——論　文——

空間の変形とネットワークの点の中心らしさを測る関数の理論

正　員　篠田　庄司†　　　正　員　仙石　正和††

The Concept of Space Modification and a Theory of Function Measuring the Centrality (or Mediality) of a Point in a Network

Shoji SHINODA† *and* Masakazu SENGOKU††, *Members*

あらまし　通信網，交通網，社会集団関係などネットワーク構造を有するシステムにおいて，点の中心らしさ（重要性など）を論ずる場合が多い．点の中心らしさはその点と他の点との係わりによって測られており，その係わりの尺度として従来距離に基づく方法が用いられてきた．また最近容量に着目する方法も提案されてきている．本文では点と点との係わりを距離の場合と容量の場合で区別して論じてきた従来の中心度関数の議論を空間の点に関する変形という概念の導入によって統一的に論ずることを試みる．そして，この空間の変形に基づいて中心度関数及び半中心度関数の公理系を，従来の中心度関数の共通の性質をまとめる形で，新たに定義する．又，点の上に定義されるある実数値関数のこの公理系に基づく特徴づけを行ない，その結果が，従来の中心度関数の議論の主要な結果を含むことが示される．最後に，点に重み，枝に長さや容量が与えられたネットワークに対するこの空間上での理論の応用について述べる．この理論は点に重み，枝に長さ，容量が与えられたネットワークに適用可能な中心度関数の一つの一般化理論である．

1. まえがき

通信網，交通網，社会集団関係網などのネットワークやグラフ構造をもつシステムに関する基本的にして重要な問題の一つに，点の中心らしさ（他の点に対する優位性など）を論じる問題がある．この問題は古くから注目され，これまでに多くの論文がそれに関して発表され，いくつかの注目すべき結果が導かれるに至っている（たとえば文献(20)参照）．

１９７６年までは，点の離心数（eccentricity；その点から最大距離にある点までの距離）や伝送数（transmission number；その点から他の全ての点までの距離の総和）又はそれらの若干の変形・拡張形が点の中心らしさを測る関数として用いられ，中心らしい点を求める方法（たとえば，文献(2)，(3)参照），中心らしい点の分布と関数形やグラフ構造との関係（たとえば文献(4)，(5)参照），非隣接点対への枝付加に関する中心らしい点の不安定性[7]，点の中心らしさを測る幾つかの関数に共通な性質（凸性など）などが研究されていた[6]．１９７６年になって，梶谷と丸山は，それまでの点の中心らしさを測るいくつかの代表的関数に共通な性質を「非隣接点対への枝付加というグラフ変形のもとでの関数値の変化の傾向」によってとらえ，点の中心らしさを測る関数を，中心度関数（centrality function）という名のもとで，特徴づけることを試みた[8]（彼ら以前にも中心度関数という言葉自体は用いられていたが，それは単に点の中心らしさを測る関数という概念的定義によっていた）．彼らのあと，彼らの中心度関数の定義の範ちゅうには点の離心数は含まれないことが指摘されるとともに，中心度関数の定義を弱めた半中心度関数の定義が導入され，彼らとほぼ同様の理論展開が，グラフ変形として２点一致を用いる場合にも可能であることが示され[10]，それに引き続き，そのような理論の距離空間への拡張，すなわち距離空間における点の中心らしさを測る関数を，２点間の距離の縮小という空間変形のもとでの関数値の変化の傾向で特徴づける理論とそれのネットワークへの還元が展開された[12]．その還元において特に注目されることは，変形が具体的，物理的意

† 中央大学理工学部電気工学科，東京都
Faculty of Science and Engineering, Chuo University, Tokyo, 112 Japan
†† 新潟大学工学部情報工学科，新潟市
Faculty of Engineering, Niigata University, Niigata-shi, 950-21 Japan

味を持つことが多いということである．たとえば，点を局に枝を回線に対応させた通信網では枝の付加，２点一致などはそれぞれ回線の増加，２局の統合などに対応している．このように中心度関数に関しては，点と点との係わりを点間の距離（distance）で表現した研究がもっぱらされていたが，最近になって，点間の容量（capacity）によって点の間の係わりを表現し，点の中心らしさを測ることが試みられるようになった[11],[14]．小文では，従来考えられてきた枝付加，枝の長さの変化，２点一致などのネットワークの変形による距離又は容量の変化に対して距離と容量の場合に共通の性質があることに注目し，上述のネットワークの変形を空間の点に関する変形という概念によって抽象化（モデル化）し，従来の中心度関数の議論を統一的に扱うことを試みる．点の上に定義される実数値関数によって点の中心らしさを測ることにし，その実数値関数の値が空間の点に関する変形によってどのように変化すべきかということに注目して（半）中心度関数が定義される．そして，ある実数値関数が（半）中心度関数となるための必要十分条件が導出され，これらがネットワークの具体的変形に適用される．その結果，従来の中心度関数の理論の主要な部分が小文の（半）中心度関数の定義より得られることが示される．又，小文では，これらの結果を利用して点に重み，空間に距離と容量が与えられた空間における（半）中心度関数についても議論を進め，最後に簡単な例題について述べている．この理論は従来の中心度関数の理論の一つの合理的な（無理のない）一般化理論であると考えられる．

2．ネットワーク上の距離と容量

ここでは準備として，ネットワーク上の距離，容量の用語の説明をしておく．

ネットワークの上で，最大圧（最短路），及び最大流問題は基本的な問題であるが，これに関連した「距離」，「容量」なる量はネットワークの点の相互の係わりを表わす重要なパラメータである[1]．

Sは点と呼ばれる元からなる空でない集合（点集合と言う）とし，$\rho: S\times S\to\overline{\boldsymbol{R}}_+$，$\gamma: S\times S\to\overline{\boldsymbol{R}}_+$，($\overline{\boldsymbol{R}}_+=[0,\infty]$：非負実数と$\infty$）とする．このとき，$\rho$が（擬）距離公理（公知と考え省略）を満足すれば，$(S;\rho)$は$\rho$を距離関数とする（擬）距離空間と言われる．距離の対称性を除いた$(S;\rho)$を有向（擬）距離空間といい，$\rho(s,t)$はsからtへの（有向）距離と言うことにする．γが次の容量公理を満足するとき，$(S;\gamma)$はγを容量関数とする容量空間と言われる．$\gamma(s,t)$はsからtへの容量と言われる．

〔容量公理〕

$\gamma(s,t)\geqq 0$，$s, t, r\in S$に対して，

〔i〕 $\gamma(s,t)=\infty \Leftrightarrow s=t$

〔ii〕 $\gamma(s,t)=\gamma(t,s)$

〔iii〕 $\gamma(s,r)\geqq\min\{\gamma(s,t),\gamma(t,r)\}$

■

〔i〕の代わりに，

〔i〕′ $\gamma(s,s)=\infty$

で置き換えた$(S;\gamma)$は擬容量空間と言う．ここで，対称性の条件〔ii〕を除いた，すなわち〔i〕(〔i〕′)と〔iii〕を満足する$(S;\gamma)$を有向（擬）容量空間と言う．

ネットワーク上の距離，容量の典型的例として，それぞれ点間の最短路長及び最大流量がある．

以下，空間$(S;\beta)$（$\beta: S\times S\to\overline{\boldsymbol{R}}_+$）について論ずるが，$\beta$の例として$\rho$，$\gamma$がある．$\beta$が対称性を満足しない場合，有向空間と呼ぶ．以下，特に断わらなければ$(S;\beta)$は有向空間を意味する．

3．空間の変形操作

点集合を等しくする２つの空間$(S;\beta)$と$(S;\beta')$を考える．$(S;\beta)$と$(S;\beta')$は別々の空間であるが，βがβ'に変化し$(S;\beta)$から$(S;\beta')$が得られたと考えることとし，以後の議論のことを考え$(S;\beta)$の変形によって$(S;\beta')$が得られた又は$(S;\beta')$は$(S;\beta)$の変形と呼ぶことにする．このような考え方が本文の主張の中枢をなすのであえてこの説明をしておく．

