} (x_{t_1} + \cdots + x_{t_m}) \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} f(p, G') &= \alpha_0 (x_p + x_q) + \alpha_1 (x_{r_p} + x_{s_1}) + \alpha_2 x_{s_2} \\ &\quad + \cdots + \alpha_{k-1} x_{s_{k-1}} + \alpha_k (x_{t_1} + \cdots + x_{t_m}) \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} f(r_p, G) &= \alpha_0 x_{r_p} + \alpha_1 x_p + \alpha_2 x_q + \alpha_3 x_{s_1} + \cdots \\ &\quad + \alpha_{k+1} x_{s_{k-1}} + \alpha_{k+2} (x_{t_1} + \cdots + x_{t_m}) \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} f(r_p, G') &= \alpha_0 x_{r_p} + \alpha_1 (x_p + x_q) + \alpha_2 x_{s_1} + \cdots \\ &\quad + \alpha_k x_{s_{k-1}} + \alpha_{k+1} (x_{t_1} + \cdots + x_{t_m}) \end{aligned} \tag{25}$$

式(22)，(23)より

$$\begin{aligned} f(p, G') - f(p, G) &= (\alpha_0 - \alpha_1)\, x_q + (\alpha_1 - \alpha_2)\, x_{s_1} \\ &\quad + \cdots + (\alpha_{k-1} - \alpha_k)\, x_{s_{k-1}} + (\alpha_k - \alpha_{k+1})(x_{t_1} + \cdots \\ &\quad + x_{t_m}) \end{aligned} \tag{26}$$

式(24)，(25)より

$$\begin{aligned} f(r_p, G') - f(r_p, G) &= (\alpha_1 - \alpha_2)\, x_q + (\alpha_2 - \alpha_3)\, x_{s_1} \\ &\quad + \cdots + (\alpha_k - \alpha_{k+1})\, x_{s_{k-1}} + (\alpha_{k+1} - \alpha_{k+2})(x_{t_1} + \cdots \\ &\quad + x_{t_m}) \end{aligned} \tag{27}$$

式(26)において，$f(p, G') - f(p, G) > 0$ が任意のグラフにおいて成立するためには，

$k = 1$（点 s_1，s_2，…が無く，点 q に e_1，e_2，…，e_m が接続している場合），かつ $m = 0$，（$e_1 \cdots e_m$ が無い場合）のとき

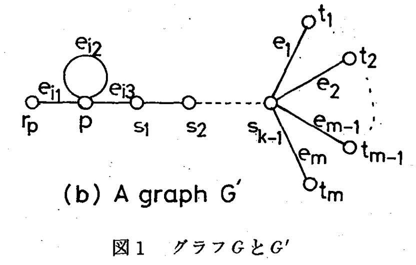


図１　グラフ G と G'
Fig.1–Graphs G and G'.

$$f(p, G)-f(p, G')=(\alpha_0-\alpha_1)\,x_q \tag{28}$$

$x_q \geqq 1$ より

$$\alpha_0>\alpha_1 \tag{29}$$

また，十分大きな m に対して $f(p, G')-f(p, G)>0$ であるためには $(x_{t_1}+\cdots+x_{t_m})$ が十分大きくなることから

$$\alpha_k \geqq \alpha_{k+1} \quad (k \geqq 1) \tag{30}$$

が必要となる．

次に，式(26)，(27)より

$$\{f(p, G')-f(p, G)\}-\{f(r_p, G')-f(r_p, G)\}$$
$$=(\alpha_0+\alpha_2-2\alpha_1)\,x_q+(\alpha_1+\alpha_3-2\alpha_2)\,x_{s_1}+\cdots+(\alpha_{k-1}+\alpha_{k+1}-2\alpha_k)\,x_{s_{k-1}}+(\alpha_k+\alpha_{k+2}-2\alpha_{k+1})(x_{t_1}+\cdots+x_{t_m}) \tag{31}$$

式(31)において，$k=1$，$m=0$ の場合及び十分大きな m に対して，$f(p, G')-f(p, G) \geqq f(r_p, G')-f(r_p, G)$ であるためには

$$\alpha_j+\alpha_{j+2} \geqq 2\alpha_{j+1} \quad (j=0, 1, 2, \cdots) \tag{32}$$

となる．式(29)，(30)より式(4)，(5)が得られる．また，$f(p, G')-f(q, G)>0$，かつ，$f(p, G')-f(q, G) \geqq f(r_q, G')-f(r_q, G)$ に対しても同様に式(4)，(5)が得られる．（証明終）

