UDC 519.176

距離空間における点の中心らしさを表わす関数の公理論的基礎づけ

正 員 篠田 庄司† 正 員 仙石 正和††

Axiomatic Foundations of the Theories of Functions Expressing the Mediality of a Point in Metric Space

Shoji SHINODA† *and* Masakazu SENGOKU††, *Regular Members*

あらまし 通信網，交通網，社会集団関係等ネットワーク構造を有するシステムをグラフでモデル化した場合，点の中心らしさ（重要性等）を論ずる必要が生ずる場合が多い．そのため，点の中心らしさを表わす種々の表示式が知られている．さらに，これらのいくつかを含む一般式（グラフの中心度関数と呼ばれる．）が提案され，それは枝の付加又は2点一致というグラフの変形に対する関数値変化の傾向の条件として定式化されている．本文では点に重みを有する距離空間上の点の中心らしさを表わす関数（中心度関数と呼ぶ）の公理論的基礎づけを行なう．この中心度関数の公理系は距離空間の2点間を縮小し，一つの縮小距離空間を作ったときの関数値の変化の傾向として定義される．そして，着目している点からの距離で分類された点の重みの和で表わされる形式の中心度関数について，その特徴付けを行ない，任意の距離空間又は任意の点の重みに対してこの関数が中心度関数となるための必要十分条件を求めている．これらの結果は，従来の枝付加又は2点一致によるグラフの中心度関数の理論を特別の場合として含み，さらに枝に長さを有するシステムにも適用可能な統一的な理論となっている．

1. まえがき

通信網，交通網，社会集団関係等ネットワーク構造を有するシステムをグラフでモデル化した場合，点の中心らしさ（重要性等）を論ずる必要が生ずる場合が多い．そのため，点の中心らしさを表わす種々の表示式が考えられてきた[(1),(2)]．そして，この中心らしさを表わす表示式のいくつかを含むような一般式が提案され，中心度関数と呼ばれている[(3)〜(9)]．この中心度関数の定義は枝の付加[(3)〜(6),(9)]または2点一致[(7),(8)]というグラフの変化に基づく関数値の変化の傾向を用いてなされている．特に文献(7)，(8)はグラフの各点に重みが付いた場合について論じており，文献(9)も点に重みがある場合も含む一般化されたものとなっている．これらの具体的関数はいずれも点集合を距離によって分類した形式を有している．そこで，小文では点間の距離が与えられたいわゆる距離空間においても同様の議論が出来るのではないかという点に注目する．そして，点に重みを有する距離空間上の点の中心らしさを表わす関数を公理論的に定義し，距離で分類された点の重みの和で表わされる中心度関数の特徴付けを行ない，任意の距離空間又は任意の重みに対してこの関数が中心度関数となるための必要十分条件を導く．その結果は，従来の無向グラフの中心度関数を特別の場合として含み，さらに枝に長さを有するシステムにも適用可能な統一的なものとなっている．

2. 距離空間と距離空間の縮小

Sは空でない集合とする．$S\times S$から$\bar{\boldsymbol{R}}^{+}$（非負実数の集合）への写像ρ，

$$\rho : S\times S\rightarrow \bar{\boldsymbol{R}}^{+} \tag{1}$$

が与えられているとし，$\rho(s_1, s_2)\geqq 0$，（$s_1, s_2, s_3\in S$）に対して，次の条件が満たされているとする．

［i］ $\rho(s_1, s_2)=0 \Leftrightarrow s_1=s_2$ (2)

［ii］ $\rho(s_1, s_2)=\rho(s_2, s_1)$ (3)

［iii］ $\rho(s_1, s_3)\leqq \rho(s_1, s_2)+\rho(s_2, s_3)$ (4)

このとき，（S；ρ）はρを距離関数（distance function）とする距離空間（metric space）といわれて

† 中央大学理工学部電気工学科，東京都
Faculty of Science and Engineering, Chuo University, Tokyo, 112 Japan
†† 新潟大学工学部情報工学科，新潟市
Faculty of Engineering, Niigata University, Niigata-shi, 950-21 Japan
論文番号：昭58−論155［A−41］

いる．$\rho(s_1, s_2)$ は s_1 と s_2 の距離といわれ，S の元は“点”と呼ばれる．なお，[i]の代わりに（条件を弱めて）

[i]′　$\rho(s_1, s_1)=0$

で置きかえたとき，$(S ; \rho)$ は擬距離空間（pseudo-metric space）といわれ，[i]（[i]′）～[iii] は距離公理と呼ばれている．

さて，S の特定の２点 p, q に対して，２点 p, q の距離 $\rho(p, q)$ が非負実数 $\lambda \leqq \rho(p, q)$ に変化した場合，つまり

$$\rho(p, q) \rightarrow \lambda \tag{5}$$

を考える．このとき $\lambda=\rho(p, q)$ の場合（変化しない場合）はもちろん距離公理を満足するが，$\lambda<\rho(p, q)$ の場合，一般には距離公理を満足しなくなる．式(5)のような変化に対して，S 上の他の点の間の距離を適当に変更することにより再び距離公理を満足するようにできる．最も簡単には，任意の２点 $s_1, s_2 \in S$ に対して，

$$\rho(s_1, s_2) \rightarrow \lambda, \quad (s_1 \fallingdotseq s_2) \tag{6}$$

とすればよい．このような S 上の点の間の距離の変更は距離関数の変更に対応している．式(5)のような変化に対して，S 上の他の点の間の距離の変化は種々考えられ，変化後の距離が距離公理を満足するような距離の変化も種々あるであろう．式(6)は式(5)の変化に対して，他の点間の距離が全て（はじめから，$\rho(s_1, s_2)=\lambda$ の点は不変）変化している．このように全ての点間の距離が変化するのではなく，ある程度元の距離の状態が保存されるように距離を変化させることもできる．式(5)に対して，各点の距離を次のように変更（新たな距離関数 ρ'，これが距離関数であるかはまだ不明であるが一応そうする．）することを考えてみる．

$$\rho'(s_1, s_2)=\min\{\rho(s_1, s_2),\ \rho(s_1, p)+(s_2, q)+\lambda, \rho(s_1, q)+\rho(s_2, p)+\lambda\} \tag{7}$$

