論　文

無向グラフの枝に関する半径・直径と直径の上界と下界

正員　仙石　正和[†]　　非会員　小林　和仁[†]　　正員　篠田　庄司[††]

Radius and Diameter with Respect to Edges in a Nondirected Graph, and Upper and Lower Bounds for the Diameter

Masakazu SENGOKU[†], *Member*, Kazuhito KOBAYASHI[†], *Nonmember* *and* Shoji SHINODA[††], *Member*

あらまし　無向グラフGの半径，直径はグラフの基礎概念として良く知られている．この半径$r(G)$と直径$d(G)$の間には$r(G)\leqq d(G)\leqq 2r(G)$の不等式が成立することが知られている．これは直径の上界と下界を示しており，しかもこの上界，下界は最良であることも知られている．このグラフの半径，直径は点間の距離によって定義されている量である．一方，グラフでは点の他に枝も重要な構成要素である．ところが，枝に関する半径，直径については従来あまり考察されていないようである．小文では枝に関して定義されるグラフの半径，直径についての一つの考え方を提案する．すなわち，枝間の距離に相当する量をその二つの枝を同時に含むタイセットの最小長さで定義する．そして，その量が三角不等式を満足する準距離となることを示し，点の場合と同様に，枝に関する半径，直径の概念を導入する．さらに，枝に関する直径の上界と下界を示す不等式を導出し，その上界と下界が最良であることも示す．また，枝間の準距離をカットセットを用いて定義された場合についての直径の上界，下界についても同様の結果が得られることも述べる．

1. まえがき

無向グラフGの点uと点vの間の道に含まれる枝の数はその道の長さと呼ばれる．点uと点vの間の道で最小長さの道の長さで点uと点vの距離（distance）$d(u,v)$を定義したとき，ある点uから最も距離の大きい点までの距離は点uの離心数（eccentricity）と呼ばれている．グラフGの中で最小離心数はGの半径（radius）$r(G)$，最大離心数はGの直径（diameter）$d(G)$と言われている．このグラフの点に関する半径，直径は大変良く知られたグラフの基礎概念である．この半径$r(G)$と直径$d(G)$の間には$r(G)\leqq d(G)\leqq 2r(G)$の不等式が成立することが知られている．これは直径$d(G)$の上界と下界を示しており，しかもこの上界，下界は最良であることが良く知られている（文献(1)等）．上界，下界が最良とは等号が成立する実際のグラフが存在するという意味である．すなわち，どのグラフでも$r(G)<d(G)<2r(G)$ならばあまり良い上界，下界とは言えない．

小文では，まず，無向グラフの枝と枝との距離に相当する一つの量を導入する．そして，それに基づいて，点の場合と同様に，枝に関する半径，直径の概念を導入する．そして，その直径の上界，下界を示す不等式を導出する．

2. 枝間の準距離

ここでは，2枝間の距離に相当する一つの量を導入する．まず定義から始める．

［定義1］

Sは非空な集合とし，

$\rho: S\times S\rightarrow[0,\infty]$

ここで，$x, y, z\in S$に対して

(i)　$\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

† 新潟大学工学部情報工学科，新潟市
Faculty of Engineering, Niigata University, Niigata-shi, 950-21 Japan
†† 中央大学理工学部電気工学科，東京都
Faculty of Science and Engineering, Chuo University, Tokyo, 112 Japan

(ii) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$

(iii) $\rho(x,z)\leqq\rho(x,y)+\rho(y,z)$

の性質を有するとき，ρ は S の上の距離関数と呼ばれ，また，(i)の条件を少し弱めた ρ は擬距離（pseudo-distance）と呼ばれることは良く知られている．もし，ρ が(ii)，(iii)の性質を満足するとき，$\rho(x,y)$ は x から y への準距離（quasi-distance），そして性質(ii)，(iii)を準距離の公理系と呼ぶことにする．（定義終）

扱うネットワーク $N(G,l)$ は連結・無向とし，$G=(V,E)$ は N のグラフとする．V と E はそれぞれ G の点集合，及び枝集合を表わし，各枝は非負実数値の長さの重みを持っているとする．$l(e_k)$ は $e_k\in E$ の長さを表わす．一般に，N の点間の距離を最短路長で定義することが多い．そして，その時全ての枝 $e_k\in E$ に対して，$l(e_k)=1$ とすると，N の点間の距離はグラフのその距離と一致する．グラフの単純な閉路（又はタイ）を成す枝集合は単純なタイセットと呼ばれる（なお，初等的な閉路を成す枝集合は初等的タイセット又は単にタイセットと呼ばれることが多い）．$\tau_k(e_i,e_j)$ を G の枝 e_i, e_j 両方を含む単純なタイセット（自己タイセットも含む）とし，その集合を $R(e_i,e_j)$ とする．つまり，

$$R(e_i,e_j)=\{\tau_k(e_i,e_j)\} \tag{1}$$

タイセット $\tau_k(e_i,e_j)$ の長さを

$$l(\tau_k(e_i,e_j))=\sum_{e_m\in\tau_k(e_i,e_j)} l(e_m) \tag{2}$$

と定義し，$l(\tau_k(e_i,e_j))$ を $l(\tau_k)$ と略記する．なお，グラフのタイセット τ の長さはその中に含まれる枝の数で定義する．すなわち，N において，各枝の長さを1とした場合のタイセットの長さの値に一致する．

なお，便利のために，枝の部分集合 $B\subseteq E$ に対して（B はタイセットでなくとも），

$$l(B)\triangleq\sum_{e_m\in B} l(e_m)$$

の表現を用いることにする．B がタイセットの場合は $l(B)$ はタイセット B の長さを表わす．

［定義2］

G の二つの枝 e_i, $e_j\in E$ に対して，実関数 $\rho_\tau(\rho_\tau:E\times E\to[0,\infty])$ を

(a) $R(e_i,e_j)\neq\phi$ のとき

$$\rho_\tau(e_i,e_j)=\min_{\tau_k(e_i,e_j)\in R(e_i,e_j)} l(\tau_k) \tag{3}$$

(b) $R(e_i,e_j)=\phi$ のとき

$$\rho_\tau(e_i,e_j)=\infty \tag{4}$$

と定義する．（定義終）

このとき，次の定理を得る．

［定理1］

ネットワーク N に対して，$\rho_\tau(e_i,e_j)$ は準距離公理を満足する．（定理1終）

定理1の証明を行なう前に，証明に用いる補題を示す．

［補題1］

連結・無向グラフ $G=(V,E)$ の任意の2点 u，v 間の互いに枝を共有しない初等的な道の最大個数を $q(u,v)$ とし，u，v を互いに分離するカットセット全体の集合を $C(u,v)$ とすれば，次式が成立する．

$$q(u,v)=\min_{c\in C(u,v)} |c|$$

（$|c|$：カットセット c の要素数）

（証明略，文献(2)参照）

［補題2］

自己カットセットを含まない連結・無向グラフ $G=(V,E)$ には，任意の2枝 e_i, $e_j\in E$ を含む単純なタイセットが存在する．

（補題2の証明）

G には自己カットセットが存在しないから，G の2点 u，v を互いに分離するカットセットの枝数は少なくとも，2以上である．従って，補題1より u，v 間には，互いに枝を共有しない初等的な道が少なくとも2本存在する．