この定理は「任意の連結無向グラフ G について」という前提で述べられていることに注意されたい．特定の連結無向グラフについては式(4)，(5)は必ずしも必要とは限らない．

さて，G が連結でないとき，G の連結成分を G_1，G_2，…，G_c とし，各連結成分 G_i，$(1 \leqq i \leqq c)$ の点集合を V_i と表わし，各連結成分 G_i における最長の最短パスの長さを L_i と表わす．そのとき，連結成分 G_i の点 r に対して $f(r, G)$ は

$$f(r, G)=\sum_{l=0}^{L_i}\alpha_l\left(\sum_{s \in V_l(r)} x_s\right)+\alpha_\infty\left(\sum_{s \in V-V_i} x_s\right) \tag{33}$$

と表わされる．ここで，一致させられるべき2点 p，q がともに $V-V_i$ に含まれるときには，$f(r, G')=f(r, G)$ となる．また，一致させられるべき2点 p，q がともに $V-V_i$ に含まれないとき，すなわち V_i に含まれるときには，$f(r, G')$ は

$$f(r, G')=\sum_{l=0}^{L_i'}\alpha_l\left(\sum_{s \in V_l'(r)} x_s'\right)+\alpha_\infty\left(\sum_{s \in V-V_i} x_s\right) \tag{34}$$

となる．ただし，L_i' は G_i からの点 p，q の一致により得られるグラフにおける最長の最短パスの長さを表わす．また，一致させられるべき2点 p，q の一方，たとえば p が V_i に含まれ，他方が V_j $(i \neq j)$ に含まれるときには，$f(r, G')$ は

$$f(r, G')=\sum_{l=0}^{L_i''}\alpha_l\left(\sum_{s \in V_l'(r)} x_s'\right)+\alpha_\infty\left(\sum_{s \in V-(V_i \cup V_j)} x_s\right) \tag{35}$$

となる．ただし，L_i'' は G_i と G_j から2点 p，q の一致により得られるグラフにおける最長の最短パスの長さを表わす．ここで，式(33)と式(34)に対して

$$f(r, G')-f(r, G)=\sum_{l=0}^{L_i'}\alpha_l\left(\sum_{s \in V_l'(r)} x_s'\right)-\sum_{l=0}^{L_i}\alpha_l\left(\sum_{s \in V_l(r)} x_s\right) \tag{36}$$

が成り立ち，式(33)と式(35)に対して

$$f(r, G')-f(r, G)=(\alpha_k-\alpha_\infty)\,x_q+\sum_{l=1}^{L_j}(\alpha_{k+l}-\alpha_\infty)\left(\sum_{s \in V_l(q)} x_s\right) \tag{37}$$

が成り立つ．ただし，$k=d(r, p)$ である．すなわち，非連結グラフについて考えると，定理1の十分性の証明において，式(36)の場合は連結グラフの場合と変わらず，式(37)の場合（$B=\infty$ の場合であり）は式(4)の条件で十分となる．この事実より，次の定理が得られる．

〔定理2〕 式(1)の $f(r, G)$ が本論文で対象とする任意のグラフ G の中心度関数であるための必要十分条件は $\{\alpha_l\}$ が式(4)と式(5)を同時に満たすことである．

（証明略）

この定理より次の系が得られる．

〔系2－1〕 関数

$$f(r, G)=\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_l\,|V_l(r)| \tag{38}$$

が各点に単位重みをもつ任意の無向グラフ G の中心度関数となるための必要十分条件は $\{\alpha_l\}$ が式(4)と式(5)を同時に満たすことである．（証明略）

〔系2－2〕 関数

$$f(r, G)=\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_l\left(\sum_{s \in V_l(r)}\delta(s)\right) \tag{39}$$

が各点にその次数の重みをもつ孤立点を含まない任意の無向グラフ G の中心度関数となるための必要十分条件は $\{\alpha_l\}$ が式(4)と式(5)を同時に満たすことである．ただし，$\delta(s)$ は点 s の次数を表わす．（証明略）

