論　文

枝に容量を有する無向ネットワークの枝の中心らしさを測る関数

正員　仙石　正和 †　　正員　篠田　庄司 ††

A Function Measuring the Centrality (or Mediality) of Edges in an Undirected Network with Edge-Capacity

Masakazu SENGOKU† *and* Shoji SHINODA††, *Members*

あらまし　従来，ネットワークの点の中心らしさを測る関数について種々の研究がなされている．ネットワークにおいては枝の役割も点と同様重要である．ところが，枝の中心らしさを測る関数についてはほとんど研究されていないようである．点の中心らしさは点と点相互の係わり（距離，容量等）によって測られている場合が多い．そこで，小文でも枝の中心らしさを枝と枝の相互の係わりによって測ることとし，ネットワークは連結，無向で各枝には容量の重みが付いているものを扱う．枝と枝の相互の係わりを，両方の枝を含む最小カットの容量で評価する一方法を提案する．この枝相互の係わりの量は三角不等式等を満足する準距離となることを示し，点の中心の概念等と同様に，枝の中心（center），半径，直径，中央（median）等の概念を導入し，これらの基本的性質を調べる．そして，枝の中心らしさを表わすいくつかの表示式を提案し，さらにこれらの表示式を含む，いわゆる枝の中心らしさを測る関数への一般化を試みている．これらの関数は，2つの枝が共同して（同時に）フローを流すようなモデルのネットワークに対する枝の罹障度を評価する場合に役立つと考えられる．

1. まえがき

従来，ネットワークの点の中心らしさを測る関数について種々の研究がなされている（文献(1),(2)他）．ところで，ネットワークにおいては枝の役割も点と同様重要である．では，枝の中心らしさ（重要度）はどのように測れば良いであろうか．

枝の中心らしさに関する研究は現在までほとんどなされていないようである．ある一つの点の中心らしさは，従来その点と他点との距離や容量等の関数として測られている場合が多い．すなわち"点"の中心らしさを"点相互"の係わり（距離，容量等）によって測ってきている．そこで，"枝"の中心らしさも点と同様に"枝相互"の係わりによって測ることを考える．小文では，枝に容量の重みを有するネットワークについて枝と枝との係わりを表わす一つの量を導入する．そして，その量によって枝の中心らしさを測るいくつかの表示式を示し，その表示式の一般化と特徴付をおこなう．

† 新潟大学工学部情報工学科，新潟市
Faculty of Engineering, Niigata University, Niigata-shi, 950-21 Japan
†† 中央大学理工学部電気工学科，東京都
Faculty of Science and Engineering, Chuo University, Tokyo, 112 Japan

2. 枝と枝との間の準距離

点の中心らしさを点と点との係わりによって測る場合が多く，2点間の係わりの程度は距離や容量等によって表現されている場合が多い．点の場合と同様に枝と枝との係わりによって枝の中心らしさを測ることとし，2枝間の係わりの程度を表現する一つの量を導入する．まず，定義から始める．

2.1 定義と定理

〔定義1〕

Sは非空な集合とし，

$\rho: S \times S \to \overline{R}_+$, $(\overline{R}_+ = [0, \infty])$

ここで，$x, y, z \in S$に対して

(i) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

(iii) $\rho(x, y) \leqq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

の性質を有するならば，ρはSの上の距離関数と呼ばれ，また(i)の条件を少し弱めたρは擬距離（pseudo - distance）と呼ばれることは良く知られている．もし，ρが性質(ii)と(iii)を満足するとき，$\rho(x, y)$はxからy

への準距離 (quasi-distance), そして性質(ii), (iii)を準距離の公理系と呼ぶことにする. ■

扱うネットワーク$N(G, C)$は連結, 無向とし, $G=(V, E)$はNのグラフとする. VとEはそれぞれGの点集合及び枝集合とし, 各枝は容量の重み (非負実数) を持っているとする. $C(e_k)$は枝$e_k \in E$の容量を表わす. $\gamma_k(e_i, e_j)$をNの枝e_iとe_j両方を含むカットセット (初等的カットセットとは限らぬ) とし, その集合を$Q(e_i, e_j)$とする. つまり

$$Q(e_i, e_j)=\{\gamma_k(e_i, e_j)\} \tag{1}$$

カットセット$\gamma_k(e_i, e_j)$の容量を

$$C(\gamma_k(e_i, e_j))=\sum_{e_m \in \gamma_k(e_i, e_j)} C(e_m) \tag{2}$$

と定義し, $C(\gamma_k(e_i, e_j))$は$C(\gamma_k)$と略記する.

〔定義2〕

$N(G, C)$の2つの枝$e_i, e_j \in E$に対して実数値関数ρ_γ ($\rho_\gamma: E \times E \to \overline{R}_+$)を

(a) $Q(e_i, e_j) \neq \phi$のとき,

$$\rho_\gamma(e_i, e_j)=\min_{\gamma_k(e_i, e_j) \in Q(e_i, e_j)} C(\gamma_k) \tag{3}$$

(b) $Q(e_i, e_j)=\phi$のとき,

$$\rho_\gamma(e_i, e_j)=\infty \tag{4}$$

と定義する. ■

このとき, 次の定理を得る.

〔定理1〕

ネットワーク$N(G, C)$に対し, $\rho_\gamma(e_i, e_j)$は準距離公理を満足する.

(証明) $\rho_\gamma(e_i, e_j)$が準距離公理を満足することを証明するには,

(I) $\rho_\gamma(e_i, e_j)=\rho_\gamma(e_j, e_i)$

(II) $\rho_\gamma(e_i, e_k) \leqq \rho_\gamma(e_i, e_j)+\rho_\gamma(e_j, e_k)$

が成立することを示せばよい. Gではe_i, e_jを含むカットセットはe_j, e_iを含むカットセットでもあり, $Q(e_i, e_j)=Q(e_j, e_i)$. ゆえに, 式(3), (4)より(I)が成立する. 次に(II)について述べる. まず, $Q(e_i, e_j) \neq \phi$, $Q(e_j, e_k) \neq \phi$とする. 式(3)より, $\rho_\gamma(e_i, e_j)$はe_i, e_j両方を含むカットセットの内の最小容量である. そこで, $Q(e_i, e_j)$の中で最小容量の一つのカットセットを$\gamma_1(e_i, e_j)$とする. 同様に, $Q(e_j, e_k)$の中の最小容量の一つのカットセットを$\gamma_2(e_j, e_k)$とする.

