

論文

ネットワーク上の最適点数充足勢力圏図

正員 森泉 隆[†] 正員 築山 修治[†] 正員 篠田 庄司[†]
正員 仙石 正和^{††} 正員 白川 功^{†††}

An Optimal Cardinality-Constrained Territory Map on a Network

Takashi MORIIZUMI[†], Shuji TSUKIYAMA[†], Shoij SHINODA[†], Masakazu SENGOKU^{††}
and Isao SHIRAKAWA^{†††}, Members

あらまし 点集合 V , 各枝の枝長が指定されている枝集合 E , および母点と呼ばれる k 個の点をもつネットワーク N が与えられたとき, V を被覆する点の集合の族 $M = \{T_i\}$ の各 T_i が, 互いに素で, 母点 c_i を含むが他の母点を含まず $L_i \leq |T_i| \leq N_i$ を満たすならば, T_i を c_i の勢力圏といい, M を N の点数充足勢力圏図という。ここで, $|T_i|$ は T_i の要素数を表し, L_i および N_i は各母点 c_i に対して指定された 1 対の正定数である。 c_i の勢力圏 T_i に対して, $f(T_i)$ を c_i から T_i の各点への最短路長の総和とし, 点数充足勢力圏図 $M = \{T_i\}$ に対して, $F(M)$ を $f(T_i)$ の総和としたとき, 任意の点数充足勢力圏図 M' に対して, $F(M) \leq F(M')$ を満たす M を最適点数充足勢力圏図という。本論文では, 最適点数充足勢力圏図を見出す問題について考察し, 時間およびスペース複雑度がそれぞれ $O(|V|(|E| + k \log k))$ および $O(|V| + |E|)$ のアルゴリズムを提案する。ネットワーク上の最適点数充足勢力圏図は, 要素関係を考慮した割当て問題との関連で基本的役割を果たす。

1. まえがき

点集合を V , 枝集合を E とする連結無向グラフ $G = (V, E)$ を結線構造とするネットワーク $N = (G, l)$ を考える。 l は各枝 $e \in E$ に枝長といわれる正の実数値 $l(e)$ を対応付ける重み関数であり, ネットワーク N には母点といわれる k 個の点 c_1, c_2, \dots, c_k が指定されているものとする。各母点 c_i に対する点集合 $T_i (1 \leq i \leq k)$ が,

(I) 母点 c_i を含むが他の母点を含まない,

(II) $T_i \cap T_j = \emptyset (i \neq j)$,

(III) $\bigcup_{i=1}^k T_i = V$,

を満たすとき, T_i の集合 $M = \{T_i | i=1, 2, \dots, k\}$ を V の勢力圏図といい, 各点集合 T_i を c_i の勢力圏という。なお, 以下では $M = \{T_i | i=1, 2, \dots, k\}$ を単に $M = \{T_i\}$ と書く。

次に, ネットワークの点 u から点 v への初等的パスのうちで長さが最小なものを点 u から点 v への最短路といい, その長さを点 u から点 v への距離といい, $d(u, v)$ と表す。各母点 c_i の勢力圏 T_i に対して

$$f(T_i) = \sum_{v \in T_i} d(c_i, v) \quad (1)$$

なる中心度関数⁽¹⁾を考え, これを用いて, 勢力圏図 $M = \{T_i\}$ に対して,

$$F(M) = \sum_{T_i \in M} f(T_i) \quad (2)$$

なる値を定義する。このとき, 勢力圏図 $M = \{T_i\}$ のうちで最小の $F(M)$ を与えるものを最適勢力圏図といいう。最適勢力圏図とは, Voronoi 図^{(2),(3)}において複数個の母点から等距離にある点をそのどれかの母点の Voronoi 領域に組み入れたものであり, すべての最適勢力圏図の共通部分が Voronoi 図である。

次に, 各勢力圏 T_i に属す点の個数 $|T_i|$ が前もって指定された 1 対の整数 L_i, N_i に対して $L_i \leq |T_i| \leq N_i$ を満たすような勢力圏図 $M = \{T_i\}$ を, 要素数に関する与えられた制約を満足する勢力圏図といいう意味で, 点数充足勢力圏図といい, このような勢力圏図 M のうちで最小の $F(M)$ を与えるものを最適点数充足勢力圏図といいう。但し, $L_i \leq N_i (1 \leq i \leq k)$ であり, かつ $\sum_{i=1}^k L_i$

† 中央大学理工学部電気工学科, 東京都
Faculty of Science and Engineering, Chuo University, Tokyo, 112
Japan

†† 新潟大学工学部情報工学科, 新潟市
Faculty of Engineering, Niigata University, Niigata-shi, 950-21
Japan

††† 大阪大学工学部電子工学科, 吹田市
Faculty of Engineering, Osaka University, Suita-shi, 565 Japan

$\leq |V| \leq \sum_{i=1}^k N_i$ である。

本論文では、最適点教充足勢力圏図を求める問題について考察する。最適点教充足勢力圏図の応用としては、通信網や郵便局網などにおいて、受信局や配達される町の数に制限がある場合に、各受信局や町をどの局の下に割り当てるかという問題や、人間関係を考慮した仕事の割振りにおいて、各々仕事に従事できる人数に制限がある場合に、どこにだれを配置するかという問題などが考えられる^{(4),(5)}。

今、与えられたグラフ G に、入口(ソース) s および出口(シンク) t の 2 点、並びに、 s と各母点 c_i ($1 \leq i \leq k$) との間の枝 (s, c_i) および t と母点以外の各点 v との間の枝 (v, t) を付加する。更に、各枝 e に対してフローの下限 $a(e)$ 、容量 $b(e)$ 、およびコスト $l(e)$ を次のように与える。

$$\begin{aligned} (a(e), b(e), l(e)) &= (L_i, N_i, 0) && : \text{for } e = (s, c_i), \\ (a(e), b(e), l(e)) &= (0, \infty, l(e)) && : \text{for } e \in E, \\ (a(e), b(e), l(e)) &= (1, 1, 0) && : \text{for } e = (v, t) \end{aligned}$$

こうしてできたグラフにおける s から t への実行可能整数フローを $x = (x(e) | e \in E)$ とすると、

$$\begin{aligned} F(\mathbf{M}) &= \sum_{T_i \in M} f(T_i) \\ &= \sum_{T_i \in M} \sum_{v \in T_i} d(c_i, v) \\ &= \sum_{e \in E} x(e) \cdot l(e) \end{aligned}$$

が成立し、本論文で取り扱う問題が最小コストフロー問題に帰着できることがわかる。

この最小コストフロー問題はネットワークの形状や容量が特別な場合であり、輸送問題(割当て問題)の一般化となっているから、プライマルデュアル型の解法を用いて $O(nS(m, n))$ の手間で解くことができる⁽⁶⁾。ここで、 n は点の数、 m は枝の数、 $S(m, n)$ は負の枝長の枝がないときの 1 点からの最短路^{(7),(8)}を求める手間である。

これに対して、本論文では、 $O(n(m + S(m^*, k)))$ で最適点教充足勢力圏図を求めるアルゴリズムを提案する。ここで、 m^* は $m^* \leq \min\{m, k^2\}$ を満足する。現在知られている最良の $S(m, n)$ は $O(m + n \log n)$ ⁽⁷⁾ であるから、本論文の手法では $O(n(m + k \log k))$ 、最小コストフローの手法では $O(n(m + n \log n))$ の計算時間要する。従って、計算複雑度の観点からは大きな改良は得られないが、本論文で展開している議論は、勢力圏に関するグラフ理論的考察として興味深いと思われる。

以下で用いるネットワークやグラフに関する基本的用語の定義は文献(8)を参照されたい。

2. 随伴グラフと勢力圏図更新操作

ネットワーク N のある勢力圏図 $\mathbf{M} = \{T_i\}$ に対して、勢力圏 T_j の点 v_j と勢力圏 T_i ($i \neq j$) の点 v_i との間の枝 $e = (v_i, v_j)$ (T_i と T_j をまたぐ枝) の集合を $\omega(T_i, T_j) = \{e = (v_i, v_j) \in E | v_i \in T_i, v_j \in T_j, i \neq j\}$ とし、すべての T_i, T_j の組に関する $\omega(T_i, T_j)$ の和集合を $\Omega(\mathbf{M}) = \bigcup_{i \neq j} \omega(T_i, T_j)$ とする。

今、 $\Omega(\mathbf{M})$ の各枝 $e = (v_i, v_j)$ に対して、

$$\bar{l}(v_i, v_j) = d(c_i, v_i) + l(e) - d(c_j, v_j) \quad (3)$$

なる数を定義する。ここで、 c_i および c_j は各々 v_i および v_j が属す勢力圏 T_i および T_j の母点である。 $(v_i, v_j) \in \omega(T_i, T_j)$ なる枝の端点 v_j を勢力圏 T_j から取り除き、 T_i に入れる(すなわち、 v_j を T_j から T_i に移動する)ことによって得られる勢力圏図 \mathbf{M}' の関数 $F(\mathbf{M}')$ が、

$$F(\mathbf{M}') \leq F(\mathbf{M}) + l(v_i, v_j) \quad (4)$$

を満たすことは

$$F(\mathbf{M}') = F(\mathbf{M}) + d(c_i, v_i) - d(c_j, v_j)$$

$$\leq F(\mathbf{M}) + d(c_i, v_i) + l(v_i, v_j) - d(c_j, v_j)$$

より明らかであろう。ここで、 $l(v_i, v_j)$ は枝 $e = (v_i, v_j)$ の枝長 $l(e)$ を表す。また、 c_i から v_j へ至る最短路が枝 e を通るならば、等号が成り立つこともわかる。

そこで、 $N = (G, l)$ のある勢力圏図 $\mathbf{M} = \{T_i\}$ に対して、この値 $\bar{l}(v_i, v_j)$ を用いて、次のように \mathbf{M} の随伴グラフ $\bar{G}(\mathbf{M})$ を定義する。

(1) $\bar{G}(\mathbf{M})$ の各点 \bar{c}_i は、勢力圏 T_i に対応する。

(2) 勢力圏 T_i および T_j に対して $\omega(T_i, T_j) \neq \emptyset$ のときかつそのときに限り T_i および T_j に対応する点 \bar{c}_i および \bar{c}_j の間に有向枝 (\bar{c}_i, \bar{c}_j) および (\bar{c}_j, \bar{c}_i) を作り、それらの有向枝の長さ $\bar{l}(\bar{c}_i, \bar{c}_j)$ および $\bar{l}(\bar{c}_j, \bar{c}_i)$ をそれぞれ

$$\bar{l}(\bar{c}_i, \bar{c}_j) = \min\{\bar{l}(v_i, v_j) | (v_i, v_j) \in \omega(T_i, T_j)\}$$

$$\bar{l}(\bar{c}_j, \bar{c}_i) = \min\{\bar{l}(v_j, v_i) | (v_i, v_j) \in \omega(T_i, T_j)\} \quad (5)$$