式(38)の代表的な列としては

$$f_1(r, G)=\sum_{l=0}^{|V|}(|V|-l)\,|V_l(r)| \tag{40}$$

があり，式(39)の代表的な例としては

$$f_2(r, G)=\delta(r) \tag{41}$$

がある（ただし，$\alpha_0=1$，$\alpha_2=\alpha_3 \cdots=0$ の場合である）．ここで，従来からよく用いられる関数

$$f_3(r,G)=\sum_{l=0}^{|V|} l\,|V_l(r)| \tag{42}$$

は，梶谷，丸山の中心度関数の定義[1]の意味で各点に単位重みをもつ任意の連結無向グラフの中心度関数であるが，それは $f_1(r,G)$ との間に

$$f_1(r,G)+f_3(r,G)=|V|^2 \tag{43}$$

の関係を満たすものであることを注意しておく．

3．弱中心度関数と強中心度関数

中心度関数となるための条件(i)の不等号を等号含みの不等号に変えた条件

$$\text{(i}'\text{)}\ f(p,G')\geqq \max\{f(p,G),\ f(q,G)\} \tag{44}$$

と条件(ii)が同時に成り立つとき，式(1)の $f(r,G)$ を G の弱中心度関数ということにする．このとき，定理1の証明から容易に推察されるように，定理2と対比して，次の定理を得る．

〔定理3〕 式(1)の $f(r,G)$ が本論文で対象とする任意のグラフ G の弱中心度関数であるための必要十分条件は $\{\alpha_l\}$ が式(5)と

$$(1')\quad \alpha_0\geqq\alpha_1\geqq\alpha_2\cdots \tag{45}$$

を同時に満たすことである． （証明略）

また，条件(i)と(ii)とともに条件(iii)点 p， q 以外の任意の2点 u， v に対して

$$f(u,G')-f(u,G)=f(v,G')-f(v,G) \tag{46}$$

が同時に成り立つとき，式(1)の $f(r,G)$ を G の強中心度関数ということにする．

〔定理4〕 式(1)の $f(r,G)$ が本論文で対象とする任意のグラフ G の強中心度関数であるための必要十分条件は $\{\alpha_l\}$ が

$$(3)\quad \alpha_0>\alpha_1=\alpha_2=\cdots \tag{47}$$

を満たすことである．

（証明）

十分性の証明：式(47)は式(4)と式(5)の特殊な場合であるから，$f(r,G)$ が本論文で対象とする任意のグラフの強中心度関数なら，$f(r,G)$ は本論文で対象とする任意のグラフの中心度関数でもある．すなわち，条件(i)と(ii)が成り立つ．次に，式(47)を式(1)に代入すると，

$$f(r,G)=\alpha_0 x_r+\alpha_1\left(\sum_{s\in V-\{r\}} x_s\right) \tag{48}$$

となる．ここで，一致させられるべき2点 p， q がともに $V-\{r\}$ にあるとすると，$f(r,G')=f(r,G)$ が成り立つ．したがって，点 p， q 以外の任意の2点 u， v に対して

$$f(u,G')-f(u,G)=f(v,G')-f(v,G)=0 \tag{49}$$

となり，条件(iii)が成り立つ．

必要性の証明：条件(i)，(ii)が成立することから定理2より

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_0>\alpha_1\geqq\alpha_2\cdots\\ 2\alpha_l\leqq\alpha_{l-1}+\alpha_{l+1}\end{array}\right\} \tag{50}$$

が必要である．次に図2のグラフ G， G' を考える．

$$f(r_1,G)=\alpha_0 x_{r_1}+\alpha_1 x_{r_2}+\cdots+\alpha_{k-1}x_{r_k}+\alpha_k x_p+\alpha_{k+1}(x_{t_1}+\cdots+x_{t_m}+x_q)+\alpha_{k+2}x_{s_k}+\cdots+\alpha_{2k+1}x_{s_1} \tag{51}$$

$$f(r_1,G')=\alpha_0 x_{r_1}+\alpha_1 x_{r_2}+\cdots+\alpha_{k-1}x_{r_k}+\alpha_k(x_p+x_q)+\alpha_{k+1}(x_{t_1}+\cdots+x_{t_m}+x_{r_k})+\alpha_{k+2}x_{s_{k-1}}+\cdots+\alpha_{2k}x_{s_1}) \tag{52}$$

$$f(s_1,G)=\alpha_0 x_{s_1}+\alpha_1 x_{s_2}+\cdots+\alpha_{k-1}x_{s_k}+\alpha_k x_q+\alpha_{k+1}x_p+\alpha_{k+2}(x_{t_1}+\cdots+x_{t_m}+x_{r_k})+\alpha_{k+3}x_{r_{k-1}}+\cdots+\alpha_{2k+1}x_{r_1} \tag{53}$$