$$E_{ijk}=\gamma_1(e_i, e_j) \cup \gamma_2(e_j, e_k) \tag{5}$$

$\gamma_1(e_i, e_j)$がe_kを又は$\gamma_2(e_j, e_k)$がe_iを含む場合, 枝集合E_{ijk}はe_i, e_kを含むカットセットを含むことは明らか. $\gamma_1(e_i, e_j)$, $\gamma_2(e_j, e_k)$がe_k, e_iをそれぞれ含まぬ場合も, $\gamma_1(e_i, e_j) \oplus \gamma_2(e_j, e_k)$は$e_i, e_k$を含む初等的カットセット又は初等的カットセットの非共通和であるから, E_{ijk}は枝e_i, e_kを同時に含むカットセットを含む ($\oplus$はリングサム). このカットセットを$\gamma_3(e_i, e_k)$とする. つまり,

$$\gamma_3(e_i, e_k) \subseteqq E_{ijk} \tag{6}$$

式(5), (6)から

$$C(\gamma_3) \leqq C(\gamma_1)+C(\gamma_2) \tag{7}$$

ところで, 式(3)より,

$$\rho_\gamma(e_i, e_k) \leqq C(\gamma_3) \tag{8}$$

仮定より, $\rho_\gamma(e_i, e_j)=C(\gamma_1)$, $\rho_\gamma(e_j, e_k)=C(\gamma_2)$であるから, 式(7), (8)より

$$\rho_\gamma(e_i, e_k) \leqq \rho_\gamma(e_i, e_j)+\rho_\gamma(e_j, e_k) \tag{9}$$

次に, $\gamma_1(e_i, e_j)$, $\gamma_2(e_j, e_k)$の一方が存在しない場合を考える. $\gamma_2(e_i, e_k)$が存在しないとしても一般性を失わない. このとき, e_kは自己閉路となる. ゆえに, 式(4)より,

$$\rho_\gamma(e_j, e_k)=\rho_\gamma(e_i, e_k)=\infty \tag{10}$$

ゆえに,

$$\rho_\gamma(e_i, e_k) \leqq \rho_\gamma(e_i, e_j)+\rho_\gamma(e_j, e_k) \tag{11}$$

また, $\gamma_1(e_i, e_j)$, $\gamma_2(e_j, e_k)$いずれも存在しない場合,

$$\rho_\gamma(e_i, e_j)=\rho_\gamma(e_j, e_k)=\infty \tag{12}$$

となり, $\rho_\gamma(e_i, e_k) \leqq \infty$であるから,

$$\rho_\gamma(e_i, e_k) \leqq \rho_\gamma(e_i, e_j)+\rho_\gamma(e_j, e_k) \tag{13}$$

以上, 式(9), (11), (13)より(II)が成立した. (証明終)

$\rho_\gamma(e_i, e_j)$は枝e_i, e_jを含むカットセットを用いて定義されていたが, このカットセットを初等的カットセットに限定してもρ_γは準距離公理を満足することが証明でき (文献(3)とほぼ同様) 次の系を得る.

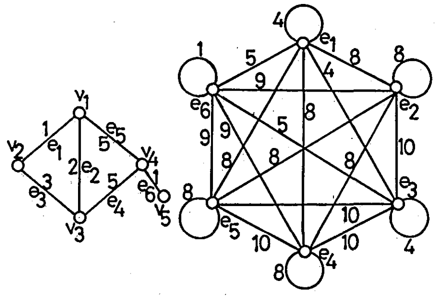
〔系1〕

ρ_γの定義2の(a), (b)において$Q(e_i, e_j)$を初等的カットセットに限定した場合のρ_γをρ_{γ_e}とする. このとき, 関数$\rho_{\gamma_e}(e_i, e_j)$も準距離公理を満足する.

■

この系のように$\rho_\gamma(e_i, e_j)$を初等的カットセットに限定した場合, e_i, e_jがそれぞれ別の非可分成分 (ブロック) に属する時, $\rho_{\gamma_e}(e_i, e_j)=\infty$となる.

次に, 例をあげる. 図1の(a)はネットワーク$N(G, C)$の一例で, 各枝に容量が記されている. 同図(b)は$N(G, C)$の枝間の準距離を表わすネットワークで, 点は$N(G, C)$の枝に対応し, 枝に準距離の値が記されている. なお, この例では$\rho_{\gamma_e}(e_6, e_i)=\infty$, ($i=1$,



(a) $N(G, C)$　　(b) Quasi-distance

図1　ネットワーク $N(G, C)$ の枝間の準距離
Fig.1　A network $N(G, C)$ and quasi-distance between edges.

2, 3, 4, 5) 以外は ρ_γ と ρ_{γ_e} と一致している.

2.2　枝間の準距離 ρ_γ の定性的意味

2.1 において，枝間の係わりの程度を示す量として ρ_γ を導入したが，この ρ_γ の定性的意味について考察する.

枝の重み（容量）はその枝に流し得るフロー(flow)の最大値である．2つの枝 $e_i=(v_i, v_i')$，$e_j=(v_j, v_j')$ の係わりの程度を表わすには種々の方法が考えられるであろうが，ここでは，枝 e_i，e_j の両端点間に共同して（同時に）フロー（最大流）を流す（無向ネットワークであるから，フローの流し方に2通りある.）ことを考える．このとき，この（2通りのいずれかの）流れを零にするために，破壊（故障）さるべき必要最小の枝容量（各枝の容量が1ならば等価的に必要最小枝数）を枝 e_i，e_j の係わりの程度と考える．ここで，枝容量の破壊は枝に流し得る最大のフローの値が何らかの原因によって減ること，すなわち枝容量の減少を意味している．この破壊さるべき必要最小の枝容量が小さい程，同一量の枝容量の破壊（減少）に対して，上述の e_i，e_j の両端点間の共同のフローへ与える影響の割合は大きいと考えられる．この影響の割合の大きい程，その枝と枝は近い（密の）関係にあると考えてよいであろう.