とする。

今、 $\bar{G}(\mathbf{M})$ の有向枝 $\bar{e} = (\bar{c}_i, \bar{c}_j)$ に対して、

$$\bar{l}(\bar{c}_i, \bar{c}_j) = \bar{l}(v_i, v_j) \quad (6)$$

となる枝 $(v_i, v_j) \in \omega(T_i, T_j)$ の端点 $v_i \in T_i$ および $v_j \in T_j$ をそれぞれ $\partial^+ \bar{e}$ および $\partial^- \bar{e}$ と表したとき、 $\bar{G}(\mathbf{M})$ 上のある枝 $\bar{e} = (\bar{c}_i, \bar{c}_j)$ に対して、 $\partial^- \bar{e} \neq c_j$ であったとする。このとき、 $\partial^- \bar{e} = v_j$ を T_j から T_i に移

動することによって得られる勢力圏図 M' に対して,

$$F(M') - F(M) = d(c_i, v_j) - d(c_j, v_j) \leq \bar{l}(\bar{c}_i, \bar{c}_j) \quad (7)$$

が成立し, c_i から v_j への最短路が枝 (v_i, v_j) を通るならば, 等号が成立する。また, $\partial^- \bar{e} = c_j$ のとき, T_j が c_j 以外の点 v_j を含むならば

$$\begin{aligned} \bar{l}(\bar{c}_i, \bar{c}_j) &= \bar{l}(v_i, c_j) \\ &= d(c_i, v_i) + l(v_i, c_j) - d(c_j, c_j) \\ &= d(c_i, v_i) + l(v_i, c_j) + d(c_j, v_j) - d(c_j, v_j) \end{aligned}$$

である。ここで, $v_i = \partial^+ \bar{e}$ である。また, 三角不等式より,

$$d(c_i, v_i) + l(v_i, c_j) + d(c_j, v_j) \geq d(c_i, v_j)$$

であるから,

$$\bar{l}(\bar{c}_i, \bar{c}_j) \geq d(c_i, v_j) - d(c_j, v_j)$$

が成立する。従って, 任意の点 v_j を T_j から T_i に移動してできる勢力圏図 M' に対しても式(7)が成立し, c_i から v_j への最短路が枝 (v_i, c_j) を通るならば, 式(7)の等号が成立する。更に, 次の補題1が成り立つ。

[補題1] 勢力圏図 $M = \{T_i\}$ の随伴グラフ $\bar{G}(M)$ が負の長さの閉路をもたないとき, ある勢力圏 T_r に属する母点 c_r 以外の点 v_r を, T_r から T_r 以外の勢力圏 T_1 に移動することにより得られる勢力圏図を M' , $\bar{G}(M)$ における点 \bar{c}_1 から点 \bar{c}_r への最短有向パス \bar{P}_0 の長さを $\bar{d}(\bar{P}_0)$ と表すと,

$$\begin{aligned} F(M') - F(M) &= d(c_1, v_r) - d(c_r, v_r) \\ &\geq F(M) + \bar{d}(\bar{P}_0) \end{aligned} \quad (8)$$

なる関係が成立する。

(証明) ネットワーク N における母点 c_1 から点 $v_r \in T_r$ への最短路を P とし, P が通る勢力圏を順に T_1, T_2, \dots, T_r とする。ここで, $T_i = T_j$ ($i+1 < j$) であっても良い。 P に対応する $\bar{G}(M)$ の有向パスを \bar{P} とし, その長さを $\bar{d}(\bar{P})$ とする。ここで, \bar{P} は初等的でなくとも良い。以下では,

$$d(c_1, v_r) - d(c_r, v_r) \geq \bar{d}(\bar{P}) \quad (9)$$

が成立することを, T_1 あるいは T_r に属さない P 上の点で母点でないものの個数に関する数学的帰納法により証明する。これが証明できると, \bar{P}_0 は \bar{c}_1 から \bar{c}_r へ至る最短有向パスであるから, $\bar{d}(\bar{P}) \geq \bar{d}(\bar{P}_0)$ であるので,

$$\begin{aligned} F(M') - F(M) &= d(c_1, v_r) - d(c_r, v_r) \\ &\geq \bar{d}(\bar{P}) \geq \bar{d}(\bar{P}_0) \end{aligned}$$

となり, 補題が証明できる。

まず, P が通る T_2 から T_{r-1} の点がすべて母点の場合を考える。このとき, P 上を c_1 から v_r に向かってた

どるとき, T_1 に属す最後の点を v_1 , T_r に属す最初の点を v_x とすると, v_1 と v_x の間の P 上の点はすべて母点である。従って,

$$\begin{aligned} d(c_1, v_r) - d(c_r, v_r) &= d(c_1, v_1) + l(v_1, c_2) \\ &\quad + \sum_{i=2}^{r-2} l(c_i, c_{i+1}) + l(c_{r-1}, v_x) \\ &\quad + d(v_x, v_r) - d(c_r, v_r) \end{aligned}$$

が成立する。ここで,

$$\bar{l}(\bar{c}_{r-1}, \bar{c}_r) \leq l(c_{r-1}, v_x) - d(c_r, v_x)$$

$$d(c_r, v_r) \leq d(c_r, v_x) + d(v_x, v_r)$$

であるから,

$$\bar{l}(\bar{c}_{r-1}, \bar{c}_r) \leq l(c_{r-1}, v_x) + d(v_x, v_r) - d(c_r, v_r)$$

であり, 更に,

$$\bar{l}(\bar{c}_1, \bar{c}_2) \leq d(c_1, v_1) + l(v_1, c_2)$$

$$\bar{l}(\bar{c}_i, \bar{c}_{i+1}) \leq l(c_i, c_{i+1}) \quad (2 \leq i \leq r-2)$$

であるから,

$$\begin{aligned} d(c_1, v_r) - d(c_r, v_r) &\geq \bar{l}(\bar{c}_1, \bar{c}_2) + \sum_{i=2}^{r-2} \bar{l}(\bar{c}_i, \bar{c}_{i+1}) + \bar{l}(\bar{c}_{r-1}, \bar{c}_r) \\ &= \sum_{i=1}^{r-1} \bar{l}(\bar{c}_i, \bar{c}_{i+1}) = \bar{d}(\bar{P}) \end{aligned}$$

が成立する。 c_2 から c_{r-1} の母点が P 上に存在しない場合にもこの式が成立することは容易にわかるであろう。

そこで, P 上の T_1 あるいは T_r に属さない母点以外の点の個数が $q-1$ 以下のときには式(9)が成立するものとし, このような点の個数が q のときを考える。 P 上を点 v_r から c_1 に向かって逆にたどったとき, 最初に出会う T_r 以外の母点でない点を v_p , v_p が属する勢力圏を T_p , T_p と T_{p+1} との間の P 上の枝を $e_p \in \omega(T_p, T_{p+1})$ とし, v_p から v_r へ P 上をたどるとき, 最初に出会う T_r の点を v_x とする(図1参照)。このとき,

$$\begin{aligned} d(c_1, v_r) - d(c_r, v_r) &= d(c_1, v_p) + d(v_p, \partial^+ e_p) + l(e_p) \\ &\quad + \sum_{i=p+1}^{r-2} l(c_i, c_{i+1}) + l(c_{r-1}, v_x) + d(v_x, v_r) \\ &\quad - d(c_r, v_r) \\ &= d(c_1, v_p) - d(c_p, v_p) \\ &\quad + d(c_p, v_p) + d(v_p, \partial^+ e_p) + l(e_p) \\ &\quad + \sum_{i=p+1}^{r-2} l(c_i, c_{i+1}) + l(c_{r-1}, v_x) + d(v_x, v_r) \\ &\quad - d(c_r, v_r) \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで, 前述の $q=0$ の場合と同様に,

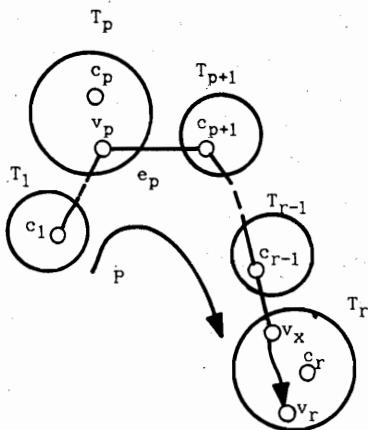


図1 補題1の証明のための説明図
Fig. 1 Illustration for the proof of Lemma 1.

$$\bar{l}(\bar{c}_{r-1}, \bar{c}_r) \leq l(c_{r-1}, v_x) + d(v_x, v_r) - d(c_r, v_r)$$

および、

$\bar{l}(\bar{c}_i, \bar{c}_{i+1}) \leq l(c_i, c_{i+1})$ ($p+1 \leq i \leq r-2$) が成立することは明らかであろう。更に、 $\partial^+ e_p = v_p$ あるいは $\partial^+ e_p = c_p$ のどちらの場合も、

$$\bar{l}(\bar{c}_p, \bar{c}_{p+1}) \leq d(c_p, v_p) + d(v_p, \partial^+ e_p) + l(e_p)$$

が成り立つから、

$$\begin{aligned} & d(c_1, v_r) - d(c_r, v_r) \\ & \geq \{d(c_1, v_p) - d(c_p, v_p)\} + \bar{l}(\bar{c}_p, \bar{c}_{p+1}) \\ & + \sum_{i=p+1}^{r-2} \bar{l}(\bar{c}_i, \bar{c}_{i+1}) + l(\bar{c}_{r-1}, \bar{c}_r) \\ & = \{d(c_1, v_p) - d(c_p, v_p)\} + \sum_{i=p}^{r-1} \bar{l}(\bar{c}_i, \bar{c}_{i+1}) \quad (10) \end{aligned}$$

を得る。前述の $q=0$ の場合と同様、 $p=r-1$ ($c_{p+1} \sim c_{r-1}$ は P 上に存在しない) 場合にもこの式が成立することは明らかであろう。

式(10)において、右辺の第1項は v_p を T_p から T_1 に移動することによる $F(\mathbf{M})$ の変化分であり、第2項は母点 c_1 から点 v_r への最短路 P に対応する $\bar{G}(\mathbf{M})$ 上の有向パス \bar{P} に含まれる点 \bar{c}_p から点 \bar{c}_r へ至る部分パスの長さである。そこで、 c_1 から v_p へ至る P の部分パスを P' とすると、 P' は c_1 から v_p への最短路であり、かつ勢力圏 T_1 あるいは T_p に属さない母点以外の点の個数が $q-1$ であるので、右辺第1項は、帰納法の仮定より、 $\bar{G}(\mathbf{M})$ の有向パス \bar{P} に含まれる点 \bar{c}_1 から点 \bar{c}_p へ至る部分パスの長さ以上である。従って、

$$d(c_1, v_r) - d(c_r, v_r) \geq \bar{d}(\bar{P})$$

が成り立つ。 \square

次に枝 $e \in \omega(T_i, T_j)$ に関する点の移動操作をいく

つかの枝に対して繰り返すことを考える。まず、随伴グラフ $\bar{G}(\mathbf{M})$ において、ある点 \bar{c}_{i_1} から $|T_{i_r}| > 1$ なる勢力圏 T_{i_r} に対応する点 \bar{c}_{i_r} へ至る有向パス \bar{P} が与えられたとき、 \bar{P} に関する以下の更新手続きを考える。