ただし，$0 \leqq \lambda \leqq \rho(p, q)$

このような ρ' に対して，次の定理が成立する．

［定理１］

距離空間 $(S ; \rho)$ に対して，各点間の距離を式(7)のように変更した場合，$(S ; \rho')$ は距離空間または擬距離空間（$\lambda=0$ の場合）になる．

（証明）

以下，$(S ; \rho')$ が距離公理 [i] or [i]′，[ii]，[iii] を満足することを証明する．

[a]．[i] 又は [i]′ について．

式(7)で，$s_1=s_2$ とすると，$\rho(s_1, s_2)=0$ であるから，明らかに $\rho'(s_1, s_2)=0$ である．逆に，$\rho'(s_1, s_2)=0$，かつ $\lambda>0$ とする．式(7)より

$$\rho(s_1, s_2)=0 \tag{8}$$

$$\rho(s_1, p)+\rho(s_2, q)+\lambda=0 \tag{9}$$

$$\rho(s_1, q)+\rho(s_2, p)+\lambda=0 \tag{10}$$

のいずれかである．式(8)の場合，式(2)より，$s_1=s_2$．式(9)の場合，各項は非負実数であるから各項は零となる．すなわち，$p=s_1$，$q=s_2$，$\lambda=0$ となる．これは矛盾．よって $s_1=s_2$．式(10)の場合も同様．なお，$\lambda=0$ のとき，擬距離空間になる．

[b]．[ii] について．

$\rho(s_1, s_2)=\rho(s_2, s_1)$ であることから，式(7)において，

$$\begin{aligned}\rho'(s_1, s_2) &= \min\{\rho(s_1, s_2),\ \rho(s_1, p)+\rho(s_2, q)+\lambda, \rho(s_1, q)+\rho(s_2, p)+\lambda\} \\ &= \min\{\rho(s_2, s_1),\ \rho(s_2, p)+\rho(s_1, q)+\lambda, \rho(s_2, q)+\rho(s_1, p)+\lambda\} \\ &= \rho'(s_2, s_1)\end{aligned} \tag{11}$$

ゆえに，ρ' は [ii] を満足する．

[c]．† [iii] について．

式(7)より

$$\rho'(s_1, s_3)=\min\{\rho(s_1, s_3),\ \rho(s_1, p)+\rho(s_3, q)+\lambda, \rho(s_1, q)+\rho(s_3, p)+\lambda\} \tag{12}$$

$$\rho'(s_1, s_2)=\min\{\rho(s_1, s_2),\ \rho(s_1, p)+\rho(s_2, q)+\lambda, \rho(s_1, q)+\rho(s_2, s_3)+\lambda\} \tag{13}$$

$$\rho'(s_2, s_3)=\min\{\rho(s_2, s_3),\ \rho(s_2, p)+p(s_3, q)+\lambda, \rho(s_2, q)+\rho(s_3, p)+\lambda\} \tag{14}$$

これより，三角不等式

$$\rho'(s_1, s_3) \leqq \rho'(s_1, s_2)+\rho'(s_2, s_3) \tag{15}$$

を証明すればよい．$\rho'(s_1, s_3)$，$\rho'(s_1, s_2)$，$\rho'(s_2, s_3)$ の値のとり方により種々の場合（状態）がある．記述の便利のために，$s_{i,j,k}$ $(i, j, k=1 \sim 3)$ は，$\rho'(s_1, s_3)$ は式(12)の第 i 項，$\rho'(s_1, s_2)$ は式(13)の第 j 項，$\rho'(s_2, s_3)$ は式(14)の第 k 項の場合を表わすこととする．状態 $s_{i,j,k}$ は $s_{1,1,1}$，$s_{1,1,2}$，…，$s_{3,3,3}$ まで 27 通りあるが，p と q 及び s_1 と s_3 の対称性により，次の 10 通りの場合について証明すればよい．

〈1〉 $s_{1,1,1}$ の場合：式(4)より明らか．

〈2〉 $s_{1,1,2}$，$s_{1,1,3}$，$s_{1,2,1}$，$s_{1,3,1}$ の場合：$s_{1,1,2}$ について証明する（その他の場合は，以下の証明で p と

† この部分は，例えばネットワークの概念に基づく簡潔な証明も存在するが（加納幹雄氏からも私信があった．），ここでは少し長いが，ネットワークの概念を用いない距離空間の定義に沿った組合わせ的証明を採用した．

q 又は s_1 と s_3 又はその両方を交換すればよい）.

$$\rho'(s_1, s_3)=\rho(s_1, s_3) \tag{16}$$

$$\rho'(s_1, s_2)=\rho(s_1, s_2) \tag{17}$$

$$\rho'(s_2, s_3)=\rho(s_2, p)+\rho(s_3, q)+\lambda \tag{18}$$

式(12), (16)より, $\rho(s_1, s_3)\leqq\rho(s_1, p)+\rho(s_3, q)+\lambda_0$. 式(18)を代入して,

$$\rho(s_1, s_3)\leqq\rho(s_1, p)+\rho'(s_2, s_3)-\rho(s_2, p) \tag{19}$$

ところで, 式(4)より, $\rho(s_1, p)-\rho(s_2, p)\leqq\rho(s_1, s_2)$. ゆえに式(19)は $\rho(s_1, s_3)\leqq\rho'(s_2, s_3)+\rho(s_1, s_2)$. つまり, 式(16), (17)より式(15)が成立.