(1) 枝 e_i の両端点と枝 e_j の両端点が一致する場合，枝 e_i, e_j とその両端点とで一つの単純な閉路が構成されるのは明らかである．

(2) 枝 e_i の両端点と枝 e_j の両端点が同一ではない場合，枝 e_i と e_j の異なる端点の一つをそれぞれ v_i，v_j とし，他の端点をそれぞれ v_i', v_j' とする．また2点 v_i, v_j 間の互いに枝を共有しない2本の初等的な道を p_1, p_2 とし，道 $p_k(k=1,2)$ の枝集合を $E(p_k)$ で表わす．このとき，

(i) $E(p_1)\cup E(p_2)$ に枝 e_i, e_j が共に含まれる場合

p_1 と p_2 の端点は v_i, v_j で一致している．また p_1 と p_2 は互いに枝を共有していないから，$E(p_1)\cup E(p_2)$ は一つの単純なタイセットを構成する．このタイセット $E(p_1)\cup E(p_2)$ に枝 e_i, e_j が含まれていることは明らかである．

(ii) $E(p_1)\cup E(p_2)$ に枝 e_i，または e_j が含まれない場合

$E(p_1)\cup E(p_2)$ に枝 e_i が含まれないとしても一般性は失われない．このとき，$E(p_1)\cup E(p_2)\ni e_j$ とする．ここで $v_i=v_i'$（枝 e_i は自己タイセット）であれば，$E(p_1)\cup E(p_2)\cup\{e_i\}$ は一つの単純なタイセットである．次に $v_i\neq v_i'$ の場合を考える．2点 v_i, v_i' 間には枝 e_i を含まない初等的な道 p_3 が存在する．このとき，p_1 と p_2 から成る閉路 L_1 と道 p_3 の交点は少なくとも一点 (v_i) は存在する．道 p_3 を始点 v_i'，終点 v_i の向きにたどり，L_1 との最初の交点を v_s とする．このとき，点 v_s が p_1 上の道であるとしても一般性は失わない．そこで，p_3 上の v_i', v_s 間の道を p_3' とし，p_1 上の v_s, v_j 間の道を p_1' とすれば，$E(p_3')\cup E(p_1')\cup\{e_i\}$ から成る枝セクショングラフは v_i, v_j 間の初等的な道となる．また，このとき，この道と p_2 には共有の枝は存在しない．点 $v_s=v_j$ であれば $E(p_3')\cup E(p_1')\cup\{e_i\}=E(p_3')\cup\{e_i\}$ から成る枝セクショングラフは p_1, p_2 両方とも枝を共有しない v_i, v_j 間の初等的な道であり，この道と p_1, p_2 のうちの枝 e_j を含む道とは一つの単純な閉路を構成する．点 $v_s\neq v_j$ のとき（$v_s=v_i$ の場合を含む），p_1 に枝 e_j が含まれていれば，枝 e_j と点 v_j は接続しているから p_1' に枝 e_j が含まれる．従って，$E(p_1')\cup E(p_2)\cup E(p_3')\cup\{e_i\}$ は e_i, e_j を含む単純なタイセットとなる．また，p_2 に e_j が含まれる場合には，$E(p_1')\cup E(p_2)\cup E(p_3')\cup\{e_i\}$ が e_i, e_j を含む単純なタイセットとなる．

(iii) $E(p_1)\cup E(p_2)$ に枝 e_i, e_j 両方とも含まれない場合

まず，(ii)において，p_1, p_2 は初等的な道であったが，これらが単純な道であっても同じ論法が可能であることを注意しておく．$E(p_1)\cup E(p_2)$ に枝 e_j が含まれていなくても，(ii)の論法と同様に v_i, v_j 間に $E(p_1)\cup\{e_i\}$（e_i が自己タイセットのとき）または $E(p_3')\cup E(p_1')\cup\{e_i\}$ から成る枝セクショングラフの単純な道を作ることができる．これを改めて p_1 とおくと p_1, p_2 は枝を共有しない v_i, v_j 間の2本の単純な道である．p_1 に e_i を含むから(ii)の場合に帰着する．（証明終）

（定理1の証明）

$\rho_\tau(e_i, e_j)$ が準距離公理を満足することを証明するには，

(I) $\rho_\tau(e_i, e_j)=\rho_\tau(e_j, e_i)$

(II) $\rho_\tau(e_i, e_k)\leqq\rho_\tau(e_i, e_j)+\rho_\tau(e_j, e_k)$

が成立することを示せばよい．

$G=(V, E)$ では $e_i, e_j\in E$ を含むタイセットは，e_j; e_i を含むタイセットでもあり，$R(e_i, e_j)=R(e_j, e_i)$．従って式(3)，(4)より(I)が成立する．