[勢力圏図更新操作]

1°：有向パス \bar{P} 上の点を \bar{c}_{i_1} から順次 $\bar{c}_{i_1}, \bar{c}_{i_2}, \dots, \bar{c}_{i_r}$ とし、 $q=r-1$ とする。

2°： $0 < q$ であれば \bar{P} 上の枝 $\bar{e}_q = (\bar{c}_{i_q}, \bar{c}_{i_{q+1}})$ に対して、以下の操作を行う。

3°： $\partial^- \bar{e}_q$ が部分集合 $T_{i_{q+1}}$ の母点 $\bar{c}_{i_{q+1}}$ でない場合には、 $\partial^- \bar{e}_q$ を $T_{i_{q+1}}$ から取り除き T_{i_q} に移動する。

4°： $\partial^- \bar{e}_q$ が母点 $\bar{c}_{i_{q+1}}$ の場合には、 $T_{i_{q+1}}$ には $\bar{c}_{i_{q+1}}$ 以外の点 $v_{i_{q+1}}$ が必ず存在するので、そのような任意の $v_{i_{q+1}} \in T_{i_{q+1}}$ を $T_{i_{q+1}}$ から T_{i_q} に移動する。

5°： $q=q-1$ として、2°へ戻る。

この操作によって得られた勢力圏図を $\mathbf{M}[\bar{P}]$ と書くと、 P の始点 \bar{c}_{i_1} および終点 \bar{c}_{i_r} に対応した $\mathbf{M}[\bar{P}]$ の勢力圏 T_{i_1} および T_{i_r} の要素数はもとの勢力圏図 \mathbf{M} におけるものよりそれぞれ1だけ増加および減少しており、他の勢力圏の要素数は変化しない。更に、次の補題2が成立する。

[補題2] $\bar{G}(\mathbf{M})$ が負の長さの有向閉路をもたないとき、 \bar{P} を $\bar{G}(\mathbf{M})$ における点 \bar{c}_1 から点 \bar{c}_r へ至る長さが $\bar{d}(\bar{P})$ の初等的な有向パスとすると、 \bar{P} に関する更新操作によって得られる勢力圏図 $\mathbf{M}[\bar{P}]$ に対して、

$$F(\mathbf{M}[\bar{P}]) \leq F(\mathbf{M}) + \bar{d}(\bar{P}) \quad (11)$$

が成立する。 \bar{P} が点 \bar{c}_1 から点 \bar{c}_r へ至る最短有向パスの場合には、等号が成立する。

(証明) P が唯一の枝から成る($r=2$ の)場合には、式(7)が成立していることより、補題の前半が成り立つことは明らかである。また、 \bar{P} を \bar{c}_1 から \bar{c}_r への最短路とすると、補題1より、

$$F(\mathbf{M}[\bar{P}]) \geq F(\mathbf{M}) + \bar{d}(\bar{P})$$

が成り立つから、後半も成立することがわかる。そこで、 $r < r'$ の場合に補題が成立しているものとし、 $r = r'$ の場合について考える。

今、もとの勢力圏図 \mathbf{M} において、 \bar{P} 上の各点 \bar{c}_q ($2 \leq q \leq r-1$) に対応する勢力圏 T_q がいずれも母点 c_q のみから成っているとする。このとき、更新操作によつて T_r から移動させられる点を v_r とし、 $\bar{l}(\bar{c}_1, \bar{c}_2) = \bar{l}(v_1, c_2)$ なる枝を $(v_1, c_2) \in \omega(T_1, T_2)$ とすると、

$$\bar{d}(\bar{P}) = \sum_{q=1}^{r-1} \bar{l}(\bar{c}_q, \bar{c}_{q+1})$$

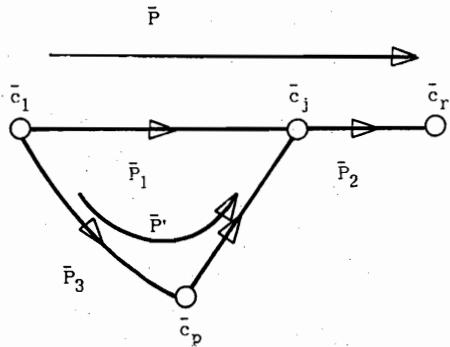


図 2 補題 2 の証明のための説明図

Fig. 2 Illustration for the proof of Lemma 2.

$$\begin{aligned} &= d(c_1, v_1) + l(v_1, c_2) \\ &\quad + \sum_{q=2}^{r-2} l(c_q, c_{q+1}) + l(c_{r-1}, v_r) - d(c_r, v_r) \\ &\geq d(c_1, v_r) - d(c_r, v_r) \end{aligned}$$

が成立し、更に、この場合には

$$F(\mathbf{M}[\bar{P}]) - F(\mathbf{M}) = d(c_1, v_r) - d(c_r, v_r)$$

であるから、式(11)が成り立つことがわかる。また、
 \bar{P} が点 \bar{c}_1 から点 \bar{c}_r へ至る最短有向パスの場合には、
補題 1 より、

$$F(\mathbf{M}[\bar{P}]) - F(\mathbf{M}) = d(c_1, v_r) - d(c_r, v_r) \geq \bar{d}(\bar{P})$$

であるので、式(11)の等号が成立する。

そこで、 \bar{P} 上の点 \bar{c}_q に対応する勢力圏 T_q ($2 \leq q \leq r-1$) の少なくとも一つが母点以外の点を含むとし、
 \bar{P} 上を \bar{c}_r から逆にたどったとき、最初に出会うその
ような点を \bar{c}_j ($2 \leq j \leq r-1$)、パス \bar{P} の \bar{c}_1 から \bar{c}_j へ
至る部分パスを \bar{P}_1 、 \bar{c}_j から \bar{c}_r へ至る部分パスを \bar{P}_2
とすると(図 2 参照)、 \bar{P}_1 および \bar{P}_2 共に点数が r' 未満
となる。そこで、 \mathbf{M} において、 \bar{P}_2 に関する更新操作に
よって得られる勢力圏図を \mathbf{M}' とすると、 $F(\mathbf{M}') \leq$
 $F(\mathbf{M}) + \bar{d}(\bar{P}_2)$ が成立する。今、 $\bar{G}(\mathbf{M}')$ における \bar{c}_1 か
ら \bar{c}_j へ至る有向パス \bar{P}_1 の長さを $\bar{d}'(\bar{P}_1)$ と表すと、
 $\bar{l}(\cdot, \cdot)$ の定義より、 $\bar{d}'(\bar{P}_1) \leq \bar{d}(\bar{P}_1)$ が成り立つから、
 $F(\mathbf{M}[\bar{P}])$ が \mathbf{M}' において \bar{P}_1 に関する更新操作を行って
できる勢力圏図と同じであることに注意すれば、

$$\begin{aligned} F(\mathbf{M}[\bar{P}]) &\leq F(\mathbf{M}') + \bar{d}'(\bar{P}_1) \\ &\leq F(\mathbf{M}) + \bar{d}(\bar{P}_2) + \bar{d}(\bar{P}_1) \\ &= F(\mathbf{M}) + \bar{d}(\bar{P}) \end{aligned}$$

となり、補題の前半が成立する。

更に、 \bar{P} が $\bar{G}(\mathbf{M})$ における最短有向パスとすると、
 \bar{P}_2 は点数が r' 未満の最短有向パスとなるから、
 $F(\mathbf{M}[\bar{P}]) = F(\mathbf{M}') + \bar{d}(\bar{P}_2)$ が成立する。従って、 $\bar{G}(\mathbf{M})$
における最短有向パス \bar{P}_1 が $\bar{G}(\mathbf{M}')$ においても \bar{c}_1 か

ら \bar{c}_j へ至る長さ $\bar{d}(\bar{P}_1)$ の最短有向パスになっている
ならば、

$$\begin{aligned} F(\mathbf{M}[\bar{P}]) &= F(\mathbf{M}') + \bar{d}'(\bar{P}_1) \\ &= F(\mathbf{M}) + \bar{d}(\bar{P}_1) + \bar{d}'(\bar{P}_2) \\ &= F(\mathbf{M}) + \bar{d}(\bar{P}) \end{aligned}$$

が成立し、補題が成り立つ。

そこで、 \mathbf{M}' において \bar{c}_1 から \bar{c}_j へ至る $\bar{d}(\bar{P}_1)$ より
短い長さの有向パス \bar{P}' が生じたと仮定する。但し、 \bar{P}'
と \bar{P}_1 が同じ枝から成っているとしても良い。この \bar{P}'
において、 \bar{c}_j の一つ前の点を \bar{c}_p 、 \bar{c}_1 から \bar{c}_p へ至る部
分パスを \bar{P}_3 とし、 \mathbf{M} において T_r から T_j に移動させ
られた点を v_r とする(図 2 参照)。 v_r を移動したこと
により、 \bar{c}_1 から \bar{c}_j へ至る最短有向パスが \bar{P}_1 から \bar{P}'
へ変化したわけであるから、 $\bar{G}(\mathbf{M}')$ 上の枝長を $\bar{l}'(\cdot, \cdot)$ で、
 $\Omega(\mathbf{M}')$ の枝 $e = (v_i, v_j)$ に対する $\bar{l}(v_i, v_j)$ の値
を $\bar{l}'(v_i, v_j)$ で表すと、

$$\begin{aligned} \bar{l}(\bar{c}_p, \bar{c}_j) &> \bar{l}'(\bar{c}_p, \bar{c}_j) \\ &= \bar{l}(v_p, v_r) \end{aligned}$$

が成立する。従って、

$$\begin{aligned} \bar{l}(\bar{c}_p, \bar{c}_j) &> \bar{l}'(v_p, v_r) \\ &= d(c_p, v_p) + l(v_p, v_r) - d(c_j, v_r) \\ &\geq d(c_p, v_r) - d(c_j, v_r) \end{aligned}$$

が成立する。従って、

$$\begin{aligned} \bar{d}(\bar{P}) &= \bar{d}(\bar{P}_1) + \bar{d}(\bar{P}_2) \\ &= \bar{d}(\bar{P}_1) + \sum_{q=j}^{r-1} \bar{l}(\bar{c}_q, \bar{c}_{q+1}) \\ &= \bar{d}(\bar{P}_1) + \{d(c_j, v_r) - d(c_r, v_r)\} \\ &> \bar{d}'(\bar{P}') + \{d(c_j, v_r) - d(c_r, v_r)\} \\ &= \bar{d}'(\bar{P}_3) + \bar{l}'(\bar{c}_p, \bar{c}_j) \\ &\quad + \{d(c_j, v_r) - d(c_r, v_r)\} \\ &> \bar{d}(\bar{P}_3) + \{d(c_p, v_r) - d(c_j, v_r)\} \\ &\quad + \{d(c_j, v_r) - d(c_r, v_r)\} \\ &= \bar{d}(\bar{P}_3) + \{d(c_p, v_r) - d(c_r, v_r)\} \end{aligned}$$