〈3〉 $s_{1,2,2}$, $s_{1,3,3}$ の場合：$s_{1,2,2}$ について証明する（$s_{1,3,3}$ は以下の証明で p と q を交換すればよい）.

$$\rho'(s_1, s_3)=\rho(s_1, s_3) \tag{20}$$

$$\rho'(s_1, s_2)=\rho(s_1, p)+\rho(s_2, q)+\lambda \tag{21}$$

$$\rho'(s_2, s_3)=\rho(s_2, p)+\rho(s_3, q)+\lambda \tag{22}$$

式(12), (20)より, $\rho(s_1, s_3)\leqq\rho(s_1, p)+\rho(s_3, q)+\lambda$. 式(21)を代入して

$$\rho(s_1, s_3)\leqq\rho'(s_1, s_2)-\rho(s_2, q)+\rho(s_3, q) \tag{23}$$

ところで, $0\leqq\rho(s_2, p)+\rho(s_2, q)+\lambda$. この両辺に $\rho(s_3, q)$ を加え変形すると, $\rho(s_3, q)-\rho(s_2, q)\leqq\rho(s_2, p)+\rho(s_3, q)+\lambda$. 式(22)を代入すると,

$$\rho(s_3, q)-\rho(s_2, q)\leqq\rho'(s_2, s_3) \tag{24}$$

式(23), (24)より, $\rho(s_1, s_3)\leqq\rho'(s_1, s_2)+\rho'(s_2, s_3)$. ゆえに式(20)より式(15)が成立.

〈4〉 $s_{1,2,3}$, $s_{1,3,2}$ の場合：$s_{1,2,3}$ について証明する（$s_{1,3,2}$ は以下の証明で p と q を交換すればよい）.

$$\rho'(s_1, s_3)=\rho(s_1, s_3) \tag{25}$$

$$\rho'(s_1, s_2)=\rho(s_1, p)+\rho(s_2, q)+\lambda \tag{26}$$

$$\rho'(s_1, s_3)=\rho(s_1, q)+\rho(s_3, p)+\lambda \tag{27}$$

式(4)より, $\rho(s_1, s_3)\leqq\rho(s_1, p)+\rho(s_3, p)$. $\rho(s_2, q)+\lambda\geqq 0$ であるから,

$$\rho(s_1, s_3)\leqq\{\rho(s_1, p)+\rho(s_2, q)+\lambda\} + \{\rho(s_3, p)+\rho(s_2, q)+\lambda\} \tag{28}$$

式(26), (27)を式(28)へ代入して, $\rho(s_1, s_3)\leqq\rho'(s_1, s_2)+\rho'(s_2, s_3)$. ゆえに式(25)より式(15)が成立.

〈5〉 $s_{2,1,1}$, $s_{3,1,1}$ の場合：$s_{2,1,1}$ について証明する（$s_{3,1,1}$ は以下の証明で p と q を交換すればよい）.

$$\rho'(s_1, s_3)=\rho(s_1, p)+\rho(s_3, q)+\lambda \tag{29}$$

$$\rho'(s_1, s_2)=\rho(s_1, s_2) \tag{30}$$

$$\rho'(s_2, s_3)=\rho(s_2, s_3) \tag{31}$$

式(12), (29)より,

$$\rho'(s_1, s_3)\leqq\rho(s_1, s_3) \tag{32}$$

式(4)と式(30), (31)より

$$\rho(s_1, s_3)\leqq\rho(s_1, s_2)+\rho(s_2, s_3) \leqq\rho'(s_1, s_2)+\rho'(s_2, s_3) \tag{33}$$

ゆえに式(32), (33)より式(15)が成立.

〈6〉 $s_{2,2,1}$, $s_{3,3,1}$, $s_{2,1,2}$, $s_{3,1,3}$ の場合：$s_{2,2,1}$ について証明する（その他の場合は, 以下の証明で p と q 又は s_1 と s_3 又はその両方を交換すればよい）.

$$\rho'(s_1, s_3)=\rho(s_2, p)+\rho(s_3, q)+\lambda \tag{34}$$

$$\rho'(s_1, s_2)=\rho(s_2, p)+\rho(s_3, q)+\lambda \tag{35}$$

$$\rho'(s_2, s_3)=\rho(s_2, s_3) \tag{36}$$

式(4)より, $\rho(s_3, q)\leqq\rho(q, s_2)+\rho(s_2, s_3)$. 両辺に $\rho(s_1, p)+\lambda\geqq 0$ を加えると, $\rho(s_3, q)+\rho(s_1, p)+\lambda\leqq\rho(q, s_2)+\rho(s_1, p)+\lambda+\rho(s_2, s_3)$. ゆえに, 式(34)～(36)より式(15)が成立.

〈7〉 $s_{2,3,1}$, $s_{3,2,1}$, $s_{2,1,3}$, $s_{3,1,2}$ の場合：$s_{2,3,1}$ について証明する（その他の場合は, 以下の証明で p と q 又は s_1 と s_3 又はその両方を交換すればよい）.

$$\rho'(s_1, s_3)=\rho(s_1, p)+\rho(s_3, q)+\lambda \tag{37}$$

$$\rho'(s_1, s_2)=\rho(s_1, q)+\rho(s_2, p)+\lambda \tag{38}$$

$$\rho'(s_2, s_3)=\rho(s_2, s_3) \tag{39}$$

式(12), (37)より, $\rho'(s_1, s_3)\leqq\rho(s_1, q)+\rho(s_3, p)+\lambda$. 式(38)を代入して,

$$\rho'(s_1, s_3)\leqq\rho'(s_1, s_2)+\rho(s_3, p)-\rho(s_2, p) \tag{40}$$

式(4)より, $\rho(s_3, p)-\rho(s_2, p)\leqq\rho(s_2, s_3)$. 式(40)へ代入して, 式(15)を得る.