上述の破壊さるべき必要最小容量は v_i，v_j をソース，v_i'，v_j' をシンク又は v_i，v_j' をソース，v_i'，v_j をシンクとした2端子フローの最大流をそれぞれ f_1, f_2 としたとき，$\min\{f_1, f_2\}$ である．この量が $\rho_\gamma(e_i, e_j)$ に一致することは明らかである.

さて，以後この ρ_γ を用いて議論を進めるが，上述の説明からわかるように，ρ_γ は枝のフローと密接な関係を持っている．そのため，自己閉路又は容量が零の枝は，枝としてあまり意味を持たない場合が多いと考えられる．そこで，本文では以後，自己閉路を含まず，枝の容量は $(0, \infty)$ の実数値であるネットワークに限定して話を進めることにする（このとき，ρ_γ は0と ∞ という値を持たないことに注意）.

3. 枝の中心

前章において，ネットワーク $N(G, C)$ の枝と枝との係わりを表わす量として ρ_γ を導入した．そして，ρ_γ が準距離の公理を満足することを示した．$\rho_\gamma(e_i, e_j)$ は $i=j$ のとき必ずしも0ではないが，$\rho_\gamma(e_i, e_j)$ は ρ_γ の定義からわかるように，$\rho_\gamma(e_i, e_j)$，$(e_j \in E)$，の中で最小である．そして，ρ_γ は対称性，三角不等式を満たしており，いわゆる“近い”，“遠い”という距離の感覚的性質を満足している．このような枝間相互の位置関係（距離）が定まれば，どの枝が中心又は中心らしいか等は点の場合と同様に考えることができ興味ある問題である．グラフにおいて，点 v_i と点 v_j の間の最短路長 $d(v_i, v_j)$ は距離公理を満足し，この距離を用いて点の離心数(eccentricity)，中心(center)等の概念が定義されている．すなわち，$e_c(v)=\max_{u\in V} d(v, u)$ を v の離心数といい，最小離心数 $r_a(G)$ はグラフ G の半径，最大離心数を G の直径という．$e_c(v)=r_a(G)$ となる点 v を G の中心点，中心点の集合は中心と呼ばれている．この点の場合と同様に，枝の間の準距離を用いて枝の中心を次のように定義する.

〔定義3〕

$N(G, C)$ の枝 e_i の ρ_γ の最大（最小）に関する離心数 $\varepsilon(e_i)$，$(\varepsilon^*(e_i))$ を式(14)（式(14)′）で定義する.

$$\varepsilon(e_i)=\max_{e_j\in E} \rho_\gamma(e_i, e_j) \tag{14}$$

$$\varepsilon^*(e_i)=\max_{e_j\in E} \rho_\gamma(e_i, e_j)=\rho_\gamma(e_i, e_i) \tag{14$'$}$$

以下＊の付いた量は ρ_γ の最小に関する量である．また，N の枝に関する半径 $\mathrm{rad}_\gamma(N)$，直径 $\mathrm{diam}_\gamma(N)$ をそれぞれ次のように定義する.

$$\mathrm{rad}_\gamma(N)=\min_{e_i\in E} \varepsilon(e_i) \tag{15}$$

$$\mathrm{rad}^*_\gamma(N)=\min_{e_i\in E} \varepsilon^*(e_i) \tag{15$'$}$$

$$\mathrm{diam}_\gamma(N)=\max_{e_i\in E} \varepsilon(e_i) \tag{16}$$

$$\mathrm{diam}^*_\gamma(N)=\max_{e_i\in E} \varepsilon^*(e_i) \tag{16$'$}$$

特に，$\varepsilon(e_i)=\mathrm{rad}_\gamma(N)$，$(\varepsilon^*(e_i)=\mathrm{rad}^*_\gamma(N))$ であ

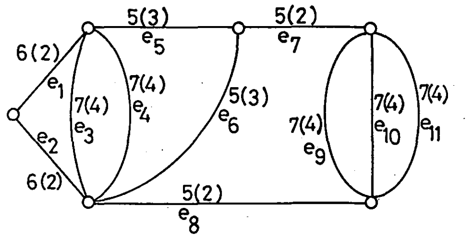


図2　ネットワーク $N(G, C)$ の枝の離心数
Fig.2 The eccentricity of edges of a newtwork $N(G, C)$.

るとき，e_i を ρ_T の最大（最小）に関する中心枝，中心枝の集合を ρ_T の最大（最小）に関する中心と呼ぶことにする．■

この定義において，ρ_T を ρ_{T_e} に置き換えると ρ_{T_e} に関する離心数，半径，直径，中心等が定義できる．2枝 e_i，e_j を含む初等的カットセットの集合 $Q_e(e_i, e_j)$ は $Q(e_i, e_j)$ に含まれるから，ρ_T，ρ_{T_e} の定義より，$\rho_{T_e}(e_i, e_j) \geqq \rho_T(e_i, e_j)$ である．そのため，枝 e_i の ρ_{T_e} に関する離心数は ρ_T に関する離心数と等しいか大きいことになる．

次に例をあげる．図2のネットワーク $N(G, C)$ の各枝の容量は1とする．このネットワークの各枝間の $\rho_T(e_i, e_j)$ の値を行列 $D_T=[d_{ij}]$，$d_{ij}=\rho_T(e_i, e_j)$ の形で表わすと次のようになる．

$$D_T=\begin{bmatrix} 2&2&4&4&4&5&4&4&6&6&6\\ 2&2&4&4&4&5&4&4&6&6&6\\ 4&4&4&4&4&5&5&5&7&7&7\\ 4&4&4&4&4&5&5&5&7&7&7\\ 4&4&4&4&3&3&3&3&5&5&5\\ 5&5&5&5&3&3&3&3&5&5&5\\ 4&4&5&5&3&3&2&2&4&4&4\\ 4&4&5&5&3&3&2&2&4&4&4\\ 6&6&7&7&5&5&4&4&4&4&4\\ 6&6&7&7&5&5&4&4&4&4&4\\ 6&6&7&7&5&5&4&4&4&4&4 \end{bmatrix}$$