となり、 $\bar{G}(\mathbf{M})$ における \bar{c}_p から \bar{c}_r へ至る最短有向
パスを \bar{P}_4 とすると、補題 1 より、

$$\begin{aligned} \bar{d}(\bar{P}) &> \bar{d}(\bar{P}_3) + \{d(c_p, v_r) - d(c_r, v_r)\} \\ &\geq \bar{d}(\bar{P}_3) + \bar{d}(\bar{P}_4) \end{aligned}$$

となるから、 \bar{c}_1 から \bar{c}_r へ至る \bar{P} より短いパスが
 $\bar{G}(\mathbf{M})$ に存在することにより、矛盾が導かれる。□

以上の補題から、次のことがわかる。すなわち、勢
力圏図 \mathbf{M} の随伴グラフ $\bar{G}(\mathbf{M})$ が負の閉路をもたない
とき、ある勢力圏 T_j および T_i の要素数がそれぞれ 1
だけ少ないおよび多いような勢力圏図を \mathbf{M} から作る
際、 T_j の母点以外の点 v_j を T_i に移動して得られる

M' より、 $\bar{G}(M)$ 上の \bar{c}_j から \bar{c}_i へ至る最短有向パス \bar{P} に関する更新操作を行って得られる勢力圏図 $M[\bar{P}]$ の方が $F(M)$ の値が小さく、

$$F(M[\bar{P}]) = F(M) + \bar{d}(\bar{P}) \leq F(M')$$

が成立し、 $M[\bar{P}]$ と M' の対応する勢力圏の要素数は相等しい。

また、補題 2 の証明の後半にあるように最短有向パスに関する更新操作を行っているときには、途中で最短有向パス \bar{P} の部分パスの長さが短くなることはない。

更に、随伴グラフ $\bar{G}(M)$ 上の初等的な有向閉路 \bar{Q} が、 $|T_r| > 1$ なる勢力圏に対応する点 \bar{c}_r を少なくとも一つ含むならば、 \bar{Q} をこの \bar{c}_r を始点かつ終点とする有向パスと見ることができる。従って、このパス \bar{Q} に関する更新操作を行って得られる勢力圏図を $M[\bar{Q}]$ と書くと、 $M[\bar{Q}]$ の各勢力圏の要素数は M の対応する勢力圏のものと同じであり、補題 2 より、

$$F(M[\bar{Q}]) \leq F(M) + \bar{d}(\bar{Q}) \quad (12)$$

が成立する。ここで、 $\bar{d}(\bar{Q})$ は \bar{Q} の長さである。

3. 最適勢力圏図から最適点数充足勢力圏図に変換

ここでは、ある勢力圏図 M を、その随伴グラフ $\bar{G}(M)$ 上の最短有向パス \bar{P} を用いて、各勢力圏の要素数が与えられた制約を満たす点数充足勢力圏図 $M[\bar{P}]$ に変換するアルゴリズムについて考える。そのためには、まず点数充足勢力圏図とそれに関する随伴グラフの性質を調べる。

与えられた勢内圏図 $M = \{T_i\}$ と各 T_i に対する点数制約の範囲 $[L_i, N_i]$ に対して、以下のような $\bar{G}(M)$ の点の集合を定義する。

$$\bar{C}_{mr} = \{\bar{c}_i | L_i < |T_i|\}$$

$$\bar{C}_{ex} = \{\bar{c}_i | N_i < |T_i|\}$$

$$\bar{C}_{ls} = \{\bar{c}_i | |T_i| < N_i\}$$

$$\bar{C}_{st} = \{\bar{c}_i | |T_i| < L_i\}$$

明らかに、 $\bar{C}_{ex} \subseteq \bar{C}_{mr}$ および $\bar{C}_{st} \subseteq \bar{C}_{ls}$ であり、 $\bar{C}_{ex} = \bar{C}_{st} = \emptyset$ であれば勢力圏図 M は点数充足勢力圏図である。また、 \bar{C}_{mr} および \bar{C}_{ls} の点 \bar{c}_j および \bar{c}_i に対応した M の勢力圏 T_j および T_i は、それぞれ要素数を一つ減少および増加させても点数の制約に違反しない集合である。

[定理 1] 点数充足勢力圏図 $M = \{T_i | L_i \leq |T_i| \leq N_i, i = 1, 2, \dots, k\}$ の随伴グラフ $\bar{G}(M)$ が、 $\bar{d}(\bar{Q}) < 0$ であるような有向閉路 \bar{Q} 、あるいは \bar{C}_{ls} の点 \bar{c}_1 から \bar{C}_{mr} の

点 \bar{c}_j へ至る $\bar{d}(\bar{P}) < 0$ であるような有向パス \bar{P} のいずれももたないときかつそのときに限り、 M は最適点数充足勢力圏図である。

(証明) 十分性：最適点数充足勢力圏図 $M = \{T_i\}$ の随伴グラフ $\bar{G}(M)$ が $\bar{d}(\bar{Q}) < 0$ なる有向閉路 \bar{Q} をもつとする。このとき、 \bar{Q} が母点のみから成る勢力圏に対応した点だけから成るとすると、ネットワーク N の枝長が非負であることに矛盾する。従って、 \bar{Q} は $|T_i| > 1$ なる T_i に対応する点 \bar{c}_i を含むから、この \bar{Q} に関する勢力圏更新操作を行なうと、 $F(M[\bar{Q}]) \leq F(M) + \bar{d}(\bar{Q}) < F(M)$ となり、 M が最適点数充足勢力圏図であることに反する。同様に、点 $\bar{c}_i \in \bar{C}_{ls}$ から点 $\bar{c}_j \in \bar{C}_{mr}$ へ至る $\bar{d}(\bar{P}) < 0$ なる有向パス \bar{P} が存在した場合にも、矛盾が導ける。

必要性：点数充足勢力圏図 M が定理の条件を満足しているとし、同じ要素数の制約を満たす任意の点数充足勢力圏図 $M^* = \{T^*_i | L_i \leq |T^*_i| \leq N_i, i = 1, 2, \dots, k\}$ を考える。今、 M と M^* とでは異なる勢力圏 $T_i \in M$, $T^*_i \in M^*(i \neq j)$ に含まれるような点の集合を Ψ とし、 Ψ の各点 v_x に注目し、 \bar{c}_j から \bar{c}_i へ至る $\bar{G}(M)$ 上の最短有向パスを \bar{P}_x とすると、補題 1 より、

$$F(M^*) = F(M) + \sum_{v_x \in \Psi} (d(c_j, v_x) - d(c_i, v_x)) \\ \geq F(M) + \sum_{v_x \in \Psi} \bar{d}(\bar{P}_x) \quad (13)$$

が成立する。そこで、 $\bar{G}(M)$ 上のこのようなパス \bar{P}_x の枝すべてから成る多重グラフ \bar{H} を考えると、 \bar{H} の枝の枝長の総和は式(13)の右辺第 2 項に等しい。更に、 $|T_i| = L_i$ なる勢内圏 T_i に対して、 $|T_i| \leq |T^*_i|$ が成り立つから、 T_i に対応した $\bar{G}(M)$ の点 \bar{c}_i を始点とする \bar{P}_x の個数は \bar{c}_i を終点とするそれより少くはない。それゆえ、 \bar{H} においてこのような点 \bar{c}_i の入次数と出次数との関係は、(入次数) \leq (出次数) である。従って、(入次数) $>$ (出次数) となる点 \bar{c}_j は $L_j < |T_j|$ なる勢力圏に対応した点、すなわち \bar{C}_{mr} に含まれる点である。同様に、 \bar{H} において (出次数) $>$ (入次数) となる点 \bar{c}_i は \bar{C}_{ls} に含まれる点であることがわかる。従って、この多重グラフ \bar{H} は \bar{C}_{ls} の点から、 \bar{C}_{mr} の点へ至る初等的な有向パス \bar{P} の集合 \emptyset と初等的な有向閉路 \bar{Q} の集合 \mathcal{L} に分解できるから、

$$\sum_{v_x \in \Psi} \bar{d}(\bar{P}_x) = \sum_{P \in \emptyset} \bar{d}(\bar{P}) + \sum_{Q \in \mathcal{L}} \bar{d}(\bar{Q}) \geq 0$$

が成立する。従って、式(13)より任意の M^* に対して、 $F(M^*) \geq F(M)$

が成り立つから、 M は最適点数充足勢力圏図である。□

次に、枝 $(v_i, v_j) \in \omega(T_i, T_j)$ に対して定義される値 $\bar{l}(v_i, v_j)$ が、更新操作によってどのように変化するかを調べる。そこで、勢力圏図 M において、 $\bar{G}(M)$ のある最短有向パス \bar{P} に関する更新操作によって得られる勢力圏図を $M' = M[\bar{P}] = \{T'_i\}$ とし、 M' における $\bar{l}(v_i, v_j)$ を M におけるものと区別するため、 $\bar{l}'(v_i, v_j)$ と表す。

[補題3] $\bar{G}(M)$ の最短有向パス \bar{P} に関する更新操作において、 \bar{P} 上の点 \bar{c}_i から点 \bar{c}_j へ至る部分パス \bar{P}_{ij} および点 \bar{c}_p から点 \bar{c}_q へ至る部分パス \bar{P}_{pq} に関する更新操作により、それぞれ点 v_x が T_j から T_i へ、点 v_r が T_q から T_p へ移動したとする。すなわち、 $v_x \in T_j \cap T'_i$, $v_r \in T_q \cap T'_p$ である。また、 T_i , T_j , および T_p において移動しなかった点をそれぞれ $v_i \in T_i \cap T'_i$, $v_j \in T_j \cap T'_j$, および $v_p \in T_p \cap T'_p$ と表す。このとき、以下の命題が成り立つ。