〔定義１〕

点$p\in S$に対し，Sの部分集合$V(p)$が定義されているものとする．$(S;\beta')$は$(S;\beta)$の変形とし，$\delta=\beta'(p,s)-\beta(p,s)$が$\delta\neq 0$である点$s$（$\in S$）と$V(p)$の任意の点$r$に対して，$\delta'=\beta'(r,s)-\beta(r,s)$とおく．このとき常に，$\delta>0$，$\delta\geqq\delta'$（$\delta<0$，$\delta\leqq\delta'$）を満足するならば，この空間の変形は$V(p)$を対象とする又は$V(p)$に限った点$p$から出る方向への点$p$に関する拡大（縮小）変形という．また，特に，常に$\delta>0$（$\delta<0$）のとき，$\delta'\geqq 0$（$\delta'\leqq 0$）ならば，これを単調拡大（縮小），総称して単調変形という． ■

点pへ入る方向への点pに関する拡大（縮小）変形の定義はδ，δ'の定義式でそれぞれpとs，rとsを交換して得られる．また，βが対称性をもつ場合，両

者は一致することに注意．点pから出る方向の議論と入る方向の議論は対称なので，本文では特に言及しなくとも前者のみを扱う．そして，$V(p)$を対象とする点pから出る方向への点pに関する拡大（縮小）変形を簡単のために$V(p)$を対象とする点pに関する拡大（縮小）変形（総称して点pに関する変形）と表現する．

空間とその変形が与えられたとき，着目した点pについて，この変形が点pに関する変形となっているかどうかは興味深い問題である．これはもちろん$V(p)$の取り方に依存する．たとえば，$V(p)=\{p\}$で常に$\delta>0$（又は$\delta<0$）であれば点pに関する変形となる．これは最も簡単な自明な例である．これに対して，$V(p)=S$の場合には，どの点に関する変形となっているかは一般に複雑な問題である．本文では以下，$V(p)=S$として議論を進める．以下，$V(p)=S$を対象とする点pに関する変形を単に点pに関する変形と言うことにする．

次に点pに関する単調変形の例をあげる．

(a) $s,\ t\in S$に対して，（δ：定数）

$$\beta'(s,\ t)=\beta(s,\ t)+\delta \tag{1}$$

は任意の点に関する単調変形を与える．なお，

$$\beta'(s,\ t)=a\cdot\beta(s,\ t),\quad (a：定数) \tag{1$'$}$$

は必ずしも任意の点に関する単調変形を与えない．

(b) **5.**で用いる例の一つであるβとして，ρを考える．$s,\ t\in S$に対して，

$$\rho'(s,\ t)=\min\{\rho(s,\ t),\ \rho(s,\ p)+\rho(q,\ t)+\lambda\},\ (\lambda=\rho(p,\ q)-\delta\geqq 0,\ \delta\geqq 0) \tag{2}$$

は点pに関する単調縮小となっている．証明は**5.**で与える．なお，$(S\,;\rho')$も有向距離空間となることがこの変形の特徴である．このことは距離空間の場合(12)と同様に証明される．

(c) 無向フローネットワークは3点間の距離を距離の大きな2辺は常に等しいと定めた距離空間（等2辺距離空間と呼ぶ）でモデル化できる．この等2辺距離空間の文献(17)で定義した縮小は単調縮小である．

(d) 有向フローネットワークにおいて，各点間の最大流量をβとする空間は有向容量公理を満足し，そのネットワークのある枝$(p,\ q)$の容量を増加させる操作は点pに関する単調拡大となる．証明は**5.**で与える．

次に，空間の変形に関連して定義される影響点集合について述べておく．

〔定義2〕

$$T_+^\beta(r)=\{s\,|\,\beta'(r,\ s)\neq\beta(r,\ s),\ s\in S\} \tag{3}$$

に対して，

$$I_+^\beta(u)=\{v\,|\,T_+^\beta(v)\subseteq T_+^\beta(u),\ T_+^\beta(v)\neq\phi\} \tag{4}$$

と定義される集合$I_+^\beta(u)$を点$u\in S$の出影響点集合（the set of out-influence points）という．また，$I_+^\beta(u)$の元はuの出影響点という． ■

式(3)の代わりに，$T_-^\beta(r)=\{s\,|\,\beta'(s,\ r)\neq\beta(s,\ r),\ s\in S\}$を用いて，入影響点集合（the set of in-influence points）といわれる集合も同様に定義される．

たとえば，点$p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ u,\ v,\ w$に対して，$T_+^\beta(p)=\{t,\ u,\ v\}$，$T_+^\beta(q)=\{t,\ u,\ v\}$，$T_+^\beta(r)=\{u,\ v\}$，$T_+^\beta(s)=\{v,\ w\}$であるとすると，式(4)より点$q$と点$r$は点$p$の出影響点であり，又，点$p$と点$r$は点$q$の出影響点である．点$s$は点$p,\ q,\ r$いずれの出影響点でもない．

以下，ある点から出る方向に注目した（添字：＋）議論（出影響点）のみをするが，入る方向に注目した（添字：－）場合も同様に成立することを注意しておく．そして，特に断わらない限り，出影響点を単に影響点と呼ぶことにする．

空間の変形によって点uとの間のβが変化した点は点uの変化点と呼べるであろう．一般に$\beta(s,\ t)$は点sと点tとの係わりを表わすものとし，ある点uの中心らしさは点uと他点との係わりによって測られるとしよう．このとき，空間の変形が，点uの中心らしさへ，どのように影響を与えるであろうか．その際，点uへの影響は点uの変化点全体によると考えることができよう．又，この空間の変形で，ある点vの変化点集合が点uの変化点集合の部分集合である場合には，この空間の変形による点vの中心らしさへの影響を与える点が点uへの影響を与える点の範囲内（包含関係の意味で）であるという意味で，点vは点uの影響点であると言う．

さて，定義1の空間の点pに関する変形は大まかに言うと点pとの間のβの変化量が他点間の変化量より大きいということを意味する．このことより，もし点pの中心らしさが，$\beta(p,\ s)$，$(s\in S)$で測られているとすると，βの変化が大きいこのような点の中心らしさの変化量は大きく，しかもその大きさは少なくとも点pの影響点より大きいであろう．このような考え方に沿った中心度関数の公理系が**4.**において

提案される．

4．空間の変形と中心度関数

空間（S；β）の中心らしさを空間の点$r\in S$の上に定義される実数値関数f（r；β）によって測ることを考える．f（r；β）は点rの関数であるが，βを用いて計算するという意味を持っている．f（r；β）がβ（r，s），（$s\in S$），のみによって決まるとき，f_+（r；β）と表わし，β（s，r）のみによって決まるとき，f_-（r；β）と表わす．以下，f_+（r；β），f_-（r；β）はf_+，f_-などと略記することがある．f_+，f_-に関する量にそれぞれ添字の＋及び－を付けて表わす．以下，f_+に関してのみ議論を進めるが，f_-に関しても全く同様の議論が成立する．

空間（S；β）の変形（S；β'）におけるβ'を用いて計算した点rの関数値をf_+（r；β'）とする．そして，空間のその変形によるf_+（r；β）の変化量を

$$\Delta_+(r;\beta)=f_+(r;\beta')-f_+(r;\beta) \qquad (5)$$

とする．

点の中心らしさは他の点との係わりによって決まるとしよう．点r，s，$t\in S$に対して，β（r，s）＞β（r，t）の場合，点rから点sへの係わりは点rから点tへの係わりより，大きいと考えるか，小さいと考えるか，２通りの考え方がある．前者をβは正（標準）形，後者をβは反（標準）形ということにする．

さて，点の中心らしさは他の点との係わりによって決まると考えただけでは点の中心らしさはどのようなものか，大変あいまいでとらえどころがない．そこで，Δ_+（r；β）を用いて次のような中心度関数の公理系を提案し，議論の出発点としよう．