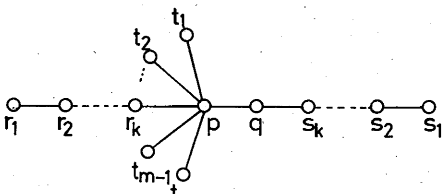
$$f(s_1,G')=\alpha_0 x_{s_1}+\alpha_1 x_{s_2}+\cdots+\alpha_{k-1}x_{s_k}+\alpha_k(x_p+x_q)+\alpha_{k+1}(x_{t_1}+\cdots+x_{t_m}+x_{r_k})+\alpha_{k+2}x_{r_{k-1}}+\cdots+\alpha_{2k}x_{r_1} \tag{54}$$

$$f(r_2,G)=\alpha_0 x_{r_2}+\alpha_1(x_{r_1}+x_{r_3})+\alpha_2 x_{r_4}+\cdots+\alpha_{k-2}x_{r_k}+\alpha_{k-1}x_p+\alpha_k(x_{t_1}+\cdots+x_{t_m}+x_q)+\alpha_{k+1}x_{s_k}+\alpha_{k+2}x_{s_{k-1}}+\cdots+\alpha_{2_k}x_{s_1} \tag{55}$$

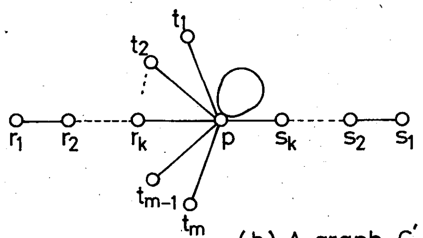
$$f(r_2,G')=\alpha_0 x_{r_2}+\alpha_1(x_{r_1}+x_{r_3})+\cdots+\alpha_{k-2}x_{r_k}+\alpha_{k-1}(x_p+x_q)+\alpha_k(x_{t_1}+\cdots+x_{t_m}+x_{s_k})+\alpha_{k+1}x_{s_{k-1}}+\cdots+\alpha_{2_{k-1}}x_{s_1} \tag{56}$$

式(51)，(52)より

$$f(r_1,G')-f(r_1,G)=(\alpha_k-\alpha_{k+1})x_q+(\alpha_{k+1}-x_{k+2})x_{s_k}+\cdots+(\alpha_{2k}-\alpha_{2k+1})x_{s_1} \tag{57}$$



(a) A graph G



(b) A graph G'

図2 グラフ G と G'
Fig.2–Graphs G and G'.

式(53), (54)より

$$f(s_1, G')-f(s_1, G)=(\alpha_k-\alpha_{k+1})x_p+(\alpha_{k+1}-\alpha_{k+2})(x_{t_1}+\cdots+x_{t_m}+x_{r_k})+(\alpha_{k+2}-\alpha_{k+3})x_{r_{k-1}}+\cdots+(\alpha_{2k}-\alpha_{2k+1})x_{r_1} \tag{58}$$

式(55), (56)より

$$f(r_2, G')-f(r_2, G)=(\alpha_{k-1}-\alpha_k)x_q+(\alpha_k-\alpha_{k+1})x_{s_k}+\cdots+(\alpha_{2k-1}-\alpha_{2k})x_{s_1} \tag{59}$$

式(46)を満足させるためには式(57), (58), (59)が等しくなければならない．まず式(57), (58)より

$$\{f(s_1, G')-f(s_1, G)\}-\{f(r_1, G')-f(r_1, G)\}=(\alpha_k-\alpha_{k+1})(x_p-x_q)+(\alpha_{k+1}-\alpha_{k+2})(x_{t_1}+\cdots+x_{t_m}+x_{r_k}-x_{s_k})+(\alpha_{k+2}-\alpha_{k+3})(x_{r_{k-1}}-x_{s_{k-1}})+\cdots+(\alpha_{2k}-\alpha_{2k-1})(x_{r_1}-x_{s_1}) \tag{60}$$