この D_T より，各枝の ρ_T の最大（最小）に関する離心数 $\varepsilon(e_i)$ $(\varepsilon^*(e_i))$ が求まり，図2の各枝にその値が記されている．また，このネットワークの半径，直径は $\mathrm{rad}_T(N)=5$，$\mathrm{diam}_T(N)=7$，$\mathrm{rad}_T^*(N)=2$，$\mathrm{diam}_T^*(N)=4$ で，ρ_T の最大に関する中心は $\{e_5, e_6, e_7, e_8\}$，ρ_T の最小に関する中心は $\{e_1, e_2, e_7, e_8\}$ である．ρ_{T_e} に関しても同様に求まる．例えば，$\rho_{T_e}(e_1, e_9)=7$ となり，枝 e_1 の ρ_{T_e} の最大に関する離心数は7で $\varepsilon(e_1)$ より大きい．$\rho_{T_e}(e_i, e_j)$ の定性的意味は e_i と e_j の両端点を同時に分離するのにネットワークの分離数（連結成分の数）を1だけ増す範囲内で除去すべき最小枝（容量）数である．$\rho_T(e_i, e_j)$ では分離数を1だけ増す範囲内という条件は除かれる．$\rho_{T_e}(e_1, e_9)$ は除去すべき枝 $e_1, e_3, e_4, e_6, e_9, e_{11}$ の枝数で $\rho_T(e_1, e_9)$ は，例えば枝 $e_1, e_2, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}$ の枝数である．枝 $e_1, e_2, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}$ を除去するとネットワークの分離数は2増す．なお，各枝の容量が1の場合，ρ_T の最小に関する中心枝の離心数はそのネットワークの枝連結度（edge-connectivity）と一致することに注意すべきである．このため，この離心数はネットワークの罹障度との関係も深く，そのためある枝の ρ_T の最小に関する離心数はその枝の連結数と呼んだ方が適切とも考えられる．

さて，従来，グラフの点の上で定義されてきた半径 $r_a(G)$ と直径 $d_a(G)$ との間には $r_a(G) \leqq d_a(G) \leqq 2r_a(G)$ の不等式が成立し，これは直径 $d_a(G)$ の上界と下界を示し，この上界，下界は最良であることが良く知られている．上界，下界が最良とは等号が成立する実際のグラフが存在するという意味である．すなわち，どのグラフでも $r_a(G) < d_a(G) < 2r_a(G)$ ならばあまり良い上界，下界とはいえない．枝の直径，半径に関してもこの関係が成立するであろうか，以下このことについて調べる．

〔定理2〕

ネットワーク N に対して，

$$\mathrm{rad}_T(N) \leqq \mathrm{diam}_T(N) \leqq 2\,\mathrm{rad}_T(N) \tag{17}$$

$$\mathrm{rad}_T^*(N) \leqq \mathrm{diam}_T^*(N) \tag{17$'$}$$

が成立する．

（証明）　定義3の式(15)〜(16)′より，$\mathrm{rad}_T(N) \leqq \mathrm{diam}_T(N)$，$\mathrm{rad}_T^*(N) \leqq \mathrm{diam}_T^*(N)$．次に，$\rho_T(e_i, e_j)=\mathrm{diam}_T(N)$ である2つの枝 e_i，e_j を選び，また，e_k を N の最大に関する中心枝とする．このとき，ρ_T は三角不等式を満足するから，

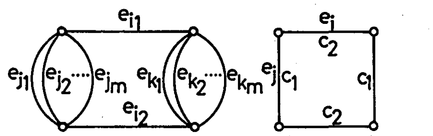
$\mathrm{diam}_T(N)=\rho_T(e_i, e_j) \leqq \rho_T(e_i, e_k)+\rho_T(e_k, e_j) \leqq 2\,\mathrm{rad}_T(N)$ が成立する．（証明終）

この定理から枝に関する半径，直径の間にもグラフの点の場合と類似の不等式が成立することがわかった．

ところで，N の各枝の容量が同一で G が完全グラフの場合 $\mathrm{rad}_T(N)=\mathrm{diam}_T(N)$，$\mathrm{rad}_T^*(N)=\mathrm{diam}_T^*(N)$ となる．また，図3(a)の各枝の容量が1の N_1 又は同図(b)のように枝の容量が c_1，c_2 の N_2 を考える．

$\mathrm{rad}_T(N_1)=\varepsilon(e_{i_1})=m+1$

$\mathrm{diam}_T(N_1)=\varepsilon(e_{j_1})=2m$



(a) A network N_1　(b) A network N_2 $(c_1 \gg c_2)$

図3 $\mathrm{diam}_r(N) \fallingdotseq 2\,\mathrm{rad}_r(N)$ となるネットワーク

Fig.3 Networks in which $\mathrm{diam}_r(N) \fallingdotseq 2\mathrm{rad}_r(N)$.

$$\mathrm{rad}_r(N_2) = \varepsilon(e_i) = c_1 + c_2$$

$$\mathrm{diam}_r(N_2) = \varepsilon(\varepsilon_j) = 2c_1$$

となる．ここで，$m \to \infty$，$c_1 \to \infty$ とすると

$$\mathrm{diam}_r(N_i) \fallingdotseq 2\,\mathrm{rad}_r(N_i),\ (i = 1,\ 2)$$

となる．ゆえに，式(17)，((17)′)の直径に対する下界は最良で，式(17)の直径に対する上界もほぼ最良といえる．なお，図3(a)のN_1において，$\mathrm{rad}^*_r(N_1)=2$, $\mathrm{diam}^*_r(N_1) = m+1$となる．ここで，$m \geqq 4$とすると，このネットワークは式(17)′で$\mathrm{diam}^*_r(N) \leqq 2\,\mathrm{rad}^*_r(N)$が成立しない一例である．

4. 枝の中心らしさを示す表示式

前章において，枝の離心数$\varepsilon(e_i)$，$\varepsilon^*(e_i)$を定義した．この離心数はe_iが枝の中心からどの程度離れているかを表わすものであり，値が小さい程中心らしいと言える．そこで，枝の中心らしさを表わす表示式（値が大きい程中心らしいとする）として，次のようなものが考えられる．

$$\alpha_1(e_i) = M - \varepsilon(e_i) \tag{18}$$

$$\alpha_1^*(e_i) = M^* - \varepsilon^*(e_i) \tag{18$'$}$$

$$\alpha_2(e_i) = 1/\varepsilon(e_i) \tag{19}$$

$$\alpha_2^*(e_i) = 1/\varepsilon^*(e_i) \tag{19$'$}$$

ここで，M, M^*は定数で，α_1, α_1^*を非負の実数としたいならば，$M \geqq \mathrm{diam}_r(N)$, $M^* \geqq \mathrm{diam}^*_r(N)$とする．例えば，図2のネットワークで$M=7$，$M^*=4$とすると，$\alpha_1(e_i)=2$ ($i=5,6,7,8$), $\alpha_1(e_i)=1$ ($i=1,2$), $\alpha_1(e_i)=0$ ($i=3,4,9,10,11$)で$\alpha_1^*(e_i)=2$ ($i=1,2,7,8$), $\alpha_1^*(e_i)=1$ (i=5,6), $\alpha_1^*(e_i)=0$ ($i=3,4,9,10,11$)となる．