〔公理系〕

βが正形（反形）である空間（S；β）の任意の点をpと呼ぶ．点pに関する任意の拡大（縮小）変形に対して，条件

(i)　$\Delta_+(p;\beta)\geqq 0$

を満たし，さらにSの点pに関する部分集合$N_+^{\beta}(p)$が次の条件を満足するとする．

(ii)　$r\in N_+^{\beta}(p)$に対して

$$\Delta_+(p;\beta)\geqq\Delta_+(r;\beta)$$

このとき，f_+をN_+^{β}に関する中心度関数という．特に(i)のみを満足するとき，f_+は半中心度関数という．また，$N_+^{\beta}=I_+^{\beta}$のときには，f_+を特に影響点集合に関する中心度関数，または単に中心度関数という．なお，空間の拡大（縮小）変形に制限又は条件を付ける場合は，その具体的変形に関する中心度関数ということにする．■

この公理系は，ある点の中心らしさはβが正形（反形）の場合，その点に関する拡大（縮小）に対して増加し，その増加の量はその点に指定された点集合N_+^{β}の中で最大であるという立場に立っている．$N_+^{\beta}=I_+^{\beta}$又は$N_+^{\beta}\subseteq I_+^{\beta}$の場合は，この公理系は前章の点$p$に関する変形と影響点集合の定義からわかるように，空間の変形によるβの値の変化量が大きく，かつ多くの点との係わりが変化する点，つまり変化点の多い点はその中心らしさの変化量も大きいということを述べている．

空間の点の変形の大小をβの値の変化量と変化点の数の大小で考えることにすると，これは大ざっぱには，空間の変形による点の中心らしさの変化量は，変形の大きい点程大きいということを主張していることになろう．この考え方は前章の最後に述べた影響点の直感的意味からも理解できるであろう．以下特に断わらない限り，N_+^{β}として影響点集合を考えることにする．

次に，f_+として次の関数形式について話を進めていこう．Sの有限部分集合をZとする．

$$f_+(r;\beta)=\sum_{u\in Z}\phi_u^+(\beta(r,u)) \qquad (6)$$

ただし，ϕ_u^+は点uに付随する実数値関数で結合関数とも呼ばれる空間によらない関数である．この各点に関する総和の形式は単なる思いつき的なものではなく location problem への応用にきわめて多く利用されている関数の一般形である[20]．

4.1　空間の変形と実数値関数の変化

ここでは，以後の議論の準備として空間の変形にある制限がある場合，空間の変形とΔ_+（r；β）との間にどのような関係があるか調べておく．

まず，本文で用いる関数の凹，凸性の定義をする．

〔定義３〕

$x\geqq y\geqq 0$，$z\geqq 0$に対し，$\varphi(y)-\varphi(x)\geqq\varphi(y+z)-\varphi(x+z)$ならば$\varphi$は凸関数，不等号が逆の場合凹関数，等号のみが成立するとき，affine 関数という．これは一般の凸関数又は凹関数の定義とは異なるが，φが有界又は連続の場合等価となるため，本文ではこの用語を用いることにする．■

点pに関する変形があったとする．点pの影響点を点rとし，点rの変化点をsとする．このとき，β（p，s）とβ（r，s）の大小関係又はβ'（p，s）とβ'（r，s）の大小関係が点sの選び方によらず一定の場合もあるであろう．このような場合，ϕ_u^+がある条件を満足するとΔ_+（p；β）とΔ_+（r；β）の大小関係につい

て次のいくつかの定理が成立する．

まず，$\beta'(r, s) \geqq \beta'(p, s)$の場合について次の定理が成立する．

〔定理1〕

$(S;\beta)$に点pに関する縮小変形をほどこした時，$r \in I_+^{\beta}(p)$，$\forall s \in (T_+^{\beta}(r) \cap Z)$に対して，

$$\beta'(r, s) \geqq \beta'(p, s) \tag{7}$$

とする．この時，もしϕ_s^+が非増加で凸関数ならば，

$$\Delta_+(p;\beta) \geqq \Delta_+(r;\beta) \tag{8}$$

また，もしϕ_s^+が非減少で凹関数ならば，

$$\Delta_+(p;\beta) \leqq \Delta_+(r;\beta) \tag{9}$$

（証明）

前半の場合のみについて証明する．f_+の定義から，

$$\Delta_+(u;\beta) = \sum_{v \in (T_+^{\beta}(u) \cap Z)} \{\phi_v^+(\beta'(u, v)) - \phi_v^+(\beta(u, v))\} \tag{10}$$

である．$\beta'(u, v) \leqq \beta(u, v)$であると$\phi_v^+$が非増加関数であることから，式(10)の各項は非負となる．そこで，$r \in I_+^{\beta}(p)$であるから，$\forall s \in (T_+^{\beta}(r) \cap Z)$に対して，

$$\phi_s^+(\beta'(p, s)) - \phi_s^+(\beta(p, s)) \geqq \phi_s^+(\beta'(r, s)) - \phi_s^+(\beta(r, s)) \tag{11}$$

を証明すれば十分である．

$$x = \beta'(p, s) = \beta(p, s) - \delta \tag{12}$$

$$y = \beta'(r, s) = \beta(r, s) - \delta' \tag{13}$$

とすると，点pに関する縮小変形であるから，$\delta > 0$，$\delta \geqq \delta'$．また，仮定（式(7)）より，$y \geqq x$．ゆえに，$\delta \geqq \delta'$とϕ_s^+の非増加性より，$\{\phi_s^+(x) - \phi_s^+(x+\delta)\} - \{\phi_s^+(y) - \phi_s^+(y+\delta')\} \geqq \phi_s^+(x) - \phi_s^+(y) - \phi_s^+(x+\delta) + \phi_s^+(y+\delta)$を得る．ここで，$\phi_s^+$の凸性と$y \geqq x$よりこの右辺は非負となる．すなわち，式(11)が成立し，式(8)を得る．

後半のϕ_s^+が非減少凹関数の場合も同様に証明される．（証明終）

同様に拡大変形の場合は次の定理が成立する．

〔定理2〕

$(S;\beta)$にpに関する拡大変形をほどこした時，$r \in I_+^{\beta}(p)$，$\forall s \in (T_+^{\beta}(r) \cap Z)$に対して，

$$\beta(r, s) \geqq \beta(p, s) \tag{14}$$

とする．この時，もしϕ_s^+が非増加で凸関数ならば，

$$\Delta_+(p;\beta) \leqq \Delta_+(r;\beta) \tag{15}$$

また，もしϕ_s^+が非減少で凹関数ならば，

$$\Delta_+(p;\beta) \geqq \Delta_+(r;\beta) \tag{16}$$

■

次に$\beta(r, s) \leqq \beta(p, s)$の場合について考える．

〔定理3〕

$(S;\beta)$に点pに関する縮小変形をほどこした時，$r \in I_+^{\beta}(p)$，$\forall s \in (T_+^{\beta}(r) \cap Z)$に対して，

$$\beta(r, s) \leqq \beta(p, s) \tag{17}$$

とする．この時，もしϕ_s^+が非増加で凹関数ならば，

$$\Delta_+(p;\beta) \geqq \Delta_+(r;\beta) \tag{18}$$

又，もしϕ_s^+が非減少で凸関数ならば，

$$\Delta_+(p;\beta) \leqq \Delta_+(r;\beta) \tag{19}$$

（証明）

前半の場合のみ証明する．証明の方針は定理1と同様で，式(13)まで同一．ただし，式(17)より，$x + \delta \geqq y + \delta'$である．$Y = \{\phi_s^+(x) - \phi_s^+(x+\delta)\} - \{\phi_s^+(y) - \phi_s^+(y+\delta')\}$において，$x \leqq y$とすると$\phi_s^+$の非増加性より，$Y$は非負である．又，$x \geqq y$とすると，$Y \geqq \{\phi_s^+(y+\delta) - \phi_s^+(x+\delta)\} - \{\phi_s^+(y) - \phi_s^+(x)\}$となり，$\phi_s^+$の凹性よりこの式の右辺は非負，ゆえに$Y$は非負となる．すなわち式(11)が成立し，式(18)を得る．