次に(II)について述べる．

式(3)より $\rho_\tau(e_i, e_j)$ は e_i, e_j 両方を含む単純なタイセットの中の最小長さである．そこで，$R(e_i, e_j)$ の中で最小長さのタイセットの一つを $\tau_1(e_i, e_j)$ とする．同様に $R(e_j, e_k)$ の中の最小長さのタイセットの一つを $\tau_2(e_j, e_k)$ とする．一般に，タイセットに含まれる枝は自己カットセットをなさない．ゆえに，$\tau_1(e_i, e_j)\cup\tau_2(e_j, e_k)$ の枝セクショングラフは，連結で自己カットセットを含まない．従って，補題2よりこの枝セクショングラフ上に e_i, e_j を同時に含む単純な閉路が存在する．この閉路の枝集合，すなわちタイセットを $\tau_3(e_i, e_k)$ とする．つまり，

$$\tau_3(e_i, e_k)\subseteq\tau_1(e_i, e_j)\cup\tau_2(e_j, e_k) \tag{5}$$

従って式(2)より

$$l(\tau_3)\leqq l(\tau_1)+l(\tau_2) \tag{6}$$

ところで式(3)より

$$\rho_\tau(e_i, e_k)\leqq l(\tau_3) \tag{7}$$

仮定より，$\rho_\tau(e_i, e_j)=l(\tau_1)$，$\rho_\tau(e_j, e_k)=l(\tau_2)$ であるから，式(6)，(7)より

$$\rho_\tau(e_i, e_k)\leqq\rho_\tau(e_i, e_j)+\rho_\tau(e_j, e_k) \tag{8}$$

次に $\tau_1(e_i, e_j)$，$\tau_2(e_j, e_k)$ の一方が存在しない場合を考える．$\tau_2(e_j, e_k)$ が存在しないとしても一般性は失わない．このとき G には自己カットセットが存在し，その集合を C_1 とすれば，$e_k\in C_1$，または C_1 に属する枝全てを開放除去したとき，$e_j(e_i)$ と e_k は異なる連結成分に含まれる．ゆえに式(4)より，

$$\rho_\tau(e_i, e_k)=\rho_\tau(e_j, e_k)=\infty \tag{9}$$

$$\therefore\ \rho_\tau(e_i, e_k)\leqq\rho_\tau(e_i, e_j)+\rho_\tau(e_j, e_k) \tag{10}$$

また $\tau_1(e_i, e_j)$，$\tau_2(e_j, e_k)$ のいずれも存在しない場合，

$$\rho_\tau(e_i, e_j)=\rho_\tau(e_j, e_k)=\infty \tag{11}$$

となり，$\rho_\tau(e_i, e_k)\leqq\infty$ であることから

$$\rho_\tau(e_i, e_k)\leqq\rho_\tau(e_i, e_j)+\rho_\tau(e_j, e_k) \tag{12}$$

となる．

以上，式(8)，(10)，(12)より(II)が成立した．

（証明終）

定義2の ρ_τ は単純なタイセット τ を用いて定義されていたが，τ を初等的タイセットに限定したときについて考える．今，e_i, e_j 両方を含む初等的タイセットを $\tau_{e_k}(e_i, e_j)$ とし，その集合を $R_e(e_i, e_j)$ とする．この $R_e(e_i, e_j)$ を用いて，定義2と同様に定義される ρ_τ を ρ_{τ_e} とする．

［定理2］

ρ_{τ_e}は準距離公理を満足する.　　（定理2終）

定理2を証明する前に，証明で用いる補題を示す.

［補題3］

連結グラフ $G=(V, E)$ 上に，枝 e_i, e_j を同時に含む初等的閉路 L_1 と枝 e_j, e_k を同時に含む初等的な閉路 L_2 が存在すれば L_1 と L_2 から成る G の部分グラフ上に，枝 e_i, e_k を同時に含む初等的な閉路が存在する.

（補題3の証明）

L_1 が枝 e_k を，または L_2 が枝 e_i を含むならば，明らかに e_i, e_k を含む初等的閉路が存在する．次に L_1 が e_k を，L_2 が e_i を含まない場合を考える．L_1 と L_2 は枝 e_j を共有するから，L_1 と L_2 は少なくとも2点を共有する．いま e_i の一方の端点から出発して，e_i を通らずに L_1 上をたどり，最初に L_2 と出会う点を v_a とし，出発点からこの点 v_a への L_1 上の初等的な道を p_a とする．同様に e_i の他方の点から出発して，e_i を通らずに L_1 上をたどり，最初に L_2 と出会う点を v_b とし，出発点からこの点 v_b への L_1 上の初等的な道を p_b とする．ここで，L_1 と L_2 は少なくとも2点を共有する初等的閉路であるから，v_a と v_b が一致することはない．このとき，$E(p_a)\cup\{e_i\}\cup E(p_b)$ から成る枝セクショングラフは2点 v_a, v_b 以外は L_2 上に存在しない v_a, v_b 間の初等的な道である．一方点 v_a から出発して，点 v_b を通らずに L_2 上をたどり，e_k のどちらかの端点に至る初等的な道 p'_a，及び点 v_b から出発して，点 v_a を通らずに L_2 上をたどり，e_k の他方の端点に至る初等的な道 p'_b が存在する（なぜならば，L_2 は初等的閉路であるから）．このとき，$E(p'_a)\cup\{e_k\}\cup E(p'_b)$ から成る枝セクショングラフは，2点 v_a, v_b 間の L_2 上の初等的な道である．従って，$E(p_a)\cup\{e_i\}\cup E(p_b)$ から成る枝セクショングラフと $E(p'_a)\cup\{e_k\}\cup E(p'_b)$ から成る枝セクショングラフは，それぞれの道の端点 v_a, v_b 以外は一致しない初等的な2本の道である．ゆえに，$E(p_a)\cup\{e_i\}\cup E(p_b)\cup E(p'_a)\cup\{e_k\}\cup E(p'_b)$ から成る枝セクショングラフは一つの初等的な閉路を構成する.　　（証明終）

この補題を用いて，次に定理2が成立することを証明する.

（定理2の証明）

$\rho_{\tau_e}(e_i, e_j)$ が準距離公理を満足することを証明するには，

(I)　$\rho_{\tau_e}(e_i, e_j)=\rho_{\tau_e}(e_j, e_i)$

(II)　$\rho_{\tau_e}(e_i, e_k)\leqq\rho_{\tau_e}(e_i, e_j)+\rho_{\tau_e}(e_j, e_k)$

が成立することを示せばよい.

G では，e_i, e_j を含む初等的タイセットは，e_j, e_i を含む初等的タイセットでもあり，$R_e(e_i, e_j)=R_e(e_j, e_i)$．従って，式(3)，(4)より(I)が成立する.

次に，(II)について示す.