(ア) 枝 $(v_i, v_j) \in \omega(T_i, T_j)$ の両端点が更新操作によって移動しなかったとき、次式が成立する。

$$\bar{l}'(v_i, v_j) \geq \bar{l}'(\bar{c}_i, \bar{c}_j)$$

(イ) 枝の一つの端点だけが移動したとき、すなわち、枝 $(v_x, v_j) \in \omega(T'_i, T'_j)$, $(v_x, v_p) \in \omega(T'_i, T'_p)$ に対して、以下の式が成立する。

$$\bar{l}'(v_x, v_j) \geq \bar{d}(\bar{P}_{ij}) \quad (14)$$

$$\bar{l}'(v_x, v_p) \geq \bar{d}(\bar{P}_{ij}) + \bar{l}(\bar{c}_j, \bar{c}_p) \quad (15)$$

$$\bar{l}'(v_p, v_x) \geq \bar{l}(\bar{c}_p, \bar{c}_j) - \bar{d}(\bar{P}_{ij}) \quad (16)$$

$$\bar{l}'(v_j, v_x) \geq -\bar{d}(\bar{P}_{ij}) \quad (17)$$

(ウ) 枝の両端点が移動したとき、すなわち、枝 $(v_x, v_r) \in \omega(T'_i, T'_p)$ に対して、以下の式が成立する。

$$\bar{l}'(v_r, v_x) \geq \bar{d}(\bar{P}_{pq}) + \bar{l}(\bar{c}_q, \bar{c}_j) - \bar{d}(\bar{P}_{ij}) \quad (18)$$

$$\bar{l}'(v_x, v_r) \geq \bar{d}(\bar{P}_{ij}) + \bar{l}(\bar{c}_j, \bar{c}_q) - \bar{d}(\bar{P}_{pq}) \quad (19)$$

(証明) 補題2より、以下の式が成立することがわかる。

$$d(c_i, v_x) - d(c_j, v_x) = \bar{d}(\bar{P}_{ij}) \quad (20)$$

$$d(c_p, v_r) - d(c_q, v_r) = \bar{d}(\bar{P}_{pq}) \quad (21)$$

(ア) 定義式より、明らかである。

(イ-1) 式(14)の証明。三角不等式 $d(c_j, v_x) + l(v_x, v_j) \geq d(c_i, v_j)$ に注意すれば、

$$\begin{aligned} \bar{l}'(v_x, v_j) &= d(c_i, v_x) + l(v_x, v_j) - d(c_i, v_j) \\ &\geq d(c_i, v_x) - d(c_j, v_x) \\ &= \bar{d}(\bar{P}_{ij}) \end{aligned} \quad (\text{式(20)より})$$

(イ-2) 式(15)の証明。

$$\begin{aligned} \bar{l}'(v_x, v_p) &= d(c_i, v_x) + l(v_x, v_p) - d(c_i, v_p) \\ &= \bar{d}(\bar{P}_{ij}) + d(c_i, v_x) \\ &\quad + l(v_x, v_p) - d(c_i, v_p) \end{aligned}$$

$$= \bar{d}(\bar{P}_{ij}) + \bar{l}(v_x, v_p)$$

$$\geq \bar{d}(\bar{P}_{ij}) + \bar{l}(\bar{c}_j, \bar{c}_p)$$

(イ-3) 式(16)の証明。

$$\begin{aligned} \bar{l}'(v_p, v_x) &= d(c_p, v_p) + l(v_p, v_x) - d(c_j, v_x) \\ &= d(c_p, v_p) + l(v_p, v_x) - d(c_j, v_x) \\ &\quad - \{d(c_i, v_x) - d(c_j, v_x)\} \\ &= d(c_p, v_p) + l(v_p, v_x) - d(c_j, v_x) - \bar{d}(\bar{P}_{ij}) \\ &= \bar{l}(v_p, v_x) - \bar{d}(\bar{P}_{ij}) \end{aligned}$$

(式(20)より)

$$\geq \bar{l}(\bar{c}_p, \bar{c}_j) - \bar{d}(\bar{P}_{ij})$$

(イ-4) 式(17)の証明。

$$\begin{aligned} \bar{l}'(v_j, v_x) &= d(c_j, v_j) + l(v_j, v_x) - d(c_i, v_x) \\ &\geq d(c_j, v_x) - d(c_i, v_x) \quad (\text{三角不等式より}) \\ &= -\bar{d}(\bar{P}_{ij}) \end{aligned} \quad (\text{式(20)より})$$

(ウ-1) 式(18)の証明。

$$\begin{aligned} \bar{l}'(v_r, v_x) &\geq d(c_p, v_r) + l(v_r, v_x) - d(c_i, v_x) \\ &= \bar{d}(\bar{P}_{pq}) + d(c_q, v_r) + l(v_r, v_x) \\ &\quad - \{d(c_j, v_x) + \bar{d}(\bar{P}_{ij})\} \end{aligned}$$

(式(20)および式(21)より)

$$\begin{aligned} &= \{d(c_q, v_r) + l(v_r, v_x) - d(c_j, v_x)\} \\ &\quad + \bar{d}(\bar{P}_{pq}) - \bar{d}(\bar{P}_{ij}) \\ &= \bar{l}(v_r, v_x) + \bar{d}(\bar{P}_{pq}) - \bar{d}(\bar{P}_{ij}) \\ &\geq \bar{l}(\bar{c}_p, \bar{c}_q) + \bar{d}(\bar{P}_{pq}) - \bar{d}(\bar{P}_{ij}) \end{aligned}$$

(ウ-2) 式(19)の証明。(ウ-1)と同様。□

以下では、 $\bar{G}(M')$ における枝 (\bar{c}_i, \bar{c}_j) および有向パス \bar{P} の長さを $\bar{G}(M)$ におけるものと区別するため、それぞれダッシュを付け、 $\bar{l}'(\bar{c}_i, c_j)$ および $\bar{d}'(\bar{P})$ と表す。また、 \bar{C}_{mr} や \bar{C}_{ls} なども \bar{C}'_{mr} や \bar{C}'_{ls} などと表す。

[定理2a] $M = \{T_i\}$ を各勢力圏 T_i の要素数が $L_i \leq |T_i| \leq N_i$ を満たす最適点数充足勢力圏図とし、 M に関する随伴グラフ $\bar{G}(M)$ において、 \bar{P}_0 を $L_s = |T_s| \leq N_s$ なる勢力圏 T_s に対応する点 \bar{c}_s から \bar{C}_{mr} の点 \bar{c}_j へ至る有向パスの中で最短のものとする。このとき、 \bar{P}_0 に関する更新操作によって得られる勢力圏図 $M[\bar{P}_0] = M' = \{T'_i\}$ は、勢力圏 T_s の要素数が $L_s + 1 = |T'_s| \leq \max\{N_s, |T_s| + 1\}$ を、その他の勢力圏の要素数が $L_i \leq |T'_i| \leq N_i$ を満足するような最適点数充足勢力圏図である。

(証明) 定理1により、 M' の随伴グラフ $\bar{G}(M')$ に長さが負の有向閉路、または \bar{C}_{ls} の点から \bar{C}'_{mr} の点へ至る長さが負の有向パスが存在しないことを示せば良い。

まず、 $\bar{G}(M')$ が初等的な負長の有向閉路 \bar{Q}' をもつ

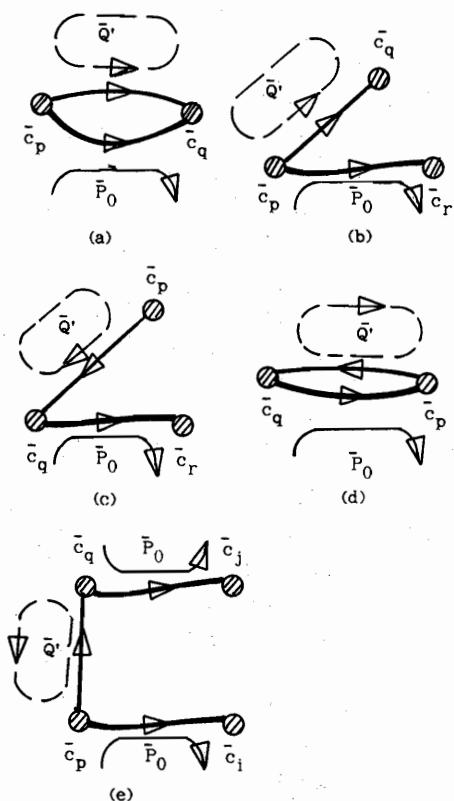


図3 定理2aの証明のための説明図(1)

Fig. 3 Illustration (1) for the proof of Theorem 2a.

と仮定して矛盾を導く。そこで以下では $\bar{G}(M)$ の最短路 \bar{P}_0 と \bar{Q}' の枝とから成る多重グラフ \bar{H} を考え、これを変形することにより、点 \bar{c}_s から点 \bar{c}_t への初等的パス \bar{P} を含み、

$$\bar{d}(\bar{P}_0) + \bar{d}(\bar{Q}') \geq \bar{d}(\bar{H}^*)$$

$$= \bar{d}(\bar{P}) + \bar{d}(\bar{H}^* - \bar{P})$$

を満足する多重グラフ \bar{H}^* が作れるることを示す。ここで、 $\bar{d}(\bar{H}^*)$ および $\bar{d}(\bar{H}^* - \bar{P})$ は、それぞれ \bar{H}^* に含まれる枝および \bar{H}^* の \bar{P} に属さない枝の $\bar{G}(M)$ 上での長さの総和であり、 $\bar{H}^* - \bar{P}$ は随伴グラフ上の有向閉路の集合となっている。これが証明されると、 M は最適勢力圈図であったから定理1より $\bar{d}(\bar{H}^* - \bar{P}) \geq 0$ であり、かつ $\bar{d}(\bar{Q}') < 0$ であるから、

$$\bar{d}(\bar{P}_0) \geq \bar{d}(\bar{P}) + \bar{d}(\bar{H}^* - \bar{P}) - \bar{d}(\bar{Q}') > \bar{d}(\bar{P})$$

となり、 \bar{P}_0 の定義に矛盾することが導ける。

そこで、 \bar{Q}' の枝(\bar{c}_p, \bar{c}_q)の中で、 $\bar{l}'(\bar{c}_p, c_q) < \bar{l}(\bar{c}_p, c_q)$ となっている枝および $\bar{G}(M)$ において新たに生じた枝の集合を \bar{H}_s, \bar{H}_s 以外の枝と \bar{P}_0 の枝からなる集合を \bar{H}_e とすると、

$$\bar{d}(\bar{P}_0) + \bar{d}'(\bar{Q}') \geq \bar{d}(\bar{H}_e) + \bar{d}'(\bar{H}_s)$$

が成立し、 \bar{H}_s に含まれる枝は、補題3の(イ)あるいは(ウ)によって生じることがわかる。

(イ-1) 式(14)が成立するとき：ある点 v_x が勢力圏 T_q から T_p に移動されたとし(図3(a)参照)、 \bar{P}_0 上の点 \bar{c}_p から点 \bar{c}_q へ至る部分パスを \bar{P}_{pq} とすると、式(14)より、

$$\bar{l}'(\bar{c}_p, \bar{c}_q) = l'(v_p, v_x) \geq \bar{d}(\bar{P}_{pq})$$

が成立する。そこで、 \bar{H}_s から枝(\bar{c}_p, \bar{c}_q)を除去し、代わりにパス \bar{P}_{pq} 上の枝を \bar{H}_e に挿入してできる集合をそれぞれ \bar{H}_s^1 および \bar{H}_e^1 とする。これらの \bar{H}_s^1 および \bar{H}_e^1 から成る多重グラフを \bar{H}^1 とすると、 \bar{H}^1 には \bar{c}_s から \bar{c}_t に至る有向パスが存在し、

$$\bar{d}(\bar{H}_e) + \bar{d}'(\bar{H}_s) \geq \bar{d}(\bar{H}_e^1) + \bar{d}'(\bar{H}_s^1)$$