次に，もう一つの中心らしさを示す表示式を考える．

〔定義4〕

ネットワーク$N(G, C)$において，枝e_iのρ_rに関する平均離心数$\mu(e_i)$を次のように定義する．

$$\mu(e_i) = \sum_{e_j \in E} \rho_r(e_i,\ e_j) \tag{20}$$

また，

$$M_e(N) = \{e_i \mid \mu(e_i) = \min_{e_j \in E} \mu(e_j)\} \tag{21}$$

としたとき，枝集合$M_e(N)$はNのρ_rに関する中央(median)といい，$M_e(N)$の要素は中央枝という．■

$\mu(e_i)$はe_iから他枝への準距離(ρ_r)の総和であり（枝数で割れば平均値），枝e_iの平均的離心数に相当する量を表わしていると考えられる．この枝の平均離心数$\mu(e_i)$は点の離心数等の概念との対応関係上では，枝に長さが与えられたネットワークの点の伝送数(transmission number)に相当するものである．$\mu(e_i)$の値が小さい程，枝e_iは中央らしいことを意味している．そこで，中央らしさを示す（値が大きい程中央らしいとする）表示式として，

$$\beta_1(e_i) = \sum_{e_j \in E} \{M - \rho_r(e_i,\ e_j)\} \tag{22}$$

等が考えられる（Mは定数）．

例えば，図2のNを考える．図4に$M=7$とした場合の$\mu(e_i)$ ($\beta_1(e_i)$) の値が各枝に記されている．このNの中央は$M_e(N) = \{e_7,\ e_8\}$である．

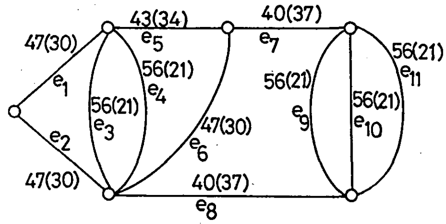


図4 $N(G, C)$の$\mu(e_i)$ ($\beta_1(e_i)$)の値

Fig.4 The value of $\mu(e_i)(\beta_1(e_i))$ in a network $N(G, C)$.

5. 枝の中心らしさを測る関数

前章において，枝の中心らしさ又は中央らしさを測るいくつかの表示式を示した．ここでは，この中心又は中央らしさを測る表示式を中心らしさを測る関数（中心度関数）と総称することにし，一般化を試みる．この議論の進め方は距離空間上の点の中心らしさを測る関数の場合[2]と同様であるが，ここでは距離ではなく枝間の準距離ρ_rが与えられていること及び準距離の変形法は文献(2)の場合の最短路的ではないため，公理系，定理及びその証明法等大部分の点で文献(2)とは異なり，又新しい結果が含まれていることを予め注意しておく．

ネットワークNにおいて，$h(e_i;\rho_r)$を枝e_iの上に定義される実数値関数とする．ただし，$h(e_i;\rho_r)$

は枝e_iの関数であるが，ρ_Tを用いて計算するという意味を表わしている．Nの枝e_iの中心らしさを$h(e_i;\rho_T)$の値によって測ることを考える．Nの一つの枝e_kの容量が減少したとし，その減少量をδ，つまり

$$C'(e_k)=C(e_k)-\delta,\ (0\leqq\delta<C(e_k)) \tag{23}$$

とする．このようにNから枝e_kの容量を減少させて得られたネットワークをN'とし（N' はNの式(23)による変形と言う），N'の枝間の準距離をρ_T'とする．そして，ρ_T'を用いた枝e_iの関数値を$h(e_i;\rho_T')$とする．ネットワークNの式(23)の変形による$h(e_i;\rho_T)$の変化量を$\Delta(e_i)$とする．つまり，

$$\Delta(e_i)=h(e_i;\rho_T')-h(e_i;\rho_T) \tag{24}$$

さて，枝の中心らしさを測るといっても大変あいまいでとらえどころがない．そこで，ここでは$\Delta(e_i)$を用いて，次のような中心度関数の公理系を提案し，議論の出発点としよう．

〔公理系〕

Nの任意の一つの枝をe_kとする．枝e_kの容量を任意の値δ（但し，$0\leqq\delta<C(e_k)$）だけ減少させるNの変形（すなわち，Nの式(23)の変形）に対して，次の2つの条件：

(i) $\Delta(e_k)\geqq 0$

(ii) $e_j\in E$に対して

$\Delta(e_k)\geqq\Delta(e_j)$

を満足する場合，hを（Eに関する）中心度関数といい，条件(i)のみを満足する関数を半中心度関数という． ■

この公理系は次のような枝の中心らしさの直感的考え方をまとめたものである．

2.2のρ_Tの定性的意味から，ある枝e_kの一部の容量が破壊された，すなわちe_kの容量が減少したとすると，e_kと他の枝との準距離は減少し，その結果，他枝との関係が密になることがわかる．このことは枝e_kの中心らしさは少なくとも増加したと考えるべきであろう（条件(i)）．また，このとき枝e_kの中心らしさの増加量はEの他のどの枝の中心らしさの増加量より大きいであろう（条件(ii)）．ここで，e_kの中心らしさの増加量をEの全ての枝のそれと比較しているが，Eのある部分集合と比較することも考えられる．この公理系ではEの全ての枝との比較をしているため，やや厳しい条件であるとも考えられる．以上のような，枝の中心らしさの直感的意味が上述の公理系の基礎的考え方となっている．