〈8〉 $s_{2,2,2}$, $s_{3,3,3}$ の場合：$s_{2,2,2}$ について証明する（$s_{3,3,3}$ は以下の証明で p と q を交換すればよい）.

$$\rho'(s_1, s_3)=\rho(s_1, p)+\rho(s_3, q)+\lambda \tag{41}$$

$$\rho'(s_1, s_2)=\rho(s_1, p)+\rho(s_2, q)+\lambda \tag{42}$$

$$\rho'(s_2, s_3)=\rho(s_2, p)+\rho(s_3, q)+\lambda \tag{43}$$

$0\leqq\rho(s_2, q)+\rho(s_2, p)+\lambda$ の両辺に, $\rho(s_1, p)+\rho(s_3, q)+\lambda$ を加えると,

$$\rho(s_1, p)+\rho(s_3, q)+\lambda \leqq\{\rho(s_1, p)+\rho(s_2, q)+\lambda\} + \{\rho(s_2, p)+\rho(s_3, q)+\lambda\} \tag{44}$$

ゆえに式(41)～(43)より式(15)が成立.

〈9〉 $s_{2,3,2}$, $s_{3,2,3}$, $s_{2,2,3}$, $s_{3,3,2}$ の場合：$s_{2,3,2}$ について証明する（その他の場合は p と q 又は s_1 と s_3 又はその両方を交換すればよい）.

$$\rho'(s_1, s_3)=\rho(s_1, p)+\rho(s_3, q)+\lambda \tag{45}$$

$$\rho'(s_1, s_2)=\rho(s_1, q)+\rho(s_2, p)+\lambda \tag{46}$$

$$\rho'(s_2, s_3)=\rho(s_2, p)+\rho(s_3, q)+\lambda \tag{47}$$

式(12), (45)より, $\rho(s_1, p)+\rho(s_3, q)+\lambda\leqq\rho(s_1, s_3)$. ところで, 式(4)より $\rho(s_1, s_3)\leqq\rho(s_1, q)+$

$\rho(s_3, q)$，ゆえに

$$\rho(s_1, p) + \lambda \leqq \rho(s_1, q) \tag{48}$$

また，式(46)と式(4)より，同様に，

$$\rho(s_1, q) + \lambda \leqq \rho(s_1, p) \tag{49}$$

式(48)，(49)と $\lambda \geqq 0$ より

$$\lambda = 0 \tag{50}$$

ゆえに，式(48)，(49)より

$$\rho(s_1, p) = \rho(s_1, q) \tag{51}$$

式(45)〜(47)，(50)，(51)より，$\rho'(s_1, s_2) + \rho'(s_2, s_3) = \rho(s_1, p) + \rho(s_3, q) + 2\rho(s_2, p) = \rho'(s_1, s_3) + 2\rho(s_2, p)$．ここで，$2\rho(s_2, p) \geqq 0$ であることから，式(15)を得る．

〈10〉 $s_{2,3,3}$，$s_{3,2,2}$ の場合：$s_{2,3,3}$ について証明する（$s_{3,2,2}$ の場合は p と q を交換すればよい）．

$$\rho'(s_1, s_3) = \rho(s_1, p) + \rho(s_3, q) + \lambda \tag{52}$$

$$\rho'(s_1, s_2) = \rho(s_1, q) + \rho(s_2, p) + \lambda \tag{53}$$

$$\rho'(s_2, s_3) = \rho(s_2, q) + \rho(s_3, p) + \lambda \tag{54}$$

式(52)，(4)より，$\rho(s_1, p) + \rho(s_3, q) + \lambda \leqq \rho(s_1, s_3) \leqq \rho(s_1, q) + \rho(s_3, q)$．ゆえに，

$$\rho(s_1, p) + \lambda \leqq \rho(s_1, q) \tag{55}$$

また同様に，

$$\rho(s_3, q) + \lambda \leqq \rho(s_3, p) \tag{56}$$

式(53)，(4)より同様に

$$\rho(s_1, q) + \lambda \leqq \rho(s_1, p) \tag{57}$$

式(54)，(4)より同様に

$$\rho(s_3, p) + \lambda \leqq \rho(s_3, q) \tag{58}$$

式(55)，(57)と $\lambda \geqq 0$ より

$$\lambda = 0 \tag{59}$$

式(55)，(57)，(59)より

$$\rho(s_1, p) = \rho(s_1, q) \tag{60}$$

式(56)，(58)，(59)より

$$\rho(s_3, q) = \rho(s_3, p) \tag{61}$$

式(52)〜(54)，(59)〜(61)より，$\rho'(s_1, s_2) + \rho'(s_2, s_3) = \rho(s_1, p) + \rho(s_2, p) + \rho(s_2, q) + \rho(s_3, q) = \rho'(s_1, s_3) + \rho(s_2, p) + \rho(s_2, q)$．ここで，$\rho(s_2, p) + \rho(s_2, q) \geqq 0$ であることから，式(15)を得る．

（証明終）

距離空間（S；ρ）から，式(7)によって新たに得られる（擬）距離空間（S；ρ'）を（S；ρ）の<u>2点 p，q の縮小（contraction）</u>と呼ぶことにする．一般には，いくつかの点間についてこれを繰返して新たな距離空間（S；ρ_c）を作ることができる．この（S；ρ_c）を（S；ρ）の<u>縮小空間</u>と名づけることにする．