後半のϕ_s^+が非減少凸関数の場合も同様．

（証明終）

同様に拡大変形の場合は次の定理が成立する．

〔定理4〕

$(S;\beta)$に点pに関する拡大変形をほどこした時，$r \in I_+^{\beta}(p)$，$\forall s \in (T_+^{\beta}(r) \cap Z)$に対して，

$$\beta'(r, s) \leqq \beta'(p, s) \tag{20}$$

とする．この時，もしϕ_s^+が非増加で凹関数ならば，

$$\Delta_+(p;\beta) \leqq \Delta_+(r;\beta) \tag{21}$$

また，もしϕ_s^+が非減少で凸関数ならば，

$$\Delta_+(p;\beta) \geqq \Delta_+(r;\beta) \tag{22}$$

■

4.2 中心度関数の特徴づけ

$f_+(r;\beta)$がどのような関数の場合，中心度関数となるであろうか．これはどのような空間を考えるかに大きく依存し，具体的空間が決まらない限り，中心度関数を決めることは困難と考えられる．一方，どのような空間においても中心度関数となる関数$f_+(r;\beta)$はどのようなものであろうか．これは興味ある問題である．ここでは，式(6)の形式の関数$f_+(r;\beta)$について，任意の空間において中心度関数となるϕ_u^+の特徴について調べることにする．

〔定理5〕

βが正形（反形）の任意の$(S;\beta)$に対してf_+が半中心度関数となるための必要十分条件は$s \in Z$に

ついて ϕ_s^+ が非減少（非増加）関数であることである．

（証明）

十分性は任意の点 $s\in Z$ の ϕ_s^+ が上述の条件を満足すれば f_+ の定義から公理系の(i)の条件を満足することは明らかである．必要性について考える．β が正形の一つの空間（S；β）を考える．S の任意の２点を p，s（$s\in Z$）とする．$\beta'(p,s)=\beta(p,s)+\delta$，（$\delta>0$）とし，他点間の β は不変である変形を考える．このとき，この変形は点 p に関する拡大変形である．$\Delta_+(p;\beta)=\phi_s^+(\beta'(p,s))-\phi_s^+(\beta(p,s))$ が任意の $\beta(p,s)$，δ について非負となるためには，ϕ_s^+ が非減少関数であることが必要である．β が反形の場合，ϕ_s^+ が非増加関数である必要性も同様に証明される．（証明終）

空間の変形に関して，影響点集合がある条件を満足するならば次の定理が成立する．

〔定理６〕

S の任意の点 p について，ある種の点 p に関する拡大変形をほどこした時，次の条件（A）を満足するとする．β が正形の任意の空間（S；β）のこの種の任意の変形に対して，f_+ が中心度関数の条件を満足するための必要十分条件は条件（B）である．

（A）　$r\in I_+^{\beta}(p)$，$s\in(T_+^{\beta}(r)\cap Z)$ である任意の点 r，s に対して，

$\beta(r,s)\geqq\beta(p,s)$　(23)

（B）　ϕ_s^+，（$s\in Z$），は非減少で凹関数　(24)

（証明）

十分性：ϕ_s^+ が非減少関数であると定理５より条件(i)は満足する．また，(A)の条件を満足すれば，定理２の式(16)より(ii)も成立する．

必要性：（S；β）の一例として，Z の各点は少なくとも他の２点からの β は非零，有限でその値は異なるという空間を考える．すなわち，点 $s\in Z$ に対し，$\beta(p,s)<\beta(r,s)$ である２点 p，r が存在するとする．このような空間の例は，S が有限で各点間の β に全て異なる実数を割当てれば得られる．上述のような３点 p，r，s に対して，点 p に関する拡大変形として，$\beta'(p,s)=\beta(p,s)+\delta$，$\beta'(r,s)=\beta(r,s)+\delta$，（$\delta>0$）で他点間は不変であるものを考える．このとき，$r\in I_+^{\beta}(p)$ であり，３点 p，r，s は条件（A）を満足している．

$$\Delta_+(p;\beta)=\phi_s^+(\beta(p,s)+\delta)-\phi_s^+(\beta(p,s)) \tag{25}$$

$$\begin{aligned} Y&=\Delta_+(p;\beta)-\Delta_+(r;\beta)\\ &=\{\phi_s^+(\beta(p,s)+\delta)-\phi_s^+(\beta(p,s))\}\\ &\quad-\{\phi_s^+(\beta(r,s)+\delta)-\phi_s^+(\beta(r,s))\}\\ &=\{\phi_s^+(\beta(p,s)+\delta)-\phi_s^+(\beta(r,s)+\delta)\}\\ &\quad-\{\phi_s^+(\beta(p,s))-\phi_s^+(\beta(r,s))\} \end{aligned} \tag{26}$$

$\beta(p,s)<\beta(r,s)$ である任意の β と δ に対して $\Delta_+(p;\beta)$ と Y が非負となるためには，式(25)，(26)より ϕ_s^+ が非減少凹関数であることが必要である．

（証明終）

定理５，定理４を用いて同様に次の定理を得る．

〔定理７〕

定理６において，次の（A）′，（B）′ の対応についても成立する．

（A）′　$r\in I_+^{\beta}(p)$，$s\in(T_+^{\beta}(r)\cap Z)$ である任意の点 r，s に対して

$\beta'(r,s)\leqq\beta'(p,s)$　(27)

（B）′　ϕ_s^+，（$s\in Z$），は非減少で凸関数　(28)

■

又，β が反形の空間については，定理５，定理１，定理３を用いて同様に次の定理が成立する．

〔定理８〕

S の任意の点 p について，ある種の点 p に関する縮小変形をほどこした時，次の条件（A）を満足するとする．β が反形の任意の空間（S；β）のこの種の任意の変形に対して，f_+ が中心度関数の条件を満足するための必要十分条件は（B）である．

（A）　$r\in I_+^{\beta}(p)$，$s\in(T_+^{\beta}(r)\cap Z)$ である任意の点 r，s に対して

$\beta'(r,s)\geqq\beta'(p,s)$　(29)

（B）　ϕ_s^+，（$s\in Z$），は非増加で凸関数　(30)

■

〔定理９〕

定理８において，次の（A）′，（B）′ の対応についても成立する．

（A）′　$r\in I_+^{\beta}(p)$，$s\in(T_+^{\beta}(r)\cap Z)$ である任意の点 r，s に対して

$\beta(r,s)\leqq\beta(p,s)$　(31)

（B）′　ϕ_s^+，（$s\in Z$），は非増加で凹関数　(32)

■

以上の定理６〜定理９は空間の変形にある条件を付けた場合であった．この条件を除くと次の定理が成立する．

〔定理１０〕

β が正形（反形）の任意の（S；β）に対して，f_+ が中心度関数となるための必要十分条件は $s\in Z$ につ

いて ϕ_s^+ が非減少（非増加）で affine 関数であることである．

（証明）

β が正形の場合について証明する．十分性：$s \in Z$ について ϕ_s^+ が非減少で affine とする．定理 5 より，ϕ_s^+ が非減少関数であれば(i)の条件は満足する．又，ϕ_s^+ が affine であれば，影響点集合の定義及び f_+ の定義から(ii)の条件も満足する．必要性：空間の点 p に関する変形に特に制限はないため，定理 6 の (A)の場合と定理 7 の (A)′ のような場合の両方が存在する．ゆえに，任意の空間のいかなる点 p に関する変形に対しても条件(i)，(ii)を満足するためには定理 6 (B)，定理 7 (B)′ より，ϕ_s^+ は非減少で affine である必要がある．（証明終）

以上の議論でわかるように，β が正形の場合と反形の場合において成立する定理は

正形		反形
拡大	⟷	縮小
非減少関数	⟷	非増加関数
凸関数	⟷	凹関数
凹関数	⟷	凸関数

$$\beta(r,s)\,(\beta'(r,s)) \longleftrightarrow \beta'(r,s)\,(\beta(r,s))$$

$$\beta(p,s)\,(\beta'(p,s)) \longleftrightarrow \beta'(p\ \ s)\,(\beta(p,s))$$

などの対応関係を考えることにより，関係づけられていることがわかる．ここでは，β が正形の場合と反形の場合において，その違いがはっきりわかりやすくなるように，両者を分けて記述している．