式(3)より $\rho_{\tau_e}(e_i, e_j)$ は e_i, e_j 両方を含む初等的タイセットの中の最小長さである．そこで $R_e(e_i, e_j)$ の中の最小長さの初等的タイセットの一つを $\tau_{e_1}(e_i, e_j)$ とする．同様に $R_e(e_j, e_k)$ の中の最小長さの初等的タイセットの一つを $\tau_{e_2}(e_j, e_k)$ とする．$\tau_{e_1}(e_i, e_j)$，$\tau_{e_2}(e_j, e_k)$ が存在するならば，補題3より $\tau_{e_1}(e_i, e_j)\cup\tau_{e_2}(e_j, e_k)$ の枝のセクショングラフ上に，e_i, e_k を同時に含む初等的閉路が存在する．この閉路の枝集合すなわちタイセットを $\tau_{e_3}(e_i, e_k)$ とする．つまり，

$$\tau_{e_3}(e_i, e_k)\subseteq\tau_{e_1}(e_i, e_j)\cup\tau_{e_2}(e_j, e_k) \tag{13}$$

$$\therefore l(\tau_{e_3}(e_i, e_k))\leqq l(\tau_{e_1}(e_i, e_j))+l(\tau_{e_2}(e_j, e_k)) \tag{14}$$

ところで ρ_{τ_e} の定義式(3)より，

$$\rho_{\tau_e}(e_i, e_k)\leqq l(\tau_{e_3}(e_i, e_k)) \tag{15}$$

仮定より

$$\rho_{\tau_e}(e_i, e_j)=l(\tau_{e_1}(e_i, e_j))$$

$$\rho_{\tau_e}(e_j, e_k)=l(\tau_{e_2}(e_j, e_k))$$

であるから式(14)，(15)より

$$\rho_{\tau_e}(e_i, e_k)\leqq\rho_{\tau_e}(e_i, e_j)+\rho_{\tau_e}(e_j, e_k) \tag{16}$$

次に $\tau_{e_1}(e_i, e_j)$，$\tau_{e_2}(e_j, e_k)$ のいずれか一方が存在しない場合を考える．$\tau_{e_2}(e_j, e_k)$ が存在しないとしても一般性は失わない．このとき G は可分グラフであり，$e_j(e_i)$ と e_k は異なる非可分成分に含まれる．ゆえに式(4)より

$$\rho_{\tau_e}(e_j, e_k)=\rho_{\tau_e}(e_i, e_k)=\infty \tag{17}$$

$$\therefore\rho_{\tau_e}(e_i, e_k)\leqq\rho_{\tau_e}(e_i, e_j)+\rho_{\tau_e}(e_j, e_k) \tag{18}$$

また $\tau_{e_1}(e_i, e_j)$，$\tau_{e_2}(e_j, e_k)$ いずれも存在しない場合，

$$\rho_{\tau_e}(e_i, e_j)=\rho_{\tau_e}(e_j, e_k)=\infty \tag{19}$$

となり，$\rho_{\tau_e}(e_i, e_k)\leqq\infty$ であることから

$$\rho_{\tau_e}(e_i, e_k)\leqq\rho_{\tau_e}(e_i, e_j)+\rho_{\tau_e}(e_j, e_k) \tag{20}$$

以上，式(16)，(18)，(20)より，(II)が成立する.

（証明終）

3．例題と準距離の定性的意味

まず，ネットワークとその枝の間の準距離の例をあげる.

［例題1］

ネットワーク N の例をあげ，枝の準距離を求める．図1のネットワークを考える．枝の（ ）内の数値は枝

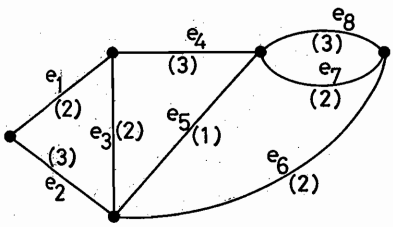


図1　ネットワーク N
Fig.1 A network N.

の長さを示す．e_4, e_5 を含む単純なタイセットの全てを以下に示す．

$\tau_1=\{e_1, e_2, e_4, e_5\}$

$\tau_2=\{e_1, e_2, e_4, e_5, e_7, e_8\}$

$\tau_3=\{e_3, e_4, e_5\}$

$\tau_4=\{e_3, e_4, e_5, e_7, e_8\}$

各タイセットの長さは，

$l(\tau_1)=9$，$l(\tau_2)=14$

$l(\tau_3)=6$，$l(\tau_4)=11$

従って，図1のネットワークの e_4 と e_5 の準距離は6すなわち，

$\rho_\tau(e_4, e_5)=6$

となる．

枝間の $\rho_\tau(e_i, e_j)$ の値を行列 $D_\tau=[d_{ij}]$，$d_{ij}=\rho_\tau(e_i, e_j)$ の形で表わすと

$$D_\tau=\begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 & 9 & 9 & 12 & 12 & 13 \\ 7 & 7 & 7 & 9 & 9 & 12 & 12 & 13 \\ 7 & 7 & 6 & 6 & 6 & 9 & 9 & 10 \\ 9 & 9 & 6 & 6 & 6 & 9 & 9 & 10 \\ 9 & 9 & 6 & 6 & 5 & 5 & 5 & 6 \\ 12 & 12 & 9 & 9 & 5 & 5 & 5 & 6 \\ 12 & 12 & 9 & 9 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 13 & 13 & 10 & 10 & 6 & 6 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

次に図2のネットワーク N を考える．N の各枝の長さは1とする．この N において，$\rho_\tau(e_1, e_2)=4$，$\rho_{\tau_e}(e_1, e_2)=7$．また，$\rho_\tau(e_1, e_4)=10$，$\rho_{\tau_e}(e_1, e_4)=\infty$ となる．すなわち，このネットワークは ρ_τ と ρ_{τ_e} が異なる値をとる例である．∎

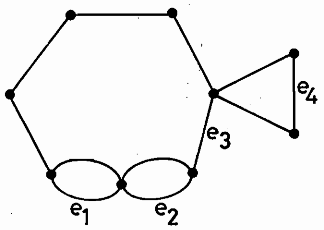


図2　ネットワーク N
Fig.1 A network N.