次に，この（半）中心度関数の公理系を満足する関数として具体的にどのようなものがあるか考察する．ここで，前章に示した中心らしさを測る表示式の一般形として次の関数の形式h_cとh_Mを考える．

$$h_c(e_i;\rho_T)=\psi(\xi(e_i)) \tag{25}$$

ここで，$\xi(e_i)$は$\varepsilon(e_i)$又は$\varepsilon^*(e_i)$を表わし，ψはネットワークに依存しない$\xi(e_i)$の実数値関数で，$(0,\infty)$において2回微分可能とする．

$$h_M(e_i;\rho_T)=\sum_{e_j\in E}F(\rho_T(e_i,e_j)) \tag{26}$$

ここで，Fはネットワークに依存しないρ_Tの実数値関数で，$(0,\infty)$において2回微分可能とする．

次に，このh_cとh_Mが任意のネットワークで（半）中心度関数となるための必要十分条件を求めてみよう．Nの式(23)の変形に対して，枝間の準距離ρ_Tは一般に減少し（増加することはなく），減少した枝間の準距離ρ_T'を決めるカットセットには枝e_kが必ず含まれることから次の補題を得る．

〔補題1〕

ネットワーク$N(G,C)$が式(23)の変形を行なったとき，$e_i,e_j\in E$に対して，

$$\delta\geqq\rho_T(e_i,e_j)-\rho_T'(e_i,e_j)\geqq 0$$

及び，

$$\rho_T(e_k,e_i)-\rho_T'(e_k,e_i)=\delta$$

が成立する． ■

この補題より，次の定理を得る．

〔定理3〕

任意の$N(G,C)$に対して，関数h_c，h_Mが半中心度関数となるための必要十分条件はψ及びFが非増加関数であることである．

（証明） 十分性は，補題1より$\rho_T(e_k,e_i)$,$(e_i\in E)$,が減少することから明らかである．必要性については，ネットワークの一例をあげて証明する．図5(a)のネットワークを考え，$C(e_k)+C(e_j)=x$ とする．枝e_kの容量をδ（$0\leqq\delta<C(e_k)$）だけ減少させる変形を考える．h_Mについて考えると，

$$\Delta(e_k)=2\{F(x-\delta)-F(x)\}$$

任意のx，δ（但し，$0\leqq\delta<C(e_k)$）について$\Delta(e_k)\geqq 0$が成立するためにはF'（Fの微分）が負又は零，つまりFが非増加関数でなければならない．h_cについても同様． （証明終）

$N(G,C)$の式(23)による変形後の枝e_iの離心数を$\varepsilon'(e_i)$（$\varepsilon'^*(e_i)$）とすると次の補題が成立する．

〔補題2〕

$N(G,C)$の式(23)の変形に対して，枝e_iのρ_Tの最小

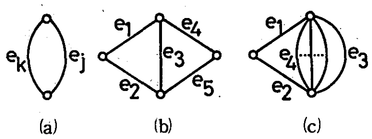


図5　$N(G, C)$の一例
Fig.5　Networks.

に関する離心数$\varepsilon^*(e_i)$が減少したとする．このとき，

$$\varepsilon'^*(e_k) \leqq \varepsilon'^*(e_i) \quad (27)$$

である．

（証明）　$\varepsilon^*(e_i)$が減少したとすると，変形後のN'において，枝e_iを含む最小容量のカットセットの中に枝e_kを含むことを意味している．このことと，ρ_Tの最小に関する離心数の定義より，$\varepsilon'^*(e_k) \leqq \varepsilon'^*(e_i)$を得る．（証明終）

これらの補題を用いて次の定理を得る．

〔定理4〕

任意の$N(G, C)$に対し，$h_c(e_i\,;\rho_T)=\psi(\xi(e_i))$が中心度関数となるための必要十分条件は，$\psi$が非増加関数でかつ

(i)　$\xi(e_i)=\varepsilon(e_i)$のとき，$\psi$がaffineであることである．

(ii)　$\xi(e_i)=\varepsilon^*(e_i)$のとき，$\psi$が凸関数であることである．

(iii)　$\xi(e_i)$が$\varepsilon(e_i)$，$\varepsilon^*(e_i)$両方に対してはψがaffineであることである．

（証明）

(i)　まず，十分性について証明する．式(25)の変形に対して，$\varepsilon(e_i)$が減少したとすると，補題1からその減少量はδを超えない．

$\varepsilon(e_k)=x_1$，$\varepsilon(e_i)=x_2$とすると

$$Y=\Delta(e_k)-\Delta(e_i)=\{\psi(x_1-\delta)-\psi(x_1)\} - \{\psi(x_2-\delta')-\psi(x_2)\},\ (\delta \geqq \delta')$$

ψが非増加関数で$\delta \geqq \delta'$に注意すると

$$Y \geqq \{\psi(x_1-\delta)-\psi(x_1)\}-\{\psi(x_2-\delta) -\psi(x_2)\}$$
$$=\{\psi(x_2)-\psi(x_1)\}-\{\psi(x_2-\delta)-\psi(x_1-\delta)\}$$

ここで，$\psi(x)$がaffineであることから，Yは非負となる．

必要性について述べる．ψの非増加性は定理3より得られる．次に，ネットワークの一例をあげる．図5の(b)を考える．$C(e_k)=x_k\ (k=1, 2, \cdots)$とする．ここで，$x_4=x_5$，$x_1>x_2 \geqq x_3+x_4$とする．このとき，$\varepsilon(e_1)=x_1+x_2$，$\varepsilon(e_3)=x_1+x_3+x_4$．枝$e_1$の容量を$\delta$だけ減少させる変形を考える．ここで，$0 \leqq \delta < x_1-x_2$とすると，

$$\varepsilon'(e_1)=x_1+x_2-\delta,\quad \varepsilon'(e_3)=x_1+x_3+x_4-\delta$$

このとき，公理系の条件(ii)より，$\Delta(e_1) \geqq \Delta(e_3)$でなければならない．

$$Y=\Delta(e_1)-\Delta(e_3)=\{\psi(x_1+x_2-\delta)-\psi(x_1+x_2)\} -\{\psi(x_1+x_3+x_4-\delta)-\psi(x_1+x_3+x_4)\}$$
$$=\{\psi(x_1+x_3+x_4)-\psi(x_1+x_2)\}-\{\psi(x_1+x_3 +x_4-\delta)-\psi(x_1+x_2-\delta)\}$$