が成立する。

(イ-2) 式(15)が成立するとき：ある点 v_x が勢力圏 T_q 以外の T_r から T_p に移動されたとし(図3(b)参照)、 \bar{P}_0 上の点 \bar{c}_p から点 \bar{c}_r へ至る部分パスを \bar{P}_{pr} とすると、式(15)より、

$$\bar{l}'(\bar{c}_p, \bar{c}_q) = l'(v_x, v_q)$$

$$\geq \bar{l}(\bar{c}_r, \bar{c}_q) + \bar{d}(\bar{P}_{pr})$$

が成立する。そこで、 \bar{H}_s から枝(\bar{c}_p, \bar{c}_q)を除去し、代わりに長さが $\bar{l}(\bar{c}_r, \bar{c}_q)$ の枝(\bar{c}_r, \bar{c}_q)およびパス \bar{P}_{pr} 上の枝を \bar{H}_e に挿入してできる集合をそれぞれ \bar{H}_s^2 および \bar{H}_e^2 とする。これらの \bar{H}_s^2 および \bar{H}_e^2 から成る多重グラフを \bar{H}^2 とすると、 \bar{H}^2 には \bar{c}_s から \bar{c}_t に至る有向パスが存在し、

$$\bar{d}(\bar{H}_e) + \bar{d}'(\bar{H}_s) \geq \bar{d}(\bar{H}_e^2) + \bar{d}'(\bar{H}_s^2)$$

が成立する。

(イ-3) 式(16)が成立するとき：ある点 v_x が勢力圏 T_p 以外の T_r から T_q に移動されたとし(図3(c)参照)、 \bar{P}_0 上の点 \bar{c}_q から点 \bar{c}_r へ至る部分パスを \bar{P}_{qr} とすると、式(16)より、

$$\bar{l}'(\bar{c}_p, \bar{c}_q) = \bar{l}'(v_p, v_x)$$

$$\geq \bar{l}(\bar{c}_p, \bar{c}_r) + \bar{d}(\bar{P}_{qr})$$

が成立する。そこで、 \bar{H}_s および \bar{H}_e からそれぞれ枝(\bar{c}_p, \bar{c}_q)およびパス \bar{P}_{qr} 上の枝を除去し、代わりに長さが $\bar{l}(\bar{c}_p, \bar{c}_r)$ の枝(\bar{c}_p, \bar{c}_r)を \bar{H}_e に挿入してできる集合をそれぞれ \bar{H}_s^3 および \bar{H}_e^3 とする。これらの \bar{H}_s^3 および \bar{H}_e^3 から成る多重グラフを \bar{H}^3 とすると、 \bar{H}^3 には \bar{c}_s から \bar{c}_t に至る有向パスが存在し、

$$\bar{d}(\bar{H}_e) + \bar{d}'(\bar{H}_s) \geq \bar{d}(\bar{H}_e^3) + \bar{d}'(\bar{H}_s^3)$$

が成立する。

(イ-4) 式(17)が成立するとき：ある点 v_x が勢力

圏 T_p から T_q に移動されたとし(図 3 (d)参照), \bar{P}_0 上の点 \bar{c}_q から点 \bar{c}_p へ至る部分パス \bar{P}_{qp} をとすると, 式(17)より,

$$\begin{aligned}\bar{l}'(\bar{c}_p, \bar{c}_q) &= \bar{l}'(v_p, v_x) \\ &\geq -\bar{d}(\bar{P}_{qp})\end{aligned}$$

が成り立つ。そこで, \bar{H}_s および \bar{H}_e からそれぞれ枝 (\bar{c}_p, \bar{c}_q) およびパス \bar{P}_{qp} 上の枝を除去してできる集合をそれぞれ \bar{H}_s^4 および \bar{H}_e^4 とする。これらの H_s^4 および H_e^4 から成る多重グラフを \bar{H}^4 とすると, \bar{H}^4 には \bar{c}_s から \bar{c}_t に至る有効パスが存在し,

$$\bar{d}(\bar{H}_e) + \bar{d}'(\bar{H}_s) \geq \bar{d}(\bar{H}_e^4) + \bar{d}'(\bar{H}_s^4)$$

が成立する。

(ウ-1) 式(18)が成立するとき: ある点 v_r が勢力圏 T_p から T_i に, ある点 v_x が勢力圏 T_q から T_j に移動されたとし(図 3 (e)参照), \bar{P}_0 上の点 \bar{c}_p から点 \bar{c}_i へ至る部分パスおよび点 \bar{c}_q から点 \bar{c}_j へ至る部分パスをそれぞれ \bar{P}_{pi} および \bar{P}_{qj} とすると, 式(18)より,

$$\begin{aligned}\bar{l}'(\bar{c}_p, \bar{c}_q) &= \bar{l}'(v_r, v_x) \\ &\geq \bar{d}(\bar{P}_{pi}) + l(\bar{c}_i, \bar{c}_j) - \bar{d}(\bar{P}_{qj})\end{aligned}$$

が成立する。そこで, \bar{H}_s および \bar{H}_e からそれぞれ枝 (\bar{c}_p, \bar{c}_q) およびパス \bar{P}_{qj} 上の枝を除去し, 代わりにパス \bar{P}_{pi} 上の枝および枝 (\bar{c}_i, \bar{c}_j) を \bar{H}_e に挿入してできる集合をそれぞれ H_s^5 および H_e^5 とする。これらの \bar{H}_s^5 および \bar{H}_e^5 から成る多重グラフを \bar{H}^5 とすると, \bar{H}^5 には \bar{c}_s から \bar{c}_t に至る有向パスが存在し,

$$\bar{d}(\bar{H}_e) + \bar{d}'(\bar{H}_s) \geq \bar{d}(\bar{H}_e^5) + \bar{d}'(\bar{H}_s^5)$$

(ウ-2) 式(19)が成立するときも同様に証明できる。

以上の操作を必要なだけ繰り返すことにより, \bar{H}_s を空集合にできるから, \bar{c}_s から \bar{c}_t に至る有向パス \bar{P} といくつかの有向パス閉路とから成る多重グラフ \bar{H}^* が得られる。

次に, $\bar{G}(M')$ が \bar{C}'_{ls} の点から \bar{C}'_{mr} の点へ至る負の長さの有向パス \bar{P}' をもつと仮定して矛盾を導く。そのため, $\bar{G}(M)$ の最短路 \bar{P}_0 と \bar{P}' の枝とから成る多重グラフ \bar{H} を考えると, \bar{H} は連結であるから, \bar{P}_0 の始点 \bar{c}_s から \bar{P}' の終点 \bar{c}_t への初等的パス \bar{P}_1 , および, \bar{P}' の始点 \bar{c}_i から \bar{P}_0 の終点 \bar{c}_j への初等的パス \bar{P}_2 を含む(図 4 参照)。従って, 閉路の場合と同様の変換操作により, このような有向パス \bar{P}_1 および \bar{P}_2 を確保しつつ, \bar{H} の枝で $\bar{l}'(\cdot, \cdot) < \bar{l}(\cdot, \cdot)$ なるものを取り除くことができる。すなわち, 有向パス \bar{P}_1 および \bar{P}_2 といくつかの閉路の集合 $\bar{H}^* - \bar{P}_1 - \bar{P}_2$ から成る多重グラフ \bar{H}^* で,

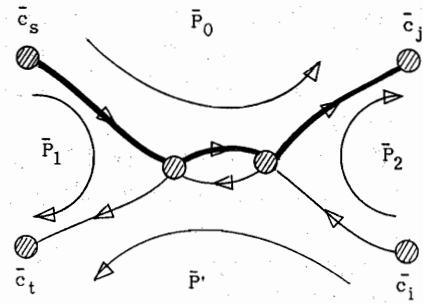


図 4 定理 2a の証明のための説明図(2)
Fig. 4 Illustration (2) for the proof of Theorem 2a.

$$\bar{d}(\bar{P}_0) + \bar{d}'(\bar{P}') \geq \bar{d}(\bar{H}^*)$$

$$= \bar{d}(\bar{P}_1) + \bar{d}(\bar{P}_2) + \bar{d}(\bar{H}^* - \bar{P}_1 - \bar{P}_2)$$

を満足するものが作れる。そこで, $\bar{d}(\bar{P}_2) \geq 0$ だとすると, $\bar{d}(\bar{H}^* - \bar{P}_1 - \bar{P}_2) \geq 0$ であるから,

$$\begin{aligned}\bar{d}(\bar{P}_0) &\geq \bar{d}(\bar{P}_1) + \bar{d}(\bar{P}_2) + \bar{d}(\bar{H}^* - \bar{P}_1 - \bar{P}_2) - \bar{d}'(\bar{P}') \\ &> \bar{d}(\bar{P}_1)\end{aligned}$$

が成立する。従って, \bar{P}' の終点 $\bar{c}_t \in \bar{C}'_{mr}$ は \bar{C}_{mr} にも含まれているから, \bar{P}_1 は点 \bar{c}_s から \bar{C}_{mr} の点に至る \bar{P}_0 より短い有向パスとなり, \bar{P}_0 の定義に反する。

そこで, $\bar{d}(\bar{P}_2) \geq 0$ を示す。 \bar{P}' の始点 $\bar{c}_i \in \bar{C}'_{ls}$ は $\bar{c}_i \in \bar{C}_{mr}$ に等しいかあるいは \bar{C}_{ls} の点であるから, 今, $\bar{c}_i = \bar{c}_t$ とすると, \bar{P}_2 は閉路となり, 最適勢力圏図 M の(M)は定理 1 より負の長さの閉路をもたないから, $\bar{d}(\bar{P}_2) \geq 0$ である。また, \bar{c}_i が \bar{C}_{ls} の点であるとすると, \bar{P}_2 は \bar{C}_{ls} の点から \bar{C}_{mr} の点への有向パスであるから, 同様に定理 1 より $\bar{d}(\bar{P}_2) \geq 0$ である。□

次の定理も同様に証明できる。

[定理 2b] $M = \{T_i\}$ を各勢力圏 T_i の要素数が $L_i \leq |T_i| \leq N_i$ を満たす最適点数充足勢力圏図とし, M に関する随伴グラフ $\bar{G}(M)$ において, \bar{P}_0 を \bar{C}_{ls} の点 \bar{c}_j から $L_i \leq |T_i| = N_i$ なる勢力圏 T_i に対応する点 \bar{c}_t へ至る有向パスの中で最短のものとする。このとき, \bar{P}_0 に関する更新操作によって得られる勢力圏図 $M[\bar{P}_0] = M' = \{T'_i\}$ は, 勢力圏 T_i の要素数が $\min\{L_i, |T_i| - 1\} = |T'_i| \leq N_i - 1$ を, その他の勢力圏の要素数が $L_i \leq |T'_i| \leq N_i$ を満足する最適点数充足勢力圏図である。