3. 距離空間上の中心度関数の公理系

（擬）距離空間（S；ρ）の S は<u>可算</u>点集合とする．S の各元に対して，ρ とは無関係の非負実数値を対応させる写像 σ を考える．

$$\sigma : S \to \bar{\boldsymbol{R}}^+ \tag{62}$$

これは点の相対的距離関係とは無関係の点の固有の重みと考えてよい．この σ の付随した距離空間を（S；ρ，σ）と表わすことにする．

（S；ρ，σ）の点の中心らしさの度合を表現するには種々の方法があるであろう．ここでは（S；ρ，σ）の点の上に定義される実数値関数 f_s によって，中心らしさの度合を表現することを考える．（S；ρ，σ）の点 $r \in S$ の上の関数 f_s の値は S，ρ，σ，r の関数であるから，$f_s(r, \rho, \sigma)$ と表わすことにする．また（S；ρ）の2点 p，q の縮小空間（S；ρ'）の点 r の関数値は $f_s(r, \rho', \sigma)$ と表わすことにする．すなわち，縮小空間において，点に付随している非負実数値は不変と仮定する．また，縮小空間を作る際 λ をあらかじめ指定しなければならないが，ここでは一般的に単に λ としておく．空間の縮小によって f_s がどのように変化したかを考え，$\Delta(r)$ を次のように定義する．

$$\Delta(r) = f_s(r, \rho', \sigma) - f_s(r, \rho, \sigma) \tag{63}$$

この $\Delta(r)$ に対して，条件

(i) $\Delta(p) \geqq 0$，$\Delta(q) \geqq 0$ (64)

(ii) $\rho(p, r) \leqq \rho(q, r)$ である任意の点 r に対して，

$$\Delta(p) \geqq \Delta(r) \tag{65}$$

かつ，$\rho(p, r) \geqq \rho(q, r)$ である任意の点 r に対して，

$$\Delta(q) \geqq \Delta(r) \tag{66}$$

が成立するとき，f_s を（S；ρ，σ）の<u>中心度関数</u>，特に，条件(i)のみを満足する場合，f_s を<u>半中心度関数</u>と呼ぶことにし，(i)，(ii)を中心度関数の公理系ということにする．

この中心度関数の公理系は「f_s の値が大きい程中心らしい」とした場合，点 p，q の中心らしさは増加し（条件(i)），点 p，q の近くの点より点 p，q の中心らしさの増加の度合は大きい（条件(ii)）という考えに基づいたものである．例えば，

$$f_s^a(r, \rho, \sigma) = \sigma(r) \tag{67}$$

は最も簡単な中心度関数（もちろん半中心度関数でもある）であり，$\forall M \geqq \max_{s_i, s_j \in S} \rho(s_i, s_j)$ に対して，

$$f_s^b(r,\rho,\sigma)=\min_{t\in s}\{M-\rho(r,t)\} \tag{68}$$

は半中心度関数の例である．

4. ある形式の中心度関数の決定

中心度関数の公理系(i)，(ii)を満足する関数は種々考えられ，あまりにも漠然としている．本文では，以下次のように関数の形式を限定して考察を進める．

$$f_s^L(r,\rho,\sigma)=\sum_{\xi\in D}\varphi(\xi)\sum_{t\in S_\xi(r)}\sigma(t) \tag{69}$$

ただし，$D=\{\rho(s_1,s_2)\mid s_1,s_2\in S\}$

$$\varphi:\bar{R}^+\to\bar{R}^+ \tag{70}$$

$$S_\xi(r)=\{t\mid t\in S,\ \rho(r,t)=\xi\} \tag{71}$$

式(69)の $f_s^L(r,\rho,\sigma)$ は φ が指定されれば決まるが，これが中心度関数であるかどうかは S,ρ,σ による．しかし，常に中心度関数であるような，つまり任意の S,ρ に対して，又は任意の S,σ に対して中心度関数であるような $f_s^L(r,\rho,\sigma)$ を定めることは重要なことである．まず，σ はある範囲に限定された値をとるとしても，任意の S,ρ に対して f_s^L が中心度関数となるための条件を求める．

以下，$r\in S$ に対し，$\sigma(r)$ は十分大きな値をとることなく（有界），また，十分大きな濃度の部分点集合 $S'\subset S$ に対し，

$$\sum_{t\in S'\subset S}\sigma(t)\to\infty \tag{72}$$

となるような範囲に σ を限定する．このとき，次の定理を得る．

［定理 2］

f_s^L が式(72)のように限定された σ に対して，任意の $(S;\rho)$ の半中心度関数となるための必要十分条件は，

$\mu'\geqq\mu\geqq\lambda$ に対して

$$\varphi(\mu)\geqq\varphi(\mu') \tag{73}$$

を満たすことがある．

（証明） 十分性は，$(S;\rho',\sigma)$ において p,q 間の距離が λ に減少することから容易に証明される．

必要性：$(S;\rho,\sigma)$，$(S;\rho',\sigma)$ の例として，

$$S=\{r_p,p,q,s_1,s_2,\cdots,s_m\} \tag{74}$$

$\rho(r_p,p)=x$

$\rho(r_p,q)=x+y,\ (y>0)$

$\rho(r_p,s_i)=x+y+z,\ (1\leqq i\leqq m)$

$\rho(p,q)=y$

$\rho(p,s_i)=y+z,\ (1\leqq i\leqq m)$

$\rho(q,s_i)=z,\ (1\leqq i\leqq m)$

$\rho(s_i,s_j)=2z,\ (i\neq j,\ 1\leqq i,\ j\leqq m)$

$\rho'(r_p,p)=x$

$\rho'(r_p,q)=x+\lambda,\ (\lambda\leqq y)$

$\rho'(r_p,s_i)=x+\lambda+z,\ (1\leqq i\leqq m)$

$\rho'(p,q)=\lambda$

$\rho'(p,s_i)=\lambda+z,\ (1\leqq i\leqq m)$

$\rho'(q,s_i)=z,\ (1\leqq i\leqq m)$

$\rho'(s_i,s_j)=2z,\ (i\neq j,\ 1\leqq i,\ j\leqq m)$

を考える．これは式(7)を満足している．

$$f_s^L(p,\rho,\sigma)=\varphi(0)\sigma(p)+\varphi(x)\sigma(r_p)+\varphi(y)\sigma(q)+\varphi(y+z)\sum_{i=1}^m\sigma(s_i) \tag{75}$$

$$f_s^L(p,\rho',\sigma)=\varphi(0)\sigma(p)+\varphi(x)\sigma(r_p)+\varphi(\lambda)\sigma(q)+\varphi(y+z)\sum_{i=1}^m\sigma(s_i) \tag{76}$$