Yが任意の$x_1, x_2, x_3, x_4, \delta$に対して（但し，$x_1+x_3+x_4 \leqq x_1+x_2$，$0 \leqq \delta < x_1-x_2$），非負となるためには，$\psi''(x)$（$\psi(x)$の2回微分）が負又は零，つまり$\psi(x)$（$x$の値は$x_1$，$x_2$，…を選んで変えられる）が凹関数である必要がある．次に同じネットワーク（図5(b)）において，$x_1=x_3=x_5$，$x_2=x_4$，$2x_2>x_1 \geqq x_2$とする．このとき，$\varepsilon(e_1)=x_1+x_3+x_5=3x_1$，$\varepsilon(e_3)=x_1+x_3+x_4=2x_1+x_2$．枝$e_3$の容量を$\delta$だけ減少させる変形を考える．ここで，$0 \leqq \delta < x_1$，$\varepsilon'(e_1)=3x_1-\delta$，$\varepsilon'(e_3)=2x_1+x_2-\delta$．このとき，公理系の条件(ii)より，$\Delta(e_3) \geqq \Delta(e_1)$でなければならない．

$$Y=\Delta(e_3)-\Delta(e_1)$$
$$=\{\psi(2x_1+x_2-\delta)-\psi(2x_1+x_2)\} -\{\psi(3x_1-\delta)-\psi(3x_1)\}$$
$$=\{\psi(2x_1+x_2-\delta)-\psi(3x_1-\delta)\} -\{\psi(2x_1+x_2)-\psi(3x_1)\}$$

Yが任意のx_1, x_2, δに対して（但し，$2x_1+x_2 \leqq 3x_1$，$0 \leqq \delta < x_1$），非負となるためには，$\psi''(x)$が非負，つまり$\psi(x)$が凸関数である必要がある．ゆえに，$\psi(x)$が凹関数でかつ凸関数であるためには$\psi(x)$はaffineである必要がある．

(ii)　まず，十分性について証明する．式(23)の変形に対して，$\varepsilon^*(e_i)$が減少したとすると，その減少量はδを越えない．

$\varepsilon'^*(e_k)=x_1$，$\varepsilon'^*(e_i)=x_2$とすると

$$Y=\Delta(e_k)-\Delta(e_i)$$
$$=\{\psi(x_1)-\psi(x_1+\delta)\}-\{\psi(x_2)-\psi(x_2+\delta')\} \quad (\delta \geqq \delta')$$

ψが非増加関数で，$\delta \geqq \delta'$より

$$Y \geqq \{\psi(x_1)-\psi(x_1+\delta)\}-\{\psi(x_2)-\psi(x_2+\delta)\}$$
$$=\{\psi(x_1)-\psi(x_2)\}-\{\psi(x_1+\delta)-\psi(x_2+\delta)\}$$

ここで，式(27)より，$x_1 \leqq x_2$又，$\psi(x)$が凸関数であることを用いるとYは非負となる．

必要性について述べる．ψの非増加性は定理3より

得られる．次に，ネットワークの一例として図5(b)を再び用いる．ただし，$x_4=x_5$，$x_3+x_4 \geqq x_2 \geqq x_1$とする．このとき，$\varepsilon^*(e_1)=x_1+x_2$，$\varepsilon^*(e_3)=x_1+x_3+x_4$．枝$e_1$の容量を$\delta$（$0 \leqq \delta < x_1$）だけ減少させる変形を考えると，

$$\varepsilon^*(e_1)=x_1+x_2-\delta,\ \varepsilon^*(e_3)=x_1+x_3+x_4-\delta$$

公理系の条件(ii)より，$\Delta(e_1) \geqq \Delta(e_3)$ でなければならないから，

$$\begin{aligned} Y &= \Delta(e_1)-\Delta(e_3) \\ &= \{\psi(x_1+x_2-\delta)-\psi(x_1+x_2)\} \\ &\quad -\{\psi(x_1+x_3+x_4-\delta)-\psi(x_1+x_3+x_4)\} \\ &= \{\psi(x_1+x_2-\delta)-\psi(x_1+x_3+x_4-\delta)\} \\ &\quad -\{\psi(x_1+x_2)-\psi(x_1+x_3+x_4)\} \end{aligned}$$

ここで，Yが任意の$x_1, x_2, x_3, x_4, \delta$に対して（但し，$x_1+x_2 \leqq x_1+x_3+x_4$，$0 \leqq \delta < x_1$），非負となるためには$\psi''(x)$が非負，つまり$\psi(x)$が凸関数である必要がある．

(iii) $\varepsilon(e_i)$，$\varepsilon^*(e_i)$両方に対して，h_cが中心度関数となるための必要十分条件は(i)，(ii)より，ψが非増加でaffineであることである．（証明終）

この定理から式(18)，(18)′，(19)′のα_1，α_1^*，α_2^*は任意のネットワークにおいて中心度関数となる例であり，式(19)のα_2は半中心度関数となる例である．

次に，関数h_Mについて調べる．まず，次の補題が成立する．

〔補題3〕

$N(G, C)$の式(23)の変形に対して，$\rho_r(e_i, e_j)$が減少したとする．このとき，

$$\rho_r'(e_i, e_k) \leqq \rho_r'(e_i, e_j) \tag{28}$$

（証明）$\rho_r(e_i, e_j)$が減少したということは，変形後のネットワーク$N'(G, C)$におけるe_i，e_jを含む最小（容量の）カットセットは枝e_kを含む．$\rho_r'(e_i, e_k)$はN'において，e_i，e_kを含む最小カットの容量であるから$\rho_r'(e_i, e_k) \leqq \rho_r'(e_i, e_j)$である．（証明終）

この補題を用いて次の定理を得る．

〔定理5〕

任意の$N(G, C)$に対し，関数h_Mが中心度関数となるための必要十分条件はFが非増加関数で，かつ凸関数であることである．

（証明）十分性についてまず証明する．Fは非増加で凸関数とする．式(26)より

$$\Delta(e_j)=\sum_{e_i \in E}\{F(\rho_r'(e_j, e_i))-F(\rho_r(e_j, e_i))\} \tag{29}$$