また，定理 6 ～定理 9 において，空間の変形にある条件を加えたが，このような条件を加えず，$I_+^\beta(p)$ の部分集合で式(23)，式(27)，式(29)又は式(31)を満足するような点 r の集合を $N_+^\beta(p)$ とすることを考えてみよう．このとき，$N_+^\beta(p)$ に関する中心度関数について，定理 6 ～定理 9 と類似の性質が導出できることを注意しておく．このことは，空間の変形の仕方や $N_+^\beta(p)$ の選び方により中心度関数となるための ϕ_s^+ の種々の特徴づけができることを意味している．

5. ネットワークに対する応用

本章では，前章までに述べてきた結果をネットワークのいくつかの具体的変形に対して適用する．考える関数は式(6)の関数形に限定して話を進めるが，以下，簡単のために ϕ_u^+ は点 u によらず同一であるとし，ϕ^+ として話を進める．又，β として，距離 ρ と容量 γ をとり上げる．距離の場合は点間の係わりはその点間の距離が小さい程大きく，容量の場合は反対に容量値が大きい程係わりは大きいと考えることにしよう．この考え方はネットワーク上では常識的なものであろう．このことは ρ は反形，γ は正形であることを意味する．

最初に距離の縮小の例として式(2)の場合を考える．

〔補題 1〕

式(2)の縮小は点 p に関する単調縮小である．

（証明）

$\rho'(p,s)=\rho(p,q)-\delta+\rho(q,s)$ となる点 s を考える．$\rho'(r,s)<\rho(r,s)$ となる点 r に注目して，

$$\begin{aligned}\rho'(r,s)&=\rho(r,p)+\rho(q,s)+\rho(p,q)-\delta\\&=\rho(r,p)+\rho'(p,s)\end{aligned} \tag{33}$$

$\rho''=\rho(r,s)-\rho'(r,s)\leqq\{\rho(r,p)+\rho(p,s)\}-\rho'(r,s)=\rho(p,s)-\rho'(p,s)=\delta'$，また $\delta'\geqq 0$，$\delta''\geqq 0$．これは単調縮小の定義を満足している．

（証明終）

式(33)より，次の補題を得る．

〔補題 2〕

式(2)の単調縮小を行ったとき，$r\in I_+^\rho(p)$，$s\in T_+^\rho(r)$ に対し，

$$\rho'(r,s)\geqq\rho'(p,s) \tag{34}$$

■

〔補題 3〕

式(2)の単調縮小に対し，$I_+^\rho(p)\subseteq S_+(p)$ である．ただし，$S_+(p)=\{r\mid\rho(r,p)<\rho(r,q)\}$

（証明）

$s\in\overline{S}_+(p)=S-S_+(p)$ に対し，$s\in I_+^\rho(p)$ と仮定すると，ある点 t が存在して，$\rho(s,t)>\rho'(s,t)=\rho(s,p)+\rho(q,t)+\lambda$．ところが $s\in\overline{S}_+(p)$ であるから $\rho(s,t)\leqq\rho(s,q)+\rho(q,t)\leqq\rho(s,p)+\rho(q,t)$ であり，矛盾を生じ，$I_+^\rho(p)\subseteq S_+(p)$．

（証明終）

この補題は影響点集合がどのあたりにあるかについて示唆を与えている．これらの補題と定理 8 より次の定理を得る．

〔定理 11〕

式(2)の単調縮小に関して，f_+ が任意の距離空間に対して中心度関数となるための必要十分条件は ϕ^+ が非増加で凸関数であることである．

（証明）

十分性：補題 2 より，定理 8 の (A)の条件を満足している．ゆえに，ϕ^+ が非増加で凸関数とすると，定理 8 より f_+ は中心度関数の条件を満足する．必要性：$S=\{p,r,s\}$，$Z=S$ で，$t\in S$ に対し $\rho(t,t)=$

0，又，$\rho(p, s)=x$，$\rho(r, p)=y$，$\rho(r, s)=x+y$，$\rho(s, p)=a$，$\rho(p, r)=b$，$\rho(s, r)=a+b$ である一つの空間（S；ρ）を考える．ただし，x，y，a，$b>0$．（S；ρ'）として，$\rho'(p, s)=x-\delta$，$\rho'(r, s)=x+y-\delta$ で，その他の点間のρは不変である空間を考えると，これは式(2)において，$\lambda=\rho(p, s)-\delta$，$(\delta\geqq 0)$とした点$p$に関する単調縮小空間であることがわかる．ここで，もちろんρ，ρ'は有向距離公理を満足している．又，$r\in I_+^{\rho}(p)$であるから，公理系の(i)，(ii)の条件を満足するには次の$\Delta_+(p;\rho)$とYが非負でなければならない．

$$\Delta_+(p;\rho)=\phi^+(x-\delta)-\phi^+(x)$$

$$\begin{aligned}Y&=\Delta_+(p;\rho)-\Delta_+(r;\rho)\\&=\{\phi^+(x-\delta)-\phi^+(x)\}\\&\quad-\{\phi^+(x+y-\delta)-\phi^+(x+y)\}\\&=\{\phi^+(x-\delta)-\phi^+(x+y-\delta)\}\\&\quad-\{\phi^+(x)-\phi^+(x+y)\}\end{aligned}$$

任意のx，y，δに対して，$\Delta_+(p;\rho)$とYが非負であるためには，ϕ^+が非増加で凸関数でなければならない．　（証明終）

この定理を適用できる具体的例には，枝に長さ（非負実数値）を有する有向ネットワークがある．有向ネットワークの節点集合Vと枝の上の点集合も含めてSとする．ここで，Sは無限集合となる．有限集合ZをVとし，距離は最短路長で定義する．このとき，節点p，q間の枝の長さをδだけ減らす変形が式(2)の変形の最も簡単な例である．その他，2節点p，q間に新たな枝を加えるなどもこの例に入る．

次に，枝に容量（非負実数値）が与えられた有向フローネットワークを考える．このネットワークの点間の容量は最大流量で定義し，**3.**の(d)の変形を考える．

〔補題4〕

有向フローネットワークにおいて，枝（p，q）の容量をδだけ増加させたとき，これは点pに関する単調拡大となり，$r\in I_+^{\gamma}(p)$，$s\in T_+^{\gamma}(r)$に対して，$\gamma(r, s)\geqq\gamma(p, s)$である．

（証明）

後半から証明する．この変形により各点間の最大流量は減少しないことは明らか．$s\in T_+^{\gamma}(r)$より，$\gamma'(r, s)-\gamma(r, s)=\delta''>0$．これは変形前のネットワークの点$r$から点$s$への最大流（$r-s$最大流）に対し，枝（$p$，$q$）を含み各枝が飽和している有向カット（最小カット）$K=(X, \bar{X})=\{(p, q), (v_1, v_1'), \cdots, (v_k, v_k')\}$，（$K$は点集合を$X$，

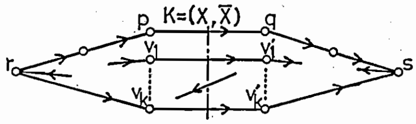


図1　最小カット$K=(X, \bar{X})$

Fig.1　A minimum cut $K=(X, \bar{X})$.