以上の定理を用いれば, 最適点数充足勢力圏図を見出す次のような手順が考えられる。

まず, 各点に対して, その点から最も近い母点を求め, それをその母点の勢力圏に含めるというやり方で勢力圏図 $M^0 = \{T_i^0\}$ を見出す。最短の母点がいくつある場合には, その中の一つを任意に選ぶ。こうして得られた M^0 は, 各 T_i^0 が $1 \leq |T_i^0| \leq |V| - k + 1$ を満たす

す点数充足勢力圏図になっている。更に、各母点を出发点とするダイクストラ法^{(7),(8)}などの最短路を求めるアルゴリズムにより、各点に最も近い母点を見出すことは容易である。

次に、 M_{st}^0 および M_{ex}^0 をそれぞれ要素数が指定された数 L_i より少ないおよび N_i より多い勢力圏の集合、すなわち、

$$M_{st}^0 = \{T_i^0 \in M^0 \mid |T_i^0| < L_i\}$$

$$M_{ex}^0 = \{T_i^0 \in M^0 \mid N_i < |T_i^0|\}$$

とする。このとき、各 $T_i^0 \in M_{st}^0$ および各 $T_j^0 \in M_{ex}^0$ に対して、それぞれ $L_i^0 = |T_i^0|$ やび $N_j^0 = |T_j^0|$ とすると、 $M^0 = \{T_i^0\}$ は各勢力圏 $T_i^0 \in M^0$ が

$$L_i^0 = |T_i^0| < N_i \quad ; \quad T_i^0 \in M_{st}^0$$

$$L_i^0 < |T_i^0| = N_i^0 \quad ; \quad T_i^0 \in M_{ex}^0$$

$$L_i^0 \leq |T_i^0| \leq N_i \quad ; \quad T_i^0 \in M_{st}^0 \cup M_{ex}^0$$

を満足する最適点数充足勢力圏図になっていると考えられる。従って、定理 2a あるいは 2b を用いて M^0 を更新し、 $M^1 = \{T_i^1\}$ を作れば、この M^1 は、 $T_s^0 \in M_{st}^0$ あるいは $T_t^0 \in M_{ex}^0$ がそれぞれ

$$L_s^0 + 1 = |T_s^0| \leq N_s,$$

あるいは

$$L_t^0 \leq |T_t^0| = N_t^0 - 1$$

を満足し、他の勢力圏 T_i^1 が M^0 の場合と同じ制約の範囲を満足する最適点数充足勢力圏図となっている。そこで、 M_{st}^0 および M_{ex}^0 と同様に、 M^1 において M_{st}^1 および M_{ex}^1 を定義し、このような操作を繰り返せば、最終的に勢力圏の集合 M_{st}^h および M_{ex}^h を空集合にすることができ、求める最適点数充足勢力圏図を見出すことができる。

4. アルゴリズム

上に述べたように、定理 2a あるいは 2b を用いて最適勢力圏図 M^h を変更する際、与えられたネットワーク N の枝長 l が非負であっても、随伴グラフ $\bar{G}(M^h)$ では重み \bar{l} が負の枝をもつこともある。従って、 $\bar{G}(M^h)$ において最短路を見つける際にダイクストラ法を用いることができない。しかし、定理 1 に示すように、 $\bar{G}(M^h)$ には負の長さの有向閉路は存在しないので、ネットワークの最小コストフローの算法等^{(6),(8)}でよく行われるように、点集合 $\{\bar{c}_i\}$ を定義域とする実数値関数 π を導入し、随伴グラフ $\bar{G}(M^h)$ の各枝 (\bar{c}_u, \bar{c}_v) の重み $\bar{l}(\bar{c}_u, \bar{c}_v)$ を非負の枝長

$$\bar{l}(\bar{c}_u, \bar{c}_v) = \bar{l}(\bar{c}_u, \bar{c}_v) + \pi(\bar{c}_u) - \pi(\bar{c}_v) \quad (22)$$

に変換することにする。この変換によって、閉路の長

さは変化せず、点 \bar{c}_s から点 \bar{c}_t に至るパス \bar{P} の長さ $\bar{d}(\bar{P})$ は、 $\bar{d}(\bar{P}) = \pi(\bar{c}_s) - \pi(\bar{c}_t)$ に変化し、 $\pi(\bar{c}_s) = 0$ の場合には、 $\bar{d}(\bar{P}) = \bar{l}(\bar{P}) - \pi(\bar{c}_t)$ となる。従って、 \bar{P} の実際の長さ $\bar{d}(\bar{P})$ は $\bar{l}(\bar{P}) + \pi(\bar{c}_t)$ によって与えられる。

以下に、最適勢力圏図の各勢力圏の要素数を更新することにより最適点数充足勢力圏図を見出す手続きを示す。なお、以下では、各点 v_j が属する勢力圏 T_j の母点 c_j を $c(v_j)$ と表す。

[アルゴリズム]

(I-2) 各点を最も近い母点を含めるという方法で得られる最適勢力圏図を $M = \{T_i\}$ とし、各点 v_j に対して、 $c(v_j)$ および $d(c(v_j), v_j)$ を記憶しておく。定義より明らかのように、各枝 $(v_i, v_j) \in \omega(T_i, T_j)$ に対して、 $\bar{l}(c_i, v_j) \geq 0$ であるから、 M の随伴グラフ $\bar{G}(M)$ の各枝 (\bar{c}_i, \bar{c}_j) の長さ $\bar{l}(\bar{c}_i, \bar{c}_j)$ は非負となる。 $\bar{G}(M)$ のすべての点 \bar{c}_i に対して、 $\pi(\bar{c}_i) \leftarrow 0$ 。

(II-1) 勢力圏図 M の随伴グラフ $\bar{G}(M)$ を生成し、各枝 (\bar{c}_i, \bar{c}_j) の長さ $\bar{l}(\bar{c}_i, \bar{c}_j)$ を、

$$\bar{l}(\bar{c}_i, \bar{c}_j) = \bar{l}(\bar{c}_i, \bar{c}_j) + \pi(\bar{c}_i) - \pi(\bar{c}_j)$$

とする。更に、 $\bar{G}(M)$ の点 \bar{c}_i を以下のように分類する。

$$\bar{C}_{ex} = \{\bar{c}_i \mid |T_i| > N_i\}$$

$$\bar{C}_{ls} = \{\bar{c}_i \mid |T_i| < N_i\}$$

(II-2) $\bar{C}_{ex} = \emptyset$ であれば、III-1へ行く。

(II-3) そうでなければ、ネットワーク $(\bar{G}(M), \bar{l})$ において、 \bar{C}_{ls} の点から各点 \bar{c}_i へ至る最短有向パスの長さ $\lambda(\bar{c}_i)$ を計算する。

(II-4) \bar{C}_{ex} の点の中で最小の $\lambda(\cdot) + \pi(\cdot)$ をもつ点を \bar{c}_r とし、 \bar{C}_{ls} の点から、 \bar{c}_r へ至る長さが $\lambda(\bar{c}_r)$ のパスを \bar{P} とする。

(II-5) \bar{P} に関して勢力圏図 M を更新し、

$$F(M) \leftarrow F(M) + \lambda(\bar{c}_r) + \pi(\bar{c}_r)$$

とする。更に、 $c(v_j)$ および $d(c(v_j), v_j)$ を更新する。

(II-6) $\bar{G}(M)$ の各点 \bar{c}_i に対して、

$$\pi(\bar{c}_i) \leftarrow \pi(\bar{c}_i) + \pi(\bar{c}_i)$$

として II-1 へ戻る。

(III-1) 勢力圏図 M の随伴グラフ $\bar{G}(M)$ を生成し、各枝 (\bar{c}_i, \bar{c}_j) の長さ $\bar{l}(\bar{c}_i, \bar{c}_j)$ を、

$$\bar{l}(\bar{c}_i, \bar{c}_j) = \bar{l}(\bar{c}_i, \bar{c}_j) + \pi(\bar{c}_i) - \pi(\bar{c}_j)$$

とする。更に、 $\bar{G}(M)$ の点 \bar{c}_i を以下のように分類する。

$$\bar{C}_{st} = \{\bar{c}_i \mid |T_i| < L_i\}$$

$$\bar{C}_{mr} = \{\bar{c}_i \mid |T_i| > L_i\}$$

(III-2) $\bar{C}_{st} = \phi$ であれば、勢力圏図 M は求める勢力圏図であるから終了。

(III-3) そうでなければ、ネットワーク $(\bar{G}(M), \bar{l})$ において、 \bar{C}_{st} の点から各点 \bar{c}_i へ至る最短有向パスの長さ $\lambda(\bar{c}_i)$ を計算する。

(III-4) \bar{C}_{mr} の点の中で最小の $\lambda(\cdot) + \pi(\cdot)$ をもつ点を \bar{c}_r とし、 \bar{C}_{st} の点から \bar{c}_r へ至る長さが $\lambda(\bar{c}_r)$ のパスを \bar{P} とする。

(III-5) \bar{P} に関して勢力圏図 M を更新し、

$$F(M) \leftarrow F(M) + \lambda(\bar{c}_r) + \pi(\bar{c}_r)$$

とする。更に、 $c(v_j)$ および $d(c(v_j), v_j)$ を更新する。

(III-6) $\bar{G}(M)$ の各点 \bar{c}_i に対して、

$$\pi(\bar{c}_i) \leftarrow \pi(\bar{c}_i) + \lambda(\bar{c}_i)$$

として III-1 へ戻る。

このアルゴリズムにおいて、II を繰り返している間、各点 $\bar{c}_i \in \bar{C}_{ls}$ に対して常に $\pi(\bar{c}_i) = 0$ となる。従って、II から III へ移行したとき、 $\bar{C}_{st} \subseteq \bar{C}_{ls}$ であるから、各点 $\bar{c}_i \in \bar{C}_{st}$ に対して、 $\pi(\bar{c}_i) = 0$ となり、III を繰り返している間、 $\bar{c}_i \in \bar{C}_{st}$ に対して、 $\pi(\bar{c}_i) = 0$ が成立する。それゆえ、II-3 あるいは III-3 において最短有向パスを見出す際、その始点となる点の $\pi(\cdot)$ の値は 0 である。

また、I で得られた初期勢力圏図を M^0 、II-5 あるいは III-5 で更新された各段階の勢力圏図を $M^h (h > 1)$ とし、各 M^h に対して、II-4 あるいは III-4 が実行される際の $\pi(\bar{c}_i)$ および $\bar{l}(\bar{c}_i, \bar{c}_j)$ をそれぞれ $\pi^h(\bar{c}_i)$ および $\bar{l}^h(\bar{c}_i, \bar{c}_j)$ と書き、II-4 および III-4 の操作によって得られた $\lambda(\bar{c}_i)$ を $\lambda^h(\bar{c}_i)$ と表すと、次の補題が成立し、II-4 と III-4 の操作にダイクストラ法を適用できることがわかる。