ここでもし，枝e_j（$e_j \in E$）に対して，枝e_jとの準距離が減少したどの$e_i \in E$についても，$F(\rho_r'(e_k, e_i))-F(\rho_r(e_k, e_i)) \geqq F(\rho_r'(e_j, e_i))-F(\rho_r(e_j, e_i))$が成立するならば，明らかに$\Delta(e_k) \geqq \Delta(e_j)$を得る．

$$x_1=\rho_r'(e_k, e_i)=\rho_r(e_k, e_i)-\delta,\ (\delta>0)$$

$$x_2=\rho_r'(e_j, e_i)=\rho_r(e_j, e_i)-\delta',\ (\delta'>0)$$

とすると，補題1，補題3より，$\delta \geqq \delta'$，$x_1 \leqq x_2$である．Fは非増加で，凸関数であるから

$$\begin{aligned} &\{F(x_1)-F(x_1+\delta)\}-\{F(x_2)-F(x_2+\delta')\} \\ &\geqq \{F(x_1)-F(x_2)\}-\{F(x_1+\delta)-F(x_2+\delta)\} \geqq 0 \end{aligned}$$

ゆえに，$\Delta(e_k) \geqq \Delta(e_j)$が成立する．

必要性について述べる．ψの非増加性は定理3より得られる．次に図5(c)のネットワークを考える．枝e_4の両端にはe_4を含め（e_3は除いて）同一容量の枝がm個並列にあるとする．$C(e_i)=x_i$ ($i=1, 2, \cdots$) とし，$x_1 \leqq x_2$，$x_1 < x_3$，$x_i=x_a/m$ ($i \geqq 4, m \geqq 1$) とする．このネットワークで枝e_3の容量をδ（$0 \leqq \delta < x_3-x_1$）だけ減少させる変形を考える．$y_1=x_1+x_3+x_a$，$y_2=x_2+x_3+x_a$とおくと，$m \geqq 1$に対して

$$\begin{aligned} \Delta(e_3) &= \{F(y_2-\delta)-F(y_2)\}+(m+2)\{F(y_1-\delta) \\ &\quad -F(y_1)\} \end{aligned}$$

$$\Delta(e_2)=(m+1)\{F(y_2-\delta)-F(y_2)\}$$

ゆえに，公理系の条件(ii)より，$\Delta(e_3) \geqq \Delta(e_2)$でなければならない．すなわち，

$$\begin{aligned} Y &= \Delta(e_3)-\Delta(e_2) \\ &= 2\{F(y_1-\delta)-F(y_1)\}+m\{F(y_1-\delta) \\ &\quad -F(y_1)-F(y_2-\delta)+F(y_2)\} \end{aligned} \tag{30}$$

とすると，任意のNについてYが非負でなければならない．$m=0$のN及びmが十分大きなNに対して，$\Delta(e_3) \geqq \Delta(e_2)$である必要性から（$F$がネットワークに依存しない関数であることを考慮して），それぞれ

$$F(x_1+x_3-\delta) \geqq F(x_1+x_3),\ (m=0\text{ の }N\text{より}) \tag{31}$$

及び（式(30)より）

$$F(y_1-\delta)-F(y_2-\delta) \geqq F(y_1)-F(y_2) \tag{32}$$

が必要である．任意のx_1，x_2，x_3，x_a及びδに対して（但し，$y_1 \leqq y_2$，$0 \leqq \delta < x_3-x_1$），式(32)が成立するには$F''(x)$（$F(x)$の2回微分）が非負，つまり$F(x)$が凸関数でなければならない（なお，式(31)が成立するにはψの非増加性が必要であるがこれは既に得られている）．ゆえに，Fは非増加，凸関数である必要がある．（証明終）

式(22)のβ_1は式(25)のh_Mにおいて，$F(x)=M-x$として得られ，このときFは非増加，凸関数である．ゆえに，定理5よりβ_1は任意のネットワークにおいて中心

度関数となる一例である．

定理３～５より，この章で提案した中心度関数の公理系によって特徴付けられる関数の中に前章の中心らしさを測る表示式が含まれることがわかる．このことから，この公理系は前章までに述べた枝の中心らしさの特徴の一つの簡潔な表現であるとみることができよう．

以上の結果から，式(25)，(26)において，$\psi(x)$，$F(x)$を応用に応じ適当に選ぶことにより，種々の枝の中心らしさを測る式を作ることができる．

6. むすび

枝の中心らしさを，枝と枝との係わりによって測る一方法について提案を行なった．枝と枝との係わりは，両方の枝の両端点間に同時に最大フローを流したとき，そのフローを零にするために破壊すべき最小の枝容量によって評価することとした．そして，この係わりの量が三角不等式を満足する準距離となることを示し，点の場合のアナロジーによって，枝の中心を定義した．そして，枝の中心らしさを表わす表示式を示し，その一般化を試みた．これらは，２つの枝が共同して（同時に）フローを流すようなモデルのネットワークに対する枝の罹障度を評価する場合に役立つものと考えられる．

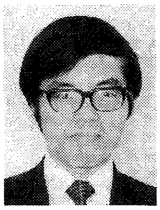
今後，枝の中心とネットワーク構造との関係，他の種類の枝間の係わりを評価する量，マトロイドへの拡張等，種々の興味ある問題が残されている．

謝辞　日頃御指導頂く，新潟大・工・阿部武雄教授及び論文の改善点を指摘頂いた査読委員に感謝の意を表する．

文　献

(1) N. Christofides："Craph Theory-An algorithmic approach-", Academic Press (1975).
(2) 篠田，仙石："距離空間における点の中心らしさを表わす関数の公理論的基礎づけ"，信学論(A)，J66-A，4，pp. 352-359（昭58-04）．
(3) 仙石，篠田："ネットワークの枝の中心らしさを測る関数"，信学技報，CAS 83-119（1984-02）．
(4) 伊理，他："演習グラフ理論，－基礎と応用－"，コロナ社（1983-04）．

（昭和60年4月24日受付，6月28日再受付）



仙石　正和

昭42 新潟大・工・電気卒．昭47 北大大学院博士課程了．工博．同年北大・工・電子助手．現在，新潟大・工・情報助教授．回路網理論，グラフ理論，情報伝送などの研究に従事．著書「演習グラフ理論」（共著）

篠田　庄司

昭39 中大・理工・電気卒．昭48 同大学院博士課程了．工博．昭40中大研究助手．現在，同大理工学部電気工学科教授．グラフ・ネットワーク構造を持つシステムの解析，設計，制御の研究に従事．著書「最新回路理論」，「回路解析」など．