次にこの枝間の準距離 ρ_τ の定性的意味を述べる．ρ_τ の定義より，$\rho_\tau(e_i, e_j)$ は e_i，e_j を同時に含む閉路の最小長さを表わしている．この意味は，例えば道路網等を考えると考えやすい．すなわち，点は都市を枝は道路を表わしているとする．枝 e_i の迂回路として枝 e_j を通る場合，その迂回路の評価を $\rho_\tau(e_i, e_j)$ が表わしていると考えられる（特に，ρ_{τ_e} が迂回路の考え方に適合する）．すなわち，$\rho_\tau(e_i, e_j)$ の値が $\rho_\tau(e_i, e_j)$ の値より小さいとき，枝 e_i の迂回路としては e_k を通るよりは e_j を通った方がより"近い"と考えられる．これが枝間の近い，遠いの直感的意味である．

4. 枝に関する半径，直径と直径の上界と下界

点の場合には，2点間の最短路を用いて離心数，半径，直径等の概念が定義されている．$\rho_\tau(e_i, e_i)$ はその定義からわかるように，$\rho_\tau(e_i, e_j)$，$(e_j\in E)$ の中で最小である．そして，ρ_τ は対称性，三角不等式を満たしており，いわゆる近い，遠いという感覚的性質を満足している．ここでは準距離 ρ_τ を用いて点の場合と同様に離心数等の概念を定義する．

［定義3］

$N(G, l)$ の枝 e_i の ρ_τ の最大（最小）に関する離心数 $\varepsilon_\tau(e_i)$ $(\varepsilon_\tau^*(e_i))$ を式(21)，(21)′で定義する．

$$\varepsilon_\tau(e_i)=\max_{e_j\in E}\ \rho_\tau(e_i, e_j) \tag{21}$$

$$\varepsilon_\tau^*(e_i)=\min_{e_j\in E}\ \rho_\tau(e_i, e_j)$$

$$=\rho_\tau(e_i, e_i) \tag{21$'$}$$

以下＊のついた量は ρ_τ の最小に関する量とする．また N の枝に関する半径 $\mathrm{rad}_\tau(N)$，直径 $\mathrm{diam}_\tau(N)$ をそれぞれ，次のように定義する．

$$\mathrm{rad}_\tau(N)=\min_{e_i\in E}\ \varepsilon_\tau(e_i) \tag{22}$$

$$\mathrm{rad}_\tau^*(N)=\min_{e_i\in E}\ \varepsilon_\tau^*(e_i) \tag{22$'$}$$

$$\mathrm{diam}_\tau(N)=\max_{e_i\in E}\ \varepsilon_\tau(e_i) \tag{23}$$

$$\mathrm{diam}_\tau^*(N)=\max_{e_i\in E}\ \varepsilon_\tau^*(e_i) \tag{23$'$}$$

特に $\varepsilon_\tau(e_i)=\mathrm{rad}_\tau(N)$ $(\varepsilon_\tau^*(e_i)=\mathrm{rad}_\tau^*(N))$ であるとき，e_i を ρ_τ の最大（最小）に関する中心枝，中心枝の集合を ρ_τ の最大（最小）に関する中心と呼ぶ．（定義終）

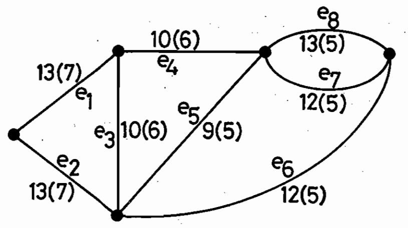


図3　図1のネットワークの枝の離心数
Fig.3 The eccentricity of an edge of N of Fig.1.

［例題2］

図1のネットワークの離心数を求める．

例題1の行列D_τより，各枝の離心数$\epsilon_\tau(\epsilon_\tau^*)$は図3のようになる．$\mathrm{rad}_\tau(N)=9$，$\mathrm{rad}_\tau^*(N)=5$，$\mathrm{diam}_\tau(N)=13$，$\mathrm{diam}_\tau^*(N)=7$となる．$\{e_5\}$は$\rho_\tau$の最大に関する中心，$\{e_5, e_6, e_7, e_8\}$は$\rho_\tau$の最小に関する中心である．▮

定義3の枝に関する半径，直径について，次の不等式が成立する．

［定理3］

ネットワークNの全ての枝の長さを1としたとき，

$$\mathrm{rad}_\tau(N)\leqq\mathrm{diam}_\tau(N)\leqq 2\,\mathrm{rad}_\tau(N)-2 \qquad (24)$$

$$\mathrm{rad}_\tau^*(N)\leqq\mathrm{diam}_\tau^*(N) \qquad (24)'$$

が成立する．

（証明）

$\mathrm{rad}_\tau(N)\leqq\mathrm{diam}_\tau(N)$，$\mathrm{rad}_\tau^*(N)\leqq\mathrm{diam}_\tau^*(N)$は定義式(22)〜(23)′より明らかである．

次に$\mathrm{diam}_\tau(N)\leqq 2\,\mathrm{rad}_\tau(N)-2$を示す．

(1)　Gが自己カットセット枝e_kを含む場合

枝e_kを含む単純なタイセットは存在しないから$e_i\in E$に対して$R(e_i, e_k)=\phi$．従って式(4)より

$$\rho_\tau(e_i, e_k)=\infty \quad (e_i\in E) \qquad (25)$$

$$\therefore\ \mathrm{rad}_\tau(N)=\mathrm{diam}_\tau(N)=\infty \qquad (26)$$

式(26)は命題を満足する．

(2)　Gが自己カットセット枝を含まない場合

(i)　$E=\{e_i, e_j\}$の場合（$|E|=2$）

明らかに，$\mathrm{rad}_\tau(N)=\mathrm{diam}_\tau(N)=l(e_i)+l(e_j)$．$l(e_i)=l(e_j)=1$より

$$\mathrm{rad}_\tau(N)=\mathrm{diam}_\tau(N)=2$$

これは命題を満足する．

(ii)　Eの要素数が3以上の場合（$|E|\geqq 3$）

$\rho_\tau(e_i, e_j)=\mathrm{diam}(N)$である2枝$e_i$，$e_j$を選び，$\rho_\tau$の最大に関する中心枝を$e_k$とする．このとき$e_i=e_k$，または$e_j=e_k$であれば$\mathrm{rad}_\tau(N)=\mathrm{diam}_\tau(N)\geqq 2$が成立し，式(24)は成立する．次に$e_i\neq e_j\neq e_k$の場合を考える．$e_i, e_k$を同時に含む単純な閉路の中で，最小長さの閉路を$L_1$，または，$e_j, e_k$を同時に含む単純な閉路の中で最小長さの閉路を$L_2$とする．また$L_1$，$L_2$の枝集合すなわちタイセットをそれぞれ$\tau_1(e_i, e_k)$，$\tau_2(e_j, e_k)$とする．このとき，