式(75)，(76)より，

$$\Delta(p)=\{\varphi(\lambda)-\varphi(y)\}\sigma(q)+\{\varphi(\lambda+z)-\varphi(y+z)\}\sum_{i=1}^m\sigma(s_i) \tag{77}$$

任意の $(S;\rho)$ に対して，$\Delta(p)\geqq0$ が成立するためには，式(77)の第2項が（s_i が）無い場合及び十分大きな m に対して式(77)が非負でなければならないことから（式(72)を利用して），

$$\varphi(\lambda)\geqq\varphi(y) \tag{78}$$

$$\varphi(\lambda+z)\geqq\varphi(y+z) \tag{79}$$

が必要となる．ゆえに，式(73)を得る． （証明終）

［定理 3］

f_s^L が式(73)のように限定された σ に対して，任意の $(S;\rho)$ の中心度関数となるための必要十分条件は

$\mu'\geqq\mu\geqq\lambda$ に対して

$$\varphi(\mu)\geqq\varphi(\mu') \tag{73}$$

$^\forall\mu\geqq\lambda+\varepsilon,\ \varepsilon\geqq0$ に対して

$$2\varphi(\mu)\leqq\varphi(\mu-\varepsilon)+\varphi(\mu+\varepsilon) \tag{80}$$

を同時に満たすことである．

（証明） 十分性：φ が式(73)，(80)を満足しているとする．S を次のように分割する．

$$S_p=\{r\mid\rho(p,r)<\rho(q,r)\} \tag{81}$$

$$S_0=\{r\mid\rho(p,r)=\rho(q,r)\} \tag{82}$$

$$S_q=\{r\mid\rho(p,r)>\rho(q,r)\} \tag{83}$$

s_p,s_0,s_q のそれぞれの代表元を r_p,r_0,r_q と表わす．$(S;\rho)$ における2点 r_p,r_q の間の距離が $(S;\rho')$ で減少したとする．

$$\rho(r_p, r_q) \geqq \rho(r_p, p) + \rho(r_q, q) + \lambda$$
$$\leqq \rho(r_p, q) + \rho(r_q, p) + \lambda \quad (84)$$

であるから，式(7)より

$$\rho'(r_p, r_q) = \rho(r_p, p) + \rho(r_q, q) + \lambda \quad (85)$$

三角不等式と式(84)より

$$\rho(r_p, p) + \rho(p, r_q) \geqq \rho(r_p, r_q)$$
$$\geqq \rho(r_p, p) + \rho(r_q, q) + \lambda \quad (86)$$

つまり，

$$\rho(p, r_q) \geqq \rho(r_q, q) + \lambda \quad (87)$$

ゆえに，式(87)と式(81)，(83)より

$$\rho'(p, r_q) = \min\{\rho(p, r_q),\ \rho(p, p) + \rho(q, r_q) + \lambda,\ \rho(p, q) + (r_q, p) + \lambda\}$$
$$= \rho(q, r_q) + \lambda, \ (\because \rho(p, p) = 0) \quad (88)$$

ここで，$\rho(r_p, p) = w$，$\rho(p, r_q) = x$，$\rho(r_q, q) = y$，$\rho(r_p, r_q) = z$，とおき，$\Delta(r_p)$ と $\Delta(p)$ への点 r_q の寄与分をそれぞれ $\partial r_q \Delta(r_p)$ と $\partial r_q \Delta(p)$ と表わすと，式(85)，(88)より，

$$\partial r_q \Delta(r_p) = \{\varphi(w + y + \lambda) - \varphi(z)\}\sigma(r_q) \quad (89)$$
$$\partial r_q \Delta(p) = \{\varphi(y + \lambda) - \varphi(x)\}\sigma(r_q) \quad (90)$$

従って

$$\partial r_q \Delta(p) - \partial r_q \Delta(r_p)$$
$$= \{\varphi(y + \lambda) - \varphi(x) - \varphi(w + y + \lambda) + \varphi(z)\}\sigma(r_q) \quad (91)$$

ところで，三角不等式，

$$\rho(r_p, p) + \rho(p, r_q) \geqq \rho(r_p, r_q) \quad (92)$$

また，式(84)より $z \geqq \lambda$，すなわち $w + x \geqq z \geqq \lambda$． ゆえに式(73)より

$$\varphi(w + x) \leqq \varphi(z) \quad (93)$$

となるから

$$\partial r_q \Delta(p) - \partial r_q \Delta(r_p)$$
$$\geqq \{\varphi(y + \lambda) - \varphi(x) - \varphi(w + y + \lambda) + \varphi(w + x)\}\sigma(r_q) \quad (94)$$

が成立する．ここで，式(80)より，一般に $\zeta > 0$，$\mu \geqq \lambda + \varepsilon$ に対して

$$\varphi(\mu + \zeta - \varepsilon) - \varphi(\mu + \zeta) \leqq \varphi(\mu - \varepsilon) - \varphi(\mu) \quad (95)$$

このことから，$\mu = x$，$\mu - \varepsilon = y + \lambda$，$\zeta = w$ として

$$\varphi(y + \lambda) - \varphi(x) \geqq \varphi(w + y + \lambda) - \varphi(w + x) \quad (96)$$