ここで，十分大きな m に対して，$(x_{t_1}+\cdots+x_{t_m})$ は十分大きくなるから，式(60)が零となるためには

$$\alpha_{k+1}=\alpha_{k+2} \quad (k\geqq 1) \tag{61}$$

が必要となる．ただし，(r_1, s_1 は p, q と一致しては意味がないから）$k\geqq 1$ である．

次に，式(57), (59)より

$$\{f(r_1, G')-f(r_1, G)\}-\{f(r_2, G')-f(r_2, G)\}=(2\alpha_k-\alpha_{k+1}-\alpha_{k-1})x_q+(2\alpha_{k+1}-\alpha_{k+2}-\alpha_k)\cdot x_{s_k}+(2\alpha_{k+2}-\alpha_{k+3}-\alpha_{k+1})x_{s_{k-1}}+\cdots+(2\alpha_{2k}-\alpha_{2k+1}-\alpha_{2k-1})x_{s_1} \tag{62}$$

ただし，式(62)は r_2 が p と一致しては意味がないから，$k\geqq 2$ とする．

任意の $k\geqq 2$ に対して式(62)が零となる必要がある．$k=2$ とすると

$$\{f(r_1, G')-f(r_1, G)\}-\{f(r_2, G')-f(r_2, G)\}=(2\alpha_2-\alpha_3-\alpha_1)x_q+(2\alpha_3-\alpha_4-\alpha_2)x_{s_2}+x_{s_2}+(2\alpha_4-\alpha_5-\alpha_3)x_{s_1} \tag{63}$$

式(61)を適用すると

$$\{f(r_1, G')-f(r_1, G)\}-\{f(r_2, G')-f(r_2, G)\}=(\alpha_2-\alpha_1)x_q \tag{64}$$

$x_q\geqq 1$ より

$$\alpha_1=\alpha_2 \tag{65}$$

ゆえに，式(50), (61), (65)より

$$\alpha_0>\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\cdots \tag{66}$$

（証明終）

この定理から，種々の強中心度関数の例が上げられる．例えば，式(1)と式(39)の中心度関数において，$\alpha_0=1$, $\alpha_2=\alpha_3=\cdots=0$ とすると，それぞれ，

$$f_4(r, G)=x_r \tag{67}$$

$$f_2(r, G)=\delta(r) \tag{68}$$

が得られる．なお，式(68)の中心度関数は梶谷，丸山[(1)]による狭義の中心度関数に対応するものであることを注意しておく．

5．中心度関数に関する考察

ネットワーク構造を有するシステム（通信網，交通網，社会集団等）をグラフでモデル化して，点の中心らしさ（重要性，地位等）の度合について論ずる場合種々の考え方があるであろう．交通網の一つである道路網の場合，都市を中心に，道路を枝に対応させたグラフを考えたとする．道路のない都市間に新たに道路を作った（枝付加に対応）とするとその両端の都市のある種の地位は向上し，その向上の度合は近傍の都市より大きいと考えられる．また，2つの都市が合併した（2点の一致に対応）とするとその合併した都市のある種の地位は向上し，その向上の度合は近傍の都市より大きいと考えるのも自然である．さらに，社会集団構造を考えた場合，2つの集団の合併によって，その集団の中心らしさが増加し，その増加の度合は他の集団より大きいであろうと考えるのも常識的である．通信網等についても同様の事が言えるであろう．前者（枝付加）に対応する考えは梶谷，丸山[(1)]によるものであり，後者（2点一致）に対応する考え方を定式化したものが本論文の中心度関数である．

中心らしさの度合に関するその他の考え方として，例えば，道路網の例で言うと次のようなものがある．(a)出来るだけ近くに多くの都市がある方がその都市は中心らしい．(b)自分自身に道路が多く接続されており，かつ，多くの道路が接続されている都市が出来るだけ近くにあるほうが中心らしい．(c)他の都市とは無関係に自分自身の中心らしさで都市の中心は決定されてしまう．等．これらの考え方は，実は式(1)の中心度関数で表現できるのである．すなわち，(a), (b)及び(c)の考えはそれぞれ式(38), (39)及び式(67)に対応している．なお，(b), (c)の考え方は梶谷，丸山の関数では表現できない．もちろん，式(1)はすべての中心らしさの度合を表現できる訳ではない．しかし，式(1)は従来より一般化された形をしているため，より多くの考えに適用できる点に注目すべきである．特に，枝に重みが付けられたグラフに対しても，枝の重みを点の重みに加味して付けることにより考察できる点は興味深い．例えば，〔系2－2〕の式(39)において，点の重みとして次数でなく，その点に接続している枝の重みの和として得られる関数である．