(a)　$\tau_1(e_i, e_k)\cap\tau_2(e_j, e_k)=\{e_k\}$の場合

閉路L_1，L_2から枝e_kを開放除去してできる単純な道をそれぞれp_1, p_2とする．仮定より，p_1とp_2には共有な枝が存在しないから，p_1とp_2とからe_i, e_jを含む単純な閉路を構成できる．この閉路の枝集合すなわちタイセットを$\tau_3(e_i, e_j)$とすれば

$$\tau_3(e_i, e_j)\subseteq\tau_1(e_i, e_k)\cup\tau_2(e_j, e_k)-\{e_k\} \qquad (27)$$

従って，

$$\begin{aligned} l(\tau_3) &\leqq l(\tau_1(e_i, e_k)\cup\tau_2(e_j, e_k))-l(e_k) \\ &\leqq l(\tau_1(e_i, e_k))+l(\tau_2(e_j, e_k)) \\ &\quad -l(e_k)-l(e_k) \\ &= l(\tau_1)+l(\tau_2)-2\,l(e_k) \end{aligned} \qquad (28)$$

ρ_τの定義式(3)より

$$\rho_\tau(e_i, e_j)\leqq l(\tau_3(e_i, e_j))$$

また仮定より

$$\rho_\tau(e_i, e_j)=\mathrm{diam}_\tau(N)$$

$$l(\tau_1)\leqq\mathrm{rad}(N),\quad l(\tau_2)\leqq\mathrm{rad}(N)$$

従って，式(28)より

$$\mathrm{diam}_\tau(N)\leqq 2\,\mathrm{rad}_\tau(N)-2\,l(e_k) \qquad (29)$$

ここで$l(e_k)=1$とすれば式(24)が得られる．

(b)　$\tau_1(e_i, e_k)\cap\tau_2(e_j, e_k)$に枝$e_k$以外の枝も含まれる場合

枝$e_a\neq e_k$が$\tau_1(e_i, e_k)\cap\tau_2(e_j, e_k)$に属すると仮定する．$L_1$と$L_2$からなる$G$の部分グラフを$g$とする．補題2より$g$上には$e_i, e_j$を同時に含む単純な閉路が存在する．この閉路の枝集合すなわちタイセットを$\tau_3(e_i, e_j)$とすると

$$\begin{aligned} l(\tau_3(e_i, e_j)) &\leqq l(\tau_1(e_i, e_k)\cup\tau_2(e_j, e_k)) \\ &\leqq l(\tau_1)+l(\tau_2)-l(e_k)-l(e_a) \end{aligned} \qquad (30)$$

ρ_τの定義式(3)，および仮定より，

$$\begin{aligned} \mathrm{diam}_\tau(N)=\rho_\tau(e_i, e_j) &\leqq l(\tau_3(e_i, e_j)) \\ &\leqq 2\,\mathrm{rad}_\tau(N)-l(e_k)-l(e_a) \end{aligned} \qquad (31)$$

$l(e_k)=l(e_a)=1$とすれば，式(31)より，式(24)が得られる．　　（証明終）†

さて，離心数$\epsilon_\tau(\epsilon_\tau^*)$は準距離$\rho_\tau$を用いて定義されていたが，$\rho_\tau$を$\rho_{\tau_e}$でおきかえても同様に定義される．

† ρ_τの最小に関する半径と直径の間には，一般に$\mathrm{diam}_\tau^*(N)\leqq 2\mathrm{rad}_\tau^*(N)-2$の関係は成立しない．この例は例題3の(3)で示される．

このときの離心数を ε_{τ_e} ($\varepsilon^*_{\tau_e}$) とし，半径，直径をそれぞれ $\mathrm{rad}_{\tau_e}(N)$ ($\mathrm{rad}^*_{\tau_e}(N)$)，$\mathrm{diam}_{\tau_e}(N)$ ($\mathrm{diam}^*_{\tau_e}(N)$) とする．このとき，次の定理を得る．

［定理4］

ネットワーク N の全ての枝の長さを1としたとき，

$$\mathrm{rad}_{\tau_e}(N) \leqq \mathrm{diam}_{\tau_e}(N) \leqq 2\,\mathrm{rad}_{\tau_e}(N) - 2 \tag{32}$$

$$\mathrm{rad}^*_{\tau_e}(N) \leqq \mathrm{diam}^*_{\tau_e}(N) \tag{32$'$}$$

が成立する．

（証明）

$\mathrm{rad}_{\tau_e}(N) \leqq \mathrm{diam}_{\tau_e}(N)$，$\mathrm{rad}^*_{\tau_e}(N) \leqq \mathrm{diam}^*_{\tau_e}(N)$

が成立することは半径，直径の定義より明らかである．

次に，$\mathrm{diam}_{\tau_e}(N) \leqq 2\,\mathrm{rad}_{\tau_e}(N) - 2$ について示す．

(1) G が可分グラフの場合

枝 e_i, e_j がそれぞれ異なる非可分成分に含まれるとき，e_i, e_j を同時に含む初等的閉路は存在しない．従って，$R_e(e_i, e_j) = \phi$．ρ_{τ_e} の定義式(4)より，

$$\rho_{\tau_e}(e_i, e_j) = \infty \tag{33}$$

$$\therefore\ \mathrm{rad}_{\tau_e}(N) = \mathrm{diam}_{\tau_e}(N) = \infty \tag{34}$$

式(34)より式(32)は成立する．

(2) G が非可分グラフの場合

(i) $E = \{e_i, e_j\}$ の場合 ($|E| = 2$)

明らかに，$\mathrm{rad}_{\tau_e}(N) = \mathrm{diam}_{\tau_e}(N) = l(e_i) + l(e_j)$．$l(e_i) = l(e_j) = 1$ とすると式(32)が得られる．

(ii) E の要素が3以上の場合 ($|E| \geqq 3$)

$\rho_{\tau_e}(e_i, e_j) = \mathrm{diam}_{\tau_e}(N)$，$\varepsilon_{\tau_e}(e_k) = \mathrm{rad}_{\tau_e}(N)$ が成立する枝 e_i, e_j, e_k を考える．$e_i = e_k$，または $e_j = e_k$ であれば，$\mathrm{diam}_{\tau_e}(N) = \mathrm{rad}_{\tau_e}(N) \geqq 2$ が成立する．従って式(32)は成立する．次に $e_i \neq e_j \neq e_k$ の場合について示す．e_i, e_k を同時に含む初等的閉路の中で最小長さの閉路を L_1 とし，その枝集合すなわち初等的タイセットを $\tau_{e_1}(e_i, e_k)$ とする．また e_j, e_k を同時に含む初等的閉路の中の最小長さの閉路を L_2 とし，その枝集合すなわち初等的タイセットを $\tau_{e_2}(e_j, e_k)$ とする．補題3より，L_1 と L_2 からなる G の部分グラフ上に e_i, e_j を含む初等的閉路が存在する．この閉路の枝集合すなわち初等的タイセットを $\tau_{e_3}(e_i, e_j)$ とする．つまり，

$$\tau_{e_3}(e_i, e_j) \subseteq \tau_{e_1}(e_i, e_k) \cup \tau_{e_2}(e_j, e_k) \tag{35}$$