ゆえに，式(94)は，$\sigma(r_q) \geqq 0$ より

$$\partial r_q \Delta(p) - \partial r_q \Delta(r_p) \geqq 0 \quad (97)$$

点 r_p と r_q の距離が (S, ρ') において減少せずに不変であったとすると，$\partial r_q \Delta(r_p) = 0$ となる．また，式(90)，(87)，(73)より，s_q の任意の点 r_q に対して，

$$\partial r_q \Delta(p) \geqq 0 \quad (98)$$

である．特に $r_q = q$ の場合（$y = 0$）も

$$\partial q \Delta(p) \geqq 0 \quad (99)$$

である．ゆえに，s_q の任意の点 r_q に対して，

$$\partial r_q \Delta(p) - \partial r_q(r_p) \geqq 0 \quad (100)$$

次に，$s_p \cup s_0$ の任意の点 r_x と r_p の距離を考える．$\rho(r_p, p) + \rho(r_x, q) \geqq \rho(r_p, p) + \rho(r_x, p)$ と三角不等式，$\rho(r_p, p) + \rho(r_x, p) \geqq \rho(r_p, r_x)$ より

$$\rho(r_p, p) + \rho(r_x, q) + \lambda$$
$$\geqq \rho(r_p, p) + \rho(r_x, p) + \lambda$$
$$\geqq \rho(r_p, r_x) \quad (101)$$

ゆえに，式(7)より

$$\rho'(r_p, r_x) = \rho(r_p, r_x) \quad (102)$$

となり，$(S ; \rho')$ において r_p と r_x の距離は不変である．これは $r_p = p$ の場合も成立することに注意すると

$$\partial r_x \Delta(r_p) = 0 \quad (103)$$
$$\partial r_x \Delta(p) = 0 \quad (104)$$

となり，

$$\partial r_x \Delta(p) - \partial r_x \Delta(r_p) = 0 \quad (105)$$

$\Delta(r_p)$ は $\partial r_q \Delta(r_p)$ と $\partial r_x \Delta(r_p)$ 等の総和であるから，式(97)，(99)，(103)～(105)より

$$\Delta(p) \geqq 0 \quad (106)$$
$$\Delta(p) \geqq \Delta(r_p) \quad (107)$$

同様に，

$$\Delta(q) \geqq 0 \quad (108)$$
$$\Delta(q) \geqq \Delta(r_q) \quad (109)$$

が成立する．次に，r_0 から他の点への距離を考える．他の点として，$r_x \in s_0 \cup s_p$ としても一般性を失わない．$\rho(r_0, p) + \rho(r_x, q) \geqq \rho(r_0, q) + \rho(r_x, p) = \rho(r_0, p) + \rho(r_x, p)$，また三角不等式 $\rho(r_0, p) + \rho(r_x, p) \geqq \rho(r_0, r_x)$ より

$$\rho(r_0, p) + \rho(r_x, q) + \lambda$$
$$\geqq \rho(r_0, q) + \rho(r_x, p) + \lambda$$
$$\geqq \rho(r_0, r_x) \quad (110)$$

ゆえに，

$$\rho'(r_0, r_x) = \rho(r_0, r_x) \quad (111)$$

つまり，

$$\Delta(r_0) = 0 \quad (112)$$

以上により，式(73)，(80)が成立すれば，f_s^L は中心度関数である．

必要性：(S, ρ, σ)，(S, ρ', σ) として定理２の例（式(74)）を用いる．式(73)の必要性は定理２より明らか．この例の r_p は式(81)を満足しており，$r_p \in S_p$ である．

$$f_s(r_p, \rho, \sigma) = \varphi(0)\sigma(r_p) + \rho(x)\sigma(p) + \varphi(x+y)\sigma(q) + \varphi(x+y+z) \cdot \sum_{i=1}^{m} \sigma(s_i) \quad (113)$$

$$f_s(r_p, \rho', \sigma) = \varphi(0)\sigma(r_p) + \varphi(x)\sigma(p) + \varphi(x+\lambda)\sigma(q) + \varphi(x+\lambda+z) \cdot \sum_{i=1}^{m} \sigma(s_i) \quad (114)$$

式(113)，(114)より

$$\Delta(r_p) = \{\varphi(x+\lambda) - \varphi(x+y)\}\sigma(q) + \{\varphi(x+\lambda+z) - \varphi(x+y+z)\} \cdot \sum_{i=1}^{m} \sigma(s_i) \quad (115)$$

式(77)，(115)より

$$\Delta(p) - \Delta(r_p) = \{\varphi(\lambda) - \varphi(y) - \varphi(x+\lambda) + \varphi(x+y)\}\sigma(q) + \{\varphi(\lambda+z) - \varphi(y+z) - \varphi(x+\lambda+z) + \varphi(x+y+z)\} \sum_{i=1}^{m} \sigma(s_i) \quad (116)$$

任意の$(S;\rho)$に対して$\Delta(p) \geqq \Delta(r_p)$が成立するためには，式(116)の第2項が($s_i$が)無い場合及び十分大きな$m$に対して式(116)が非負とならねばならず(式(72)を利用して)，

$$\varphi(\lambda) - \varphi(y) - \varphi(x+\lambda) + \varphi(x+y) \geqq 0 \quad (117)$$

$$\varphi(\lambda+z) - \varphi(y+z) - \varphi(x+\lambda+z) + \varphi(x+y+z) \geqq 0 \quad (118)$$

が必要となる．$y=\lambda+\varepsilon$，$x=\varepsilon$ とすると，式(117)より

$$2\varphi(\lambda+\varepsilon) \leqq \varphi(\lambda) + \varphi(\lambda+2\varepsilon) \quad (119)$$