$\bar{X}$に分割．r，$p\in X$，q，$s\in\bar{X}$）が存在することを意味している（図1参照）．$p\in X$，$s\in\bar{X}$より$p-s$最大流量はKの容量を越えない．つまり，$\gamma(r, s)\geqq\gamma(p, s)$．次に点$p$に関する単調拡大であることを証明するには上記の点$s$に対し，$\gamma'(p, s)-\gamma(p, s)=\delta'$としたとき，$\delta'\geqq\delta''$を示せば十分（この時，影響点の定義より$r\in I_+^{\gamma}(p)$となる）．一般に$s-t$最大流量は点$s$から点$t$への有向道の流れ（$s-t$　flow path）に分解でき（その流れの和は最大流量）ることが知られている．変形前の$r-s$最大流はKを通過後，点q，v_1'，…，v_k'を経て点sへ向かうが，この流れは点q，v_1'，…，v_k'から点sへの有向道の流れに分解できる．一方，$\gamma(r, s)\geqq\gamma(p, s)$であるから，$p$から$s$へ最大流を流したときの$K$の各枝の流れは$r-s$最大流時の流れ以下である．そのため，$p-s$最大流時の$K$を通過後の$\bar{X}$内の流れのパターンは$r-s$最大流時の$\bar{X}$内の有向道上の流れを適当に減少させた流れのパターンに変更できる．このことを考慮しながら，変形後の$r-s$最大流及び$p-s$最大流を求めることを考える．任意の初期流から出発してある点間の流れが最大流となるための必要十分条件はその点間に増分可能道が存在しないことである．変形後の$r-s$最大流を求めるために，変形前の最大流時の流れのパターンを初期流とする．rからsへの最短増分可能道P_1を見出すことを考える．枝（p，q）以外の容量は不変であるから，P_1としては点p，q通過後$\bar{X}$の点を経て点sに向かうもののみで$\bar{X}$からXへ向かうものはない（Kの（p，q）以外の枝は飽和，$\bar{X}$からXへの枝の流れは零であるから）．このような最短増分可能道P_1，P_2，…（P_i（$i=1$，2，…）によって流れを増加させた後の流れのパターンを$F(P_i)$とする）を次々に用いて最大流に達したときの流れの増分がδ''である．次に$\gamma(p, s)$の増加分δ'を求めることを考える．変形前の$p-s$最大流の$\bar{X}$内の流れのパターンを変形前の$r-s$最大流時の有向道上の流れを適当に減少させたものに変えておく．この時，$\bar{X}$の有向道上の流れは$r-s$最大流時より小さく，又点pがソースだから枝（p，q）を通るP_1に

相当（同一とは限らぬ）する最短増分可能道を作ることができ，枝（p，q）と$\bar{X}$内の枝の流れのみを変更して，（P_1によると同一量の）流れの量を増加させることができる．このとき，明らかにKの流れは$F(P_1)$の場合のそれより小さいから，$\bar{X}$内の流れのパターンは$F(P_1)$の$\bar{X}$内の有向道上の流れを適当に減少させた流れのパターンに変更できる．この状態で，P_2に相当する最短増分可能道を見出す．以下，同様にこれを繰返す．このように，P_1，P_2，… に相当する最短増分可能道を常に作ることができることから，$\delta' \geqq \delta''$と言える．（証明終）

この補題と定理6より，次の定理を得る．

〔定理12〕

任意の有向フローネットワークに対して，枝（p，q）の容量を増加させるという単調拡大に関して，f_+が中心度関数となるための必要十分条件はϕ^+が非減少で凹関数であることである．

（証明）

十分性：補題4より，定理6の(A)の条件を満足している．ゆえに，ϕ^+が非減少で凹関数であれば，f_+は中心度関数の条件を満足する．必要性：有向フローネットワークの一例として，節点集合$V=\{p, q, r\}$，枝集合$E=\{(p, q), (r, p), (r, q), (q, r)\}$であるものを考える．枝（$s$，$t$）の容量を$C(s, t)$と書くことにし，$C(p, q)=x$，$C(r, p)=y$，$C(r, q)=z$，$C(q, r)=a$で，$0<a<x<y$，$0<z$とする．このネットワークで枝（$p$，$q$）の容量を$x$から$x+\delta$，（$0\leqq\delta<y-x$）へ変化させると，点$p$，$q$間及び点$r$，$q$間の最大流量はそれぞれ$r(p, q)=x$から$r'(p, q)=x+\delta$，及び$r(r, q)=x+z$から$r'(r, q)=x+z+\delta$へ変化する．そしてこのネットワークの変形に対して，他点間の最大流量は変化しない．$r\in I_+^r(p)$であるから，公理系の(i)，(ii)の条件を満足するには次の$\Delta_+(p;r)$とYが非負でなければならない．$\Delta_+(p;r)=\phi^+(x+\delta)-\phi^+(x)$，$Y=\Delta_+(p;r)-\Delta_+(r;r)=\{\phi^+(x+\delta)-\phi^+(x)\}-\{\phi^+(x+z+\delta)-\phi^+(x+z)\}=\{\phi^+(x+\delta)-\phi^+(x+z+\delta)\}-\{\phi^+(x)-\phi^+(x+z)\}$．任意の$x$，$y$，$z$，$\delta$に対して，$\Delta_+(p;r)$と$Y$が非負であるためには$\phi^+$が非減少で凹関数でなければならない．（証明終）

この定理を適用できる有向フローネットワークの具体的変形として，2点p，q間に新たな枝を加えることなどが含まれる．

以上述べてきた定理11，定理12から得られる中心度関数の中に従来の点の中心らしさを評価する式又はそれと同等の式のいくつかが含まれていることに注意すべきである．また，点pに関する変形となるようなネットワークの変形は上述の他にも考えられ，又，定理6〜定理10のその他の適用例もあるが，ここでは省略する．今まで有向ネットワークについてのみ話を進めてきたが，無向ネットワークについてここで若干補足しておく．前章までの有向空間の議論は無向空間でも同様に行なうことができる．そして，これを距離空間，容量空間，すなわち無向ネットワークに応用できる．文献(12)の距離空間の縮小は単調縮小の例である．また枝に長さを有する無向ネットワークで，距離を最短路長で定義すると，2点p，qへの枝の付加は点pに関する縮小変形であることがわかる．そして，点pと点qへの距離を比較して点pに近い点集合の部分集合が点pの影響点集合となることが補題3と同様の手法で証明でき，さらに，定理11と同様の定理が成立することも証明できる．これらの結果は，従来の中心度関数の理論[(8),(10),(12)]の主張の主要な部分を含むものである．これは，本文が従来の理論の一つの一般化理論であることの一面を示すものといえるであろう．

無向フローネットワークについては文献(14)，(17)を参照のこと．なお，そのとき注意すべきことは影響点集合の代わりに，弱影響点集合という影響点集合よりも概念的に広い点集合とそれに関する中心度関数が使われる．ここに弱影響点集合とは

$$J_+^\beta(u)=\{v \mid T_+^\beta(v)\subseteq T_+^\beta(u) \text{ 又は } T_+^\beta(v)\cup\{v\} \subseteq T_+^\beta(u)\cup\{u\}\} \tag{35}$$

と定義される集合J_+^βで，その集合の元は点uの弱影響点といわれる．たとえば，$T_+^\beta(u)=\{s, t, p, v\}$，$T_+^\beta(v)=\{s, t, u\}$，$T(q)=\phi$であると，点$v$，$q$は点$u$の影響点でないが，それらは点$u$の弱影響点ということになる．点$u$の弱影響点には影響点の他に，互いに影響を与え合う（変化点集合が自分自身（uとv）を除くと包含関係にある）点，及び，全く影響を与えない点（変化点集合が空）が含まれる．すなわち，弱影響点は影響点の影響の条件を少し広めたものである．この弱影響点に対しては，影響点に対する定理1に対して，次の系が成立するように，定理2〜定理4に対しても同様の系が成立することを指摘しておく．

〔系1〕

$r\in J_+^\beta(p)$に対し，定理1の条件と次の(a)，(b)いず

れかの条件を満足すれば，定理１と同様の$\Delta_+(p;\beta)$と$\Delta_+(r;\beta)$の大小関係が成立する．

(a)　$p\notin Z$

(b)　$p\in Z$の場合，$\phi_\rho^+=\phi_r^+$で，

$\beta'(p,r)\leqq\beta'(r,p)$でかつ$\beta(p,r)-\beta'(p,r)\geqq\beta(r,p)-\beta'(r,p)$　（証明略）