このとき枝部分集合 E_x を

$$E_x = \tau_{e_1}(e_i, e_k) - \tau_{e_1}(e_i, e_k) \cap \tau_{e_3}(e_i, e_j) \tag{36}$$

のように定める．

(a) $E_x = \phi$ の場合

$\tau_{e_3}(e_i, e_j)$ は初等的タイセットであるから，その部分集合に他の初等的タイセットは含まれない．従って，$\tau_{e_1}(e_i, e_k) = \tau_{e_3}(e_i, e_j)$ が成立する．従って，$\tau_{e_1}(e_i, e_k)$ には e_j が含まれる．ゆえに式(35)より

$$\begin{aligned} l(\tau_{e_3}(e_i, e_j)) &\leqq l(\tau_{e_1}(e_i, e_k) \cup \tau_{e_2}(e_j, e_k)) \\ &\leqq l(\tau_{e_1}(e_i, e_k)) + l(\tau_{e_2}(e_j, e_k)) - l(e_k) - l(e_j) \end{aligned} \tag{37}$$

ρ_{τ_e} の定義より

$\rho_{\tau_e}(e_i, e_j) \leqq l(\tau_{e_3}(e_i, e_j))$

仮定より

$\rho_{\tau_e}(e_i, e_j) = \mathrm{diam}(N)$

$l(\tau_{e_1}(e_i, e_k)) \leqq \mathrm{rad}_{\tau_e}(N)$

$l(\tau_{e_2}(e_j, e_k)) \leqq \mathrm{rad}_{\tau_e}(N)$

従って，式(37)より

$$\mathrm{diam}_{\tau_e}(N) \leqq 2\,\mathrm{rad}_{\tau_e}(N) - l(e_k) - l(e_j) \tag{38}$$

$l(e_k) = l(e_j) = 1$ とすると式(32)が得られる．

(b) $E_x \neq \phi$ の場合

E_x に属する枝の1本を e_a とする．式(35)より

$$\tau_{e_3}(e_i, e_j) \subseteq \tau_{e_1}(e_i, e_k) \cup \tau_{e_2}(e_j, e_k) - \{e_a\} \tag{39}$$

従って，

$$\begin{aligned} l(\tau_{e_3}(e_i, e_j)) &\leqq l(\tau_{e_1}(e_i, e_k) \cup \tau_{e_2}(e_j, e_k)) - l(e_a) \\ &\leqq l(\tau_{e_1}(e_i, e_k)) + l(\tau_{e_2}(e_j, e_k)) - l(e_k) - l(e_a) \end{aligned} \tag{40}$$

ゆえに，

$$\mathrm{diam}_{\tau_e}(N) \leqq 2\,\mathrm{rad}_{\tau_e}(N) - l(e_k) - l(e_a) \tag{41}$$

$l(e_k) = l(e_a) = 1$ とすれば式(32)が得られる．

（証明終）

例を示す．

［例題3］

(1) 図2のネットワークを考える．各枝の長さは1とする．

$\mathrm{rad}_\tau(N) = \mathrm{diam}_\tau(N) = 10$，$\mathrm{rad}_{\tau_e}(N) = \mathrm{diam}_{\tau_e}(N) = \infty$ となる．これは $\mathrm{rad}_\tau(N)$ と $\mathrm{rad}_{\tau_e}(N)$，また $\mathrm{diam}_\tau(N)$ と $\mathrm{diam}_{\tau_e}(N)$ が異なる値を持つ例である．

(2) 図4のネットワークを考える．各枝の長さは1とする．これらのネットワークは，いずれも $\mathrm{rad}_\tau(N) = \mathrm{diam}_\tau(N)$，$\mathrm{rad}^*_\tau(N) = \mathrm{diam}^*_\tau(N)$ となる例である．

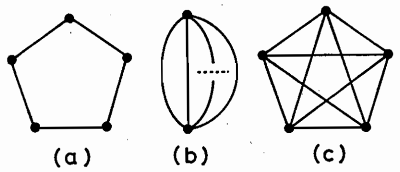


図4 ネットワーク
Fig. 4 Networks.

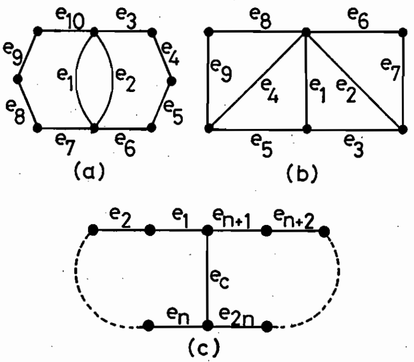


図5　ネットワーク
Fig.5　Networks.

(a)は $\mathrm{rad}_\tau(N)=\mathrm{diam}_\tau(N)=\mathrm{rad}^*_\tau(N)=\mathrm{diam}^*_\tau(N)=5$．一般に n 点からなる初等的閉路のグラフ C_n は $\mathrm{rad}_\tau(N)=\mathrm{diam}_\tau(N)=n$，$\mathrm{rad}^*_\tau(N)=\mathrm{diam}^*_\tau(N)=n$ である．(b)は $\mathrm{rad}_\tau(N)=\mathrm{diam}_\tau(N)=\mathrm{rad}^*_\tau(N)=\mathrm{diam}^*_\tau(N)=2$．(c)は $\mathrm{rad}_\tau(N)=\mathrm{diam}_\tau(N)=4$，$\mathrm{rad}^*_\tau(N)=\mathrm{diam}^*_\tau(N)=3$ である．これは n 点の完全グラフ $K_n(n\geqq 4)$ においても成立する．