次に，本論文では，点の重みは1以上である無向グ

ラフのクラスを対象としたが，これに関して補足しておく．本論文の定理は点の重みが１以上である任意のグラフについて成立するものであるが，定理の証明からわかるように必ずしも各点の重みが１以上である必要はない．十分大きな数だけの点に対して，それらの重みの和が十分大きくなるような重みをもつ無向グラフに対してもこれらの定理は成立するが，十分大きな数だけの点に対して，それらの重みの和がある値に収束するような点の重みをもつ無向グラフに対してはこれらの定理は成立しない（例えば定理１で，式(4)，(5)は十分条件となる）．すなわち，各点の重みが１以上ではなく各点が正の実数値重みを持ち，十分大きな数の点に対して，それらの重みの和が十分大きくなるような無向グラフに対しても本論文の結果は適用できる点に注意すべきである．なお，各点の相対的重みのみが重要なモデルの場合は，各点の重みを１以上としても特に支障はない．

6．むすび

各点に１以上（必ずしも１以上でなくても良い）の実数値重みを持つ無向グラフを対象として，点の上で定義される中心らしさを表わす関数（中心度関数）について考察し，中心度関数の具備すべき条件を，２点一致というグラフ変形による関数値変化分の傾向の条件として定式化した．グラフの点の上で定義される関数として，着目している点からの距離で分類した点の重みの和の線形結合で表わしたものを考え，その関数が対象とする任意のグラフの中心度関数となるための必要十分条件として，係数系列が離散的な意味で，単調減少かつ下方に凸の性質をもつという結果を得た．

また，弱中心度関数と強中心度関数というべきものを定義し，我々の導入した関数が対象とする任意のグラフの弱と強のそれぞれの中心度関数となるための必要十分条件も係数系列による条件として与えた．これらの結果はグラフの点の中心らしさのより多くの考え方に適応できるものである．

梶谷，丸山[1]が非隣接点対への枝付加というグラフ変形に基づく中心度関数の定義を行なったのに対し，我々は２点一致というグラフ変形に基づく中心度関数の定義を行なったが，結果における類似性，及び形式的には梶谷，丸山の関数を含む点は興味深い．特に，強中心度関数の我々の定義は，梶谷，丸山によるものと思想的には異なる形式であるにもかかわらず，その結果における類似性は強調に値する．

本論文の結果の有向グラフへの拡張は今後の課題であるが，その他興味ある問題として

(1) 枝付加というグラフ変形に基づく中心度関数の定義の意味で，我々の導入した関数が対象とする任意のグラフの中心度関数となるための必要十分条件を求めること．

(2) 枝付加と２点一致の両グラフ変形に基づく中心度関数の定義の意味で，我々の導入した関数が対象とする任意のグラフの中心度関数となるための必要十分条件を求めること．

(3) ２点一致や枝付加というグラフ変形と中心らしい点の集合との関係を調べること．

等がある．

謝辞　本研究の動機づけをしていただいた東京工業大学大学院の 岸 源也教授及び同大学工学部の梶谷洋司助教授，ならびに日頃御指導頂く新潟大学工学部，阿部武雄教授に深謝する次第である．

また，本研究は文部省科学研究費補助金総合研究(A) 00435013「大規模システムにおける解析・設計・制御に関する基礎研究」（昭和５４年度～昭和５６年度）の援助によるものであることをここに付記しておく．

文　献

(1) 梶谷，丸山：“グラフにおける中心度関数表示－通信網の評価への応用－”，信学論(A)，J59-A，7，pp.531-538（昭51-07）.

(2) Kajitani, Y.：“Centrality of vertices in a graph”, Proc. of 1979 Internasional Colloquium on Circuits and Systems, Taipei, pp.43-46 (July 1979).

(3) 岸，竹内：“有向グラフの中心度関数”，信学技報，CST77-10, 6 (1979).

(4) Kishi, G.：“On centrality functions of a graph”, in Graph Theory and Algorithms (ed. by N. Saito and T. Nishizeki), Lecture Notes in Computer Science, 108, Springer-Verlag, pp.45-52 (1980).

(5) 仙石，篠田：“グラフにおける点の中心らしさを表わす関数について”，信学技報，CAS81-112 (1982-02).

(6) 仙石，石崎，篠田，梶谷：“グラフにおける新しい狭義の中心度関数”，昭57信学総全大，32.

（昭和57年2月9日受付）