6．点間に距離と容量，点に重みを有する空間の中心度関数

ここでは，前章までの空間の定義をやや拡大し，点間に距離と容量が与えられ，さらに点の上に固有の重みσが与えられている空間$(S;\rho,\gamma,\sigma)$を考える．ここで，$\sigma:S\to\overline{\boldsymbol{R}}_+$である．この空間の点$r$の上に定義される実数値関数$f(r;\rho,\gamma,\sigma)$によって点の中心らしさを測ることを考える．$f(r;\rho,\gamma,\sigma)$は点$r$の関数であるが，$\rho$，$\gamma$，$\sigma$によって計算されるという意味である．$f_+(r;\rho,\gamma,\sigma)$，$f_-(r;\rho,\gamma,\sigma)$は$\rho$，$\gamma$に関して**4.**の$f_+(r;\beta)$，$f_-(r;\beta)$の場合と同様の意味を持つ．**4.**と同様に$f_+(r;\rho,\gamma,\sigma)$及び$f_-(r;\rho,\gamma,\sigma)$はそれぞれ$f_+$，$f_+(r)$及び$f_-$，$f_-(r)$などと略記する．以下，$f_+$のみ述べるが$f_-$についても同様である．

本章では，空間を決定するパラメータが前章までの議論より多くなっている．そのため，この空間上での中心度関数は未定義である．そこでこの空間上での中心度関数をまず定義し，議論の枠を決めることにする．ただし，前章までの中心度関数に対する考え方を適用する形で中心度関数が定義される．すなわち，f_+が中心度関数であるかどうかは**4.**の$f_+(r;\beta)$に関する中心度関数の公理系をρ及びγについて適用することにより判定することにし，又σについては，ここで新たにその条件を加えることにする．

空間の距離，容量，重みの変化に対して，fがどのように変化するか考える．$(S;\rho,\gamma,\sigma)$が$(S;\rho',\gamma,\sigma)$となったとき，ρの変形といい，このときの$f_+(r)$の変化を$\Delta_+(r;\rho)$，$(S;\rho,\gamma,\sigma)$が$(S;\rho,\gamma',\sigma)$となったとき，γの変形といい，このときの$f_+(r)$の変化を$\Delta_+(r;\gamma)$，又，$(S;\rho,\gamma,\sigma)$が$(S;\rho,\gamma,\sigma')$となったとき，σの変形といい，このときの$f_+(r)$の変化を$\Delta_+(r;\sigma)$と定義する．ただし，点tの重みの増加変形は

$$\sigma'(t)=\sigma(t)+w,\qquad(w>0)\tag{36}$$

とする．

〔定義４〕

$(S;\rho,\gamma,\sigma)$の任意の３点をp，q，tと呼ぶ．点pに関するρの任意の縮小変形，点qに関するγの任意の拡大変形，点tの重みの任意の増加変形に対して，

(i)　$\Delta_+(p;\rho)\geqq0$，$\Delta_+(q;\gamma)\geqq0$，$\Delta_+(t;\sigma)\geqq0$

を満たし，Sの点pに関する部分集合$N_+^\rho(p)$及び点qに関する部分集合$N_+^\gamma(q)$が次の条件を満足するとする．

(ii)　$r\in N_+^\rho(p)$に対して

$\Delta_+(p;\rho)\geqq\Delta_+(r;\rho)$

(iii)　$r\in N_+^\gamma(q)$に対して

$\Delta_+(q;\gamma)\geqq\Delta_+(r;\gamma)$

さらに，

(iv)　$\rho(u,t)\leqq\rho(v,t)$かつ$\gamma(u,t)\geqq\gamma(v,t)$に対して，

$\Delta_+(u,\sigma)\geqq\Delta_+(v,\sigma)$

このとき，f_+をN_+^ρ，N_+^γ両者に関する中心度関数という．特に，(i)のみを満足するf_+を半中心度関数という．又，(ii)，(iii)において，特に$N_+^\rho=I_+^\rho$，$N_+^\gamma=I_+^\gamma$であるとき，N_+^ρ，N_+^γ両者に関する中心度関数を影響点集合に関する中心度関数又は単に中心度関数という．

■

この定義でρ，γに関する条件は前章までの考え方をまとめたものである．点の重みの変化に対しては，変化した点への距離は小さくかつその点との容量が大きい点程その重みの変化の影響を大きく受けるということを述べている．これは，やや抽象的のように思える．しかし，たとえば各点に重み，各点間に距離と最大流量が与えられたネットワーク（たとえば，点と都市とした交通網では，点の重みは都市の規模，距離は都市間を移動するのに必要な時間，容量は運び得る最大交通流量等を表わす）の例を思いうかべればわかりやすいであろう．事実，我々はこのようなシステムを一般化して，中心度関数の定義を得てきている．

次に，f_+として，次のような関数形式を考える．

$$f_+(r)=\sum_{s\in Z}\psi^+(\rho(r,s),\gamma(r,s),\sigma(s))\tag{37}$$

ただし，$Z(\subseteq S)$は有限集合，ψ^+は空間によらない３変数の実数値関数で結合関数と呼ばれる．この各点に関する総和形式の関数f_+に関して，f_+がいかなる空間においても中心度関数となるための条件を求めてみよう．次の定理が成立する．

〔定理13〕

f_+ が任意の $(S;\rho,\ \gamma,\ \sigma)$ に対して，半中心度関数となるための必要十分条件は ψ^+ が ρ に関して非増加，γ 及び σ に関して非減少関数となることである．

(証明略)

〔定理14〕

f_+ が任意の $(S;\rho,\ \gamma,\ \sigma)$ に対して，中心度関数となるための必要十分条件は，定理13の条件と同時に，ψ^+ が ρ，γ に関して affine 関数であり，$\xi_2 \geqq \xi_1 \geqq 0$，$\xi \geqq 0$，$\mu_2 \geqq \mu_1 \geqq 0$，$\mu \geqq 0$，$\omega_2 \geqq \omega_1 \geqq 0$ に対して，

$$\psi^+(\xi_1,\ \mu,\ \omega_2)-\psi^+(\xi_1,\ \mu,\ \omega_1) \geqq \psi^+(\xi_2,\ \mu,\ \omega_2)-\psi^+(\xi_2,\ \mu,\ \omega_1) \tag{38}$$

$$\psi^+(\xi,\ \mu_1,\ \omega_2)-\psi(\xi,\ \mu_1,\ \omega_1) \leqq \psi^+(\xi,\ \mu_2,\ \omega_2)-\psi(\xi,\ \mu_2,\ \omega_1) \tag{39}$$

を満足することである．

(証明)

十分性：定理13より定義4の(i)の条件は満たす．又，ψ^+ が ρ，γ に関して affine 関数ならば，影響点集合の定義及び f_+ の定義から(ii)，(iii)の条件は満足する．重みの変化に対して，距離，容量は不変であることに注意し，式(38)，(39)を仮定すれば明らかに(iv)は満足する．

必要性：ρ，γ の条件に関しては定理10と同様であるので省略．

次に，$\rho(s_1,\ t) \leqq \rho(s_2,\ t)$，$\gamma(s_1,\ t)=\gamma(s_2,\ t)$ である2点 s_1，s_2 を有する空間を構成する．$\rho(s_1,\ t)=\xi_1$，$\rho(s_2,\ t)=\xi_2$，$\gamma(s_1,\ t)=\mu$ とし，$\sigma(t)=\omega_1$，$\sigma'(t)=\sigma(t)+\omega=\omega_2$ とすると，

$$\Delta_+(s_1;\sigma)=\psi^+(\xi_1,\ \mu,\ \omega_2)-\psi^+(\xi_1,\ \mu,\ \omega_1)$$

$$\Delta_+(s_2;\sigma)=\psi^+(\xi_2,\ \mu,\ \omega_2)-\psi(\xi_2,\ \mu,\ \omega_1)$$

ゆえに，任意の空間で条件(iv)が成立するためには，式(38)が必要となる．式(39)についても同様．(証明終)