(3)　図5のネットワークを考える．各枝の長さは1とする．これらのネットワークは，$\mathrm{diam}_\tau(N)=2\,\mathrm{rad}_\tau(N)-2$ が成立する例である．(a)では，$\varepsilon_\tau(e_1)=\varepsilon_\tau(e_2)=5$，$\varepsilon_\tau(e_i)=8\ (i=3\sim10)$．つまり，$\mathrm{rad}_\tau(N)=5$，$\mathrm{diam}_\tau(N)=8$ である．またこの N は $\varepsilon^*_\tau(e_i)=2\ (i=1, 2)$，$\varepsilon^*_\tau(e_i)=5\ (i=3\sim10)$ で $\mathrm{rad}^*_\tau(N)=2$，$\mathrm{diam}^*_\tau(N)=5$ となり，$\mathrm{diam}^*_\tau(N)\leqq 2\,\mathrm{rad}^*_\tau(N)-2$ が成立しない例である．(b)では $\varepsilon_\tau(e_1)=4$，$\varepsilon_\tau(e_i)=5\ (i=2\sim5)$，$\varepsilon_\tau(e_i)=6\ (i=6\sim9)$ であり，$\mathrm{rad}_\tau(N)=4$，$\mathrm{diam}_\tau(N)=6$ である．(c)では $\varepsilon_\tau(e_c)=n+1$，$\varepsilon_\tau(e_i)=2n\ (i=1\sim2n)$，(ただし $n\geqq1$) となり，$\mathrm{rad}_\tau(N)=n+1$，$\mathrm{diam}_\tau(N)=2n$，すなわち $n\geqq1$ に対して，$\mathrm{diam}_\tau(N)=2\,\mathrm{rad}_\tau(N)-2$ が成立する例である．

（例題終）

この例題3の(2)，(3)より，与えられた直径の値に対して，その直径を有し，その値がその上界または下界に等しいグラフを作ることができることがわかった．このことから，定理3，定理4から得られた直径の上界と下界は最良であることがわかる．

5．枝に容量を有するネットワークの場合

前章までは枝の重みは長さであった．枝に非負実数値の容量の重みを持つネットワーク $N(G,C)$ ($C(e_k)$ は枝 $e_k\in E$ の容量を表わす）においては，どのように考えれば良いであろうか．式(1)～(4)の ρ_τ の定義において，「タイセット」を「カットセット」，l を C，で置き換えて定義される ρ_τ を ρ_γ とおく．この ρ_γ が準距離公理を満足することは既に証明されている[4]．この ρ_γ を用いて定義されるネットワークの半径 $\mathrm{rad}_\gamma(N)$ ($\mathrm{rad}^*_\gamma(N)$)，直径 $\mathrm{diam}_\gamma(N)$ ($\mathrm{diam}^*_\gamma(N)$) または $\mathrm{rad}_{\gamma_e}(N)$ ($\mathrm{rad}^*_{\gamma_e}(N)$)，$\mathrm{diam}_{\gamma_e}(N)$ ($\mathrm{diam}^*_{\gamma_e}(N)$)[4] の間に次の定理が成立する．

これらの証明は，定理3，定理4と類似の手法で得られる．　（証明略）

［定理5］

ネットワーク N の全ての枝の容量を1としたとき，

$$\mathrm{rad}_\gamma(N)\leqq\mathrm{diam}_\gamma(N)\leqq 2\,\mathrm{rad}_\gamma(N)-2 \tag{42}$$

$$\mathrm{rad}^*_\gamma(N)\leqq\mathrm{diam}^*_\gamma(N) \tag{42'}$$

が成立する．　∎

［定理6］

ネットワーク N の全ての枝の容量を1としたとき，

$$\mathrm{rad}_{\gamma_e}(N)\leqq\mathrm{diam}_{\gamma_e}(N)\leqq 2\,\mathrm{rad}_{\gamma_e}(N)-2 \tag{43}$$

$$\mathrm{rad}^*_{\gamma_e}(N)\leqq\mathrm{diam}^*_{\gamma_e}(N) \tag{43'}$$

が成立する．　∎

6．む　す　び

グラフの枝間の係わりを測る一つの量として，タイセットの長さを用いる方法を提案し，その量が準距離となることを示した．そして，それを用いてグラフの枝に関する離心数，半径，直径を定義し，直径の上界と下界を示す不等式を導出し，それらの上界，下界が最良であることも示した．また，枝間の係わりをカットセットを用いて測る場合も同様な結果が得られることも述べた．

これらの枝間の係わりの量は，コンピュータネットワーク，通信網等の具体的系において迂回路，罹障度等と深い関係を持つ．小文の結果はグラフ構造に関する基本的性質と考えられる．これらの性質のコンピュータネットワーク，通信網等への具体的応用が今後の課題である．

謝辞　日頃御指導頂く，新潟大・工・阿部武雄教授に感謝の意を表する．

文　　献

(1)　M. Behzad, G. Chartrand and L. Lesniak-Foster : "Graphs and Digraphs", Wadsworth, Inc. (1979).
（日本語訳，「グラフとダイグラフの理論」，秋山，西関訳，共立出版（1981））.

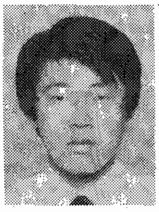
(2)　伊理，他："演習グラフ理論－基礎と応用－"，コ

ロナ社(1983).
(3) 仙石，篠田：“ネットワークの枝の中心らしさを測る関数”，信学技報，CAS83-119(1984-02).
(4) 仙石，篠田：“枝に容量を有する無向ネットワークの枝の中心らしさを測る関数”，信学論(A)，J68-A，11，pp.1157-1165(昭60-11).
(5) 仙石，小林，篠田：“無向グラフの枝に関する半径と直径”，信学技報，CAS85-20(1985-07).

(昭和60年8月12日受付，9月25日再受付)

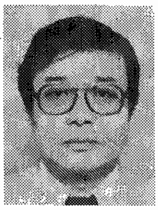
仙石　正和

昭42新潟大・工・電気卒．昭47北大大学院博士課程了．工博．同年北大・工・電子助手．現在，新潟大・工・情報助教授．回路網理論，グラフ理論，情報伝送などの研究に従事．著書「演習グラフ理論」(共著).



小林　和仁

昭60新潟大・工・情報卒．現在，新潟県庁，総務部情報管理課(技師)勤務．新潟大学在学中，グラフ理論の研究に従事．



篠田　庄司

昭39中大・理工・電気卒．昭48同大学院博士課程了．工博．昭40中大研究助手．現在，同大理工学部電気工学科教授．グラフ・ネットワーク構造を持つシステムの解析，設計，制御の研究に従事．著書「最新回路理論」，「回路解析」など．