また，$z>0$に対して式(118)が成立しなければならないため，

$$2\varphi(\mu) \leqq \varphi(\mu-\varepsilon) + \varphi(\mu+\varepsilon) \;;\; {}^\forall\mu \geqq \lambda+\varepsilon,\ \varepsilon>0 \quad (120)$$

が得られる．$\Delta(q)$，$\Delta(r_q)$等についても同様である．

(証明終)

［系1］

任意の$(S;\rho)$に対して，

$$f_s^{L_1}(r, \rho) = \sum_{\xi \in D} \varphi(\xi)\,|S_\xi(r)| \quad (121)$$

が半中心度関数となる必要十分条件はφが式(73)を満たすことであり，又$f_s^{L_1}$が中心度関数となるための必要十分条件は式(73)と式(80)を同時に満たすことである．

(証明) 定理2と3において，$\sigma(s_i)=1$，$(s_i \in S)$の場合である．これは式(72)を満足しているため系は成立する．

(証明終)

定理2，3は任意の$(S;\rho)$についてf_s^Lが中心度関数となるためのφが満たすべき条件を求めた．次に，$(S;\rho)$は限定されていても，任意のσに対してf_s^Lが中心度関数となるための条件を求める．ただし，$(S;\rho)$として，2点以上を有し，$|S|$は十分大きくなくともよいという限定をする．このとき，定理2，3の必要性の証明中，式(77)，(116)において，mを十分大きくする代わりに，任意のσに対して成立する必要性から，$\sigma(s_i)$を十分大きくとることにより同様の条件が必要であることがわかる．十分性の証明は定理2，3と同様であることから，次の定理が得られる．

［定理4］

f_s^Lが，$|S|$は有限であるという限定をつけた$(S;\rho)$において，任意のσに対して半中心度関数となるための必要十分条件はφが式(73)を満たすことである． ∎

［定理5］

f_s^Lが，$|S|$は有限であるという限定をつけた$(S;\rho)$において，任意のσに対して中心度関数となるための必要十分条件はφが式(73)と式(80)を同時に満たすことである． ∎

定理2～5より次の定理が得られる．

［定理6］

f_s^Lが，任意の$(S;\rho,\sigma)$に対して半中心度関数となるための必要十分条件はφが式(73)を満たすことである． ∎

［定理7］

f_s^Lが，任意の$(S;\rho,\sigma)$に対して中心度関数となるための必要十分条件はφが式(73)と式(80)を同時に満たすことである． ∎

定理2～7によって任意の距離空間又は距離空間上の点の任意の重みに対して，半中心度関数であるf_s^Lの$\varphi(\mu)$は$\mu \geqq \lambda$に対して単調減少であり，中心度関数であるf_s^Lの$\varphi(\mu)$は(上に有界とする)$\mu \geqq \lambda$に対して単調減少でかつ下に凸ということになる．また，これらの結果より，φを適当に選び又λを指定することにより，種々の中心度の表示式を得ることができる．

5. むすび

距離空間上の点の中心らしさを表わす関数を公理論的に定義し，一つの形式の関数が中心度関数となるための必要十分条件を求めた．ところで，グラフ$G(V, E)$においては，次の(性質)補題が成立する．

［補題1］　グラフGの2点$u, v \in V$の距離$d(u, v)$をu, v間の最短パス長で定義すると，$d(u, v)$は距離公理を満足し，$(V; d)$は距離空間となる．∎

［補題2］　一つの新しいパスの付加によってグラフのある2点間の距離が減少したとすると，その2点間の最短パスはその新しいパスを通る．∎

この補題から，グラフにおける2点への枝の付加及び2点一致の操作は$(V; d)$の2点間の縮小の一種であることは明らかである．そのため，グラフの従来の中心度関数は本文の中心度関数の特別の場合として含まれることになる．これらの結果は，単に従来のグラフの中心度関数を含む統一理論というだけでなく，点に重みを有し，かつ枝に長さをもつグラフの location problems への応用も可能と考えられ，さらに多くの興味ある問題が残っている．

謝辞　本研究の動機づけをしていただいた東京工業大学大学院の岸源也教授及び同大工学部の梶谷洋司助教授，ならびに日頃御指導頂く新潟大学工学部，阿部武雄教授に深謝する次第である．

文　献

(1) Christofides, N. : "Graph Theory, An Algorithmic Approach", Academic Press (1975).

(2) Minieka, E. : "Optimization Algorithms for Networks and Graphs", Marcel Dekker, Inc. (1978).

(3) 梶谷，丸山："グラフにおける中心度関数表示－通信網の評価への応用－"，信学論(A)，J59-A，7，pp.531-538(昭51-07)．

(4) Kajitani, Y. : "Centrality of vertices in a graph", Proc. of 1979 International Colloquium on Circuits and Systems, Jaipei, pp.43-46 (July 1979).

(5) 岸，竹内："有向グラフの中心度関数"，信学技報，CST77-10(1979-06)．

(6) Kishi, G. : "On centrality functions of a graph", in Graph Theory and Algorithms (ed. by N. Sato and T. Nishizeki), Lecture Notes in Computer Science, 108, Springer-Verlag, pp.45-52 (1980).

(7) 仙石，篠田："グラフにおける点の中心らしさを表わす関数について"，信学技報，CAS81-112(1982-02)．

(8) 篠田，仙石："グラフにおける2点一致と中心度関数"，信学論(A)，J65-A，8，pp.787-793(昭57-08)．

(9) 篠田，仙石："枝付加と中心度関数"，信学技報，CAS81-132(1982-03)．

(10) 篠田，仙石："距離空間における点の中心らしさを表わす関数の公理論的基礎づけ"，信学技報，CAS82-45(1982-07)．

（昭和57年10月4日受付，12月1日再受付）