この定理の他，空間の変形又は N_+^{ρ}，N_+^{γ} にある条件を加えると，ρ，γ に関して，定理6～定理9と同様の定理が成立する．このとき，σ に関しては定理14の式(38)，(39)の条件がそのまま成立することを注意しておく，又，ネットワークに対して，これらの結果を前章と同様に適用することができる．そして，考える系に応じて ψ^+ の関数を使い分ければよい．ψ^+ は3変数関数であるがその形式も種々考えられるであろう．たとえば式(40)のように変数分離形に関数を限定したとしても，従来のかなりの関数形がこれに含まれる．

$$\psi^+(\xi,\ \mu,\ \omega)=\sum_{i=1}^{n} a_i X_i(\xi) Y_i(u) Z_i(\omega)$$

$$(a_i：実係数) \tag{40}$$

5.の距離又は容量のみ与えられたネットワークの場合の関数形もこれに含まれることになる．又，この関数形の場合，X_i，Y_i，Z_i $(i=1,\ 2,\ \cdots)$ がそれぞれ非増加，非減少，非減少関数ならば定理14の式(38)，(39)の条件は自動的に成立することに注意すべきである．

最後に，点に重み，枝に長さと容量が与えられたネットワークの例題を示しておく．図2の有向ネットワークを考える．各点に重み，枝に(長さ，容量)の形式で枝の重みが記されている．各点間の距離，容量はそれぞれ最短路長と最大流量で定義する．ψ^+ として，式(40)の一形式である次の関数を用いる．

$$\psi_1^+(\xi,\ \mu,\ \omega)=\exp(-\xi)\{1-\exp(-\mu)\}\omega \tag{41}$$

ここで，$x\to\infty$ のとき，$\exp(-x)\to 0$ とする．又，考えるネットワークの点の重みは有限とする．この関数は距離に関して，非増加凸関数，容量に関して非減少凹関数，重みに関しては増加(affine)関数である．ネットワークの変形として枝 e_1 の両端点に新たな枝を加えるなどして，等価的に図のように枝 e_1 の長さと容量が変化する変形を考える．この具体的変形に対して，定理11，定理12より，式(41)の関数は中心度関数の条件を満足する．e_1 の長さ，容量の変化に対して，$I_+^{\rho}(v_4)=\{v_1,\ v_4\}$，$I_+^{\gamma}(v_4)=\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\}$ となる．ψ^+ を用いて実際に f_+ の値を求めると，$f_+(v_1) \fallingdotseq 3.27$，$f_+'(v_1) \fallingdotseq 3.43$，$f_+(v_4) \fallingdotseq 1.88$，$f_+'(v_4) \fallingdotseq 2.47$ となり，点 v_4 の f_+ の増加量は v_4 の影響点である v_1 のそれより大きい．これは，距離と容量が同時に変化した場合の値である．しかし，v_1 は ρ と γ どちらに関しても v_4 の影響点であることから，この結果は f_+ が持つ基本的性質の一面を示している．なお，実際に点の中心らしさの比較を行なう場合，当然のことながら，距離，容量，重みの単位系は統一又は規格化して行なう

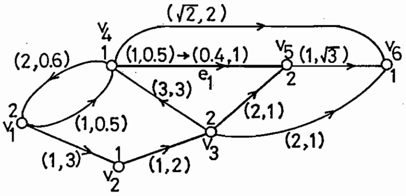


図2　ネットワーク

Fig.2 A network.

ものとする．

7. むすび

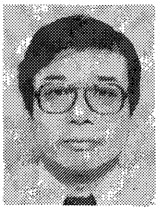
ネットワークの点の中心らしさを論ずる際に用いられてきたネットワークの点間の距離や容量の変形の議論を空間の“点に関する変形”という概念の導入によって統一的に論ずることを試みた．そして空間の点の中心度関数をこの空間の変形による関数値の変化によって特徴づけた．この空間の例として距離空間，容量空間などが含まれるが，この距離，容量はネットワーク上の最も重要でかつ基本的パラメータである．さらにこの理論のネットワークの具体的変形に対する応用にも触れ，点に重み，点間に距離と容量が与えられた場合へも拡張した．もちろん，これらの結果は従来の点の中心らしさを測る関数の全てを含むものではないが，それらの多くを含むものとなっている．そして，現在この理論の応用面はかなり広いことが判明してきている．これらについては別の機会に譲る．

謝辞　日頃御指導頂く新潟大・阿部武雄教授及び熱心に御討論，御助言を頂いた東工大・梶谷洋司教授に感謝の意を表する．

文　献

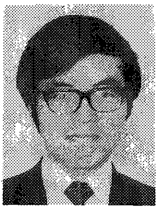
(1) M. Iri ：“Network Flow, Transportation and Scheduling Theory and Algorithm”, Academic Press (1969).
(2) S. L. Hakimi ：“Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph”, Ops. Res., 12, pp.450-459(1964).
(3) S. L. Hakimi ：“Optimum distribution of switching centers in a communication network and some related graph theoretical problems”, Ops. Res., 12, pp.462-475(1965).
(4) C. Jordan ：“Sur les assemblages de lignes”, J. Reine Angew. Math., 70, pp.185-190(1969).
(5) J. Levy ：“An extended theorem for location in a network”, O. R. Quart., 18, 4, pp.433-442 (1967).
(6) A. Adām ：“The Centrality of Vertices in Trees”, Studia Sci. Math. Hangar, 9, pp.285-303 (1974).
(7) G. Sabidussi ：“The Centrality Index of a Graph”, Theorie des graphs, Rome, pp.369-372 (1966).
(8) 梶谷，丸山：“グラフにおける中心度関数表示，－通信網の評価への応用－”，信学論(A)，J59-A, 7, pp.531-538(昭51-07).
(9) 仙石，篠田：“グラフにおける点の中心らしさを表わす関数について”，信学技報，CAS81-112 (1982-02).
(10) 篠田，仙石：“グラフにおける２点一致と中心度関数”，信学論(A)，J65-A, 8, pp.787-793(昭57-08).
(11) 篠田，仙石：“ゲージの概念に基づくネットワークの点の中心らしさの評価”，信学技報，CAS82-83 (1982-10).
(12) 篠田，仙石：“距離空間における点の中心らしさを表わす関数の公理論的基礎づけ”，信学論(A)，J66-A, 4, pp.352-359(昭58-04).
(13) 仙石，加納，篠田：“複数点対間の縮小と中心度関数”，信学技報，CAS83-1(1983-05).
(14) 岸，竹内，伊藤：“２節点を分離するカットセットの最小枝数を用いた中心度関数”，信学技報，CAS83-2(1983-05).
(15) 篠田，仙石：“距離と重み変化に基づく中心度関数の公理系”，信学技報，CAS83-17(1983-06).
(16) 岸，竹内：“有向グラフの中心度関数の一形式”，信学論(A)，J66-A, 6, pp.470-477(昭58-06).
(17) 篠田，仙石：“ネットワークにおける点の中心らしさを測る関数〔I〕～〔III〕”，信学技報，CAS83-116～CAS83-118 (1983-09).
(18) 篠田，仙石：“ネットワークの変形と中心らしさを測る関数”，信学技報，CAS83-159(1983-12).
(19) A. W. Robelt and D. E. Varberg ：“Convex Functions”, Academic Press (1973).
(20) G. Y. Handler and P. B. Mirchandani ：“Location on Networks”, MIT Press(1979).
(21) 仙石，篠田：“ネットワークの枝の中心らしさを測る関数”，信学技報，CAS83-199(1984-02).

（昭和60年8月5日受付）



篠田　庄司

昭39中大・理工・電気卒．昭48同大学院博士課程了．工博．昭40中大研究助手．現在，同大理工学部電気工学科教授．グラフ・ネットワーク構造を持つシステムの解析，設計，制御の研究に従事．著書「最新回路理論」，「回路解析」など．



仙石　正和

昭42新潟大・工・電気卒．昭47北大大学院博士課程了．工博．同年北大・工・電子助手．現在，新潟大・工・情報助教授．回路網理論，グラフ理論，情報伝送などの研究に従事．著書「演習グラフ理論」(共著)．