[補題 4] 勢力圏図 $M^h (h > 0)$ の随伴グラフ $\bar{G}(M)$ の各枝 (\bar{c}_i, \bar{c}_j) に対し、 $\bar{l}^h(\bar{c}_i, \bar{c}_j) \geq 0$ である。

(証明) $\bar{l}^0(\bar{c}_i, \bar{c}_j) \geq 0$ は明らかであるから、 \bar{l}^{h+1} について調べる。随伴グラフ $\bar{G}(M)$ の任意の枝 (\bar{c}_i, \bar{c}_j) に対して、

$$\lambda^h(\bar{c}_j) \leq \lambda^h(\bar{c}_i) + \bar{l}^h(\bar{c}_i, \bar{c}_j) \quad (23)$$

$$\pi^{h+1}(\bar{c}_i) = \pi^h(\bar{c}_i) + \lambda^h(\bar{c}_i) \quad (24)$$

が成り立つ。今、 $\bar{l}^{h+1}(\bar{c}_i, \bar{c}_j) \geq \bar{l}^h(\bar{c}_i, \bar{c}_j)$ であるとすると、

$$\begin{aligned} \bar{l}^{h+1}(\bar{c}_i, \bar{c}_j) &\geq \bar{l}^{h+1}(\bar{c}_i, \bar{c}_j) + \pi^{h+1}(\bar{c}_i) - \pi^{h+1}(\bar{c}_j) \\ &\geq \bar{l}^h(\bar{c}_i, \bar{c}_j) + \{\pi^h(\bar{c}_i) + \lambda^h(\bar{c}_i)\} \\ &\quad - \{\pi^h(\bar{c}_j) + \lambda^h(\bar{c}_j)\} \quad (\text{式(24)より}) \\ &= \bar{l}^h(\bar{c}_i, \bar{c}_j) + \lambda^h(\bar{c}_i) - \lambda^h(\bar{c}_j) \\ &\geq \bar{l}^h(\bar{c}_i, \bar{c}_j) + \lambda^h(\bar{c}_i) \end{aligned}$$

$$-\{\bar{l}^h(\bar{c}_i, \bar{c}_j) + \lambda^h(\bar{c}_i)\} \quad (\text{式(23)より})$$

$$= 0$$

が成り立つ。そこで、 $\bar{l}^{h+1}(\bar{c}_p, \bar{c}_q) < \bar{l}^h(\bar{c}_p, \bar{c}_q)$ である場合を考えると、このような枝は、補題 3 の(イ)あるいは(ウ)の場合に生じる。

(イ-1) 式(14)の場合：ある点 v_x が勢力圏 T_q^h から T_p^h へ移動したとすると、

$$\lambda^h(\bar{c}_q) = \lambda^h(\bar{c}_p) + \bar{d}^h(\bar{P}_{pq}) \quad (25)$$

が成立するから、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \bar{l}^{h+1}(\bar{c}_p, \bar{c}_q) &= \bar{l}^{h+1}(\bar{c}_p, \bar{c}_q) + \pi^{h+1}(\bar{c}_p) - \pi^{h+1}(\bar{c}_q) \\ &= \bar{l}^{h+1}(v_x, v_q) + \pi^{h+1}(\bar{c}_p) - \pi^{h+1}(\bar{c}_q) \\ &= \bar{l}^{h+1}(v_x, v_q) + \{\pi^h(\bar{c}_p) + \lambda^h(\bar{c}_p)\} - \{\pi^h(\bar{c}_q) + \lambda^h(\bar{c}_q)\} \\ &\geq \bar{d}^h(\bar{P}_{pq}) + \{\pi^h(\bar{c}_p) + \lambda^h(\bar{c}_p)\} - \{\pi^h(\bar{c}_q) + \lambda^h(\bar{c}_q)\} \\ &\quad + \{\lambda^h(\bar{c}_p) - \lambda^h(\bar{c}_q)\} \quad (\text{式(14)より}) \\ &= \bar{d}^h(\bar{P}_{pq}) + \pi^h(\bar{c}_p) - \pi^h(\bar{c}_q) \\ &\quad + \{\lambda^h(\bar{c}_p) - \lambda^h(\bar{c}_q)\} \\ &= \bar{d}^h(\bar{P}_{pq}) + \lambda^h(\bar{c}_p) - \lambda^h(\bar{c}_q) \\ &= \lambda^h(\bar{c}_q) - \lambda^h(\bar{c}_q) \quad (\text{式(25)より}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(イ-2) 式(15)の場合：ある点 v_x が T_q^h 以外の勢力圏 T_r^h から T_p^h へ移動したとすると、

$$\lambda^h(\bar{c}_r) = \lambda^h(\bar{c}_p) + \bar{d}^h(\bar{P}_{pr}) \quad (26)$$

が成立するから、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \bar{l}^{h+1}(\bar{c}_p, \bar{c}_q) &= \bar{l}^{h+1}(\bar{c}_p, \bar{c}_q) + \pi^{h+1}(\bar{c}_p) - \pi^{h+1}(\bar{c}_q) \\ &= \bar{l}^{h+1}(v_x, v_q) + \pi^{h+1}(\bar{c}_p) - \pi^{h+1}(\bar{c}_q) \\ &= \bar{l}^{h+1}(v_x, v_q) + \{\pi^h(\bar{c}_p) + \lambda^h(\bar{c}_p)\} \\ &\quad - \{\pi^h(\bar{c}_q) + \lambda^h(\bar{c}_q)\} \\ &\geq \bar{d}^h(\bar{P}_{pr}) + \bar{l}^h(\bar{c}_r, \bar{c}_q) + \{\pi^h(\bar{c}_p) + \lambda^h(\bar{c}_p)\} \\ &\quad - \{\pi^h(\bar{c}_q) + \lambda^h(\bar{c}_q)\} \quad (\text{式(15)より}) \\ &\geq \{\bar{d}^h(\bar{P}_{pr}) + \pi^h(\bar{c}_p) - \pi^h(\bar{c}_r)\} \\ &\quad + \{\bar{l}^h(\bar{c}_r, \bar{c}_q) + \pi^h(\bar{c}_r) - \pi^h(\bar{c}_q)\} \\ &\quad + \{\lambda^h(\bar{c}_p) - \lambda^h(\bar{c}_q)\} \\ &= \bar{d}^h(\bar{P}_{pr}) + \bar{l}^h(\bar{c}_r, \bar{c}_q) + \lambda^h(\bar{c}_p) - \lambda^h(\bar{c}_q) \\ &= \lambda^h(\bar{c}_r) + \bar{l}^h(\bar{c}_r, \bar{c}_q) - \lambda^h(\bar{c}_q) \quad (\text{式(26)より}) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

(イ-3) 式(16)の場合：ある点 v_x が T_p^h 以外の勢力圏 T_q^h から T_q^h へ移動したとすると、

$$\lambda^h(\bar{c}_r) = \lambda^h(\bar{c}_q) + \bar{d}^h(\bar{P}_{qr}) \quad (27)$$

が成立するから、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \bar{l}^{h+1}(\bar{c}_p, \bar{c}_q) &= \bar{l}^{h+1}(\bar{c}_p, \bar{c}_q) + \pi^{h+1}(\bar{c}_p) - \pi^{h+1}(\bar{c}_q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{l}^{h+1}(v_p, v_x) + \pi^{h+1}(\bar{c}_p) - \pi^{h+1}(\bar{c}_q) \\
&= \bar{l}^{h+1}(v_p, v_x) + \{\pi^h(\bar{c}_p) + \lambda^h(\bar{c}_p)\} \\
&\quad - \{\pi^h(\bar{c}_q) + \lambda^h(\bar{c}_q)\} \\
&\geq \bar{l}^h(\bar{c}_p, \bar{c}_r) - \bar{d}^h(\bar{P}_{qr}) + \{\pi^h(\bar{c}_p) + \lambda^h(\bar{c}_p)\} \\
&\quad - \{\pi^h(\bar{c}_q) + \lambda^h(\bar{c}_q)\} \quad (\text{式(16)より}) \\
&\geq \{\bar{l}^h(\bar{c}_p, \bar{c}_r) + \pi^h(\bar{c}_p) - \pi^h(\bar{c}_r)\} \\
&\quad - \{\bar{d}^h(\bar{P}_{qr}) + \pi^h(\bar{c}_q) - \pi^h(\bar{c}_r)\} \\
&\quad + \{\lambda^h(\bar{c}_p) - \lambda^h(\bar{c}_q)\} \\
&= \bar{l}^h(\bar{c}_p, \bar{c}_r) - \bar{d}^h(\bar{P}_{qr}) + \lambda^h(\bar{c}_p) - \lambda^h(\bar{c}_q) \\
&= \bar{l}^h(\bar{c}_p, \bar{c}_r) + \lambda^h(\bar{c}_p) - \lambda^h(\bar{c}_r) \quad (\text{式(27)より}) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

(イ-4) 式(17)の場合：ある点 v_x が T_p^h から T_q^h へ移動したとすると、

$$\lambda^h(\bar{c}_p) = \lambda^h(\bar{c}_q) + \bar{d}^h(\bar{P}_{qp}) \quad (28)$$

が成立している。従って、次式が証明できる。

$$\begin{aligned}
&\bar{l}^{h+1}(\bar{c}_p, \bar{c}_q) \\
&= \bar{l}^{h+1}(\bar{c}_p, \bar{c}_q) + \pi^{h+1}(\bar{c}_p) - \pi^{h+1}(\bar{c}_q) \\
&= \bar{l}^{h+1}(v_p, v_x) + \pi^{h+1}(\bar{c}_p) - \pi^{h+1}(\bar{c}_q) \\
&= \bar{l}^{h+1}(v_p, v_x) + \{\pi^h(\bar{c}_p) + \lambda^h(\bar{c}_p)\} \\
&\quad - \{\pi^h(\bar{c}_q) + \lambda^h(\bar{c}_q)\} \\
&\geq - \bar{d}^h(\bar{P}_{qp}) + \{\pi^h(\bar{c}_p) + \lambda^h(\bar{c}_p)\} \\
&\quad - \{\pi^h(\bar{c}_q) + \lambda^h(\bar{c}_q)\} \quad (\text{式(17)より}) \\
&= - \{\bar{d}^h(\bar{P}_{qp}) + \pi^h(\bar{c}_q) - \pi^h(\bar{c}_p)\} \\
&\quad + \lambda^h(\bar{c}_p) - \lambda^h(\bar{c}_q) \\
&= - \{\bar{d}^h(\bar{P}_{qp}) + \lambda^h(\bar{c}_q) - \lambda^h(\bar{c}_p)\} \\
&= 0 \quad (\text{式(28)より})
\end{aligned}$$

(ウ-1) 式(18)の場合：ある点 v_r が T_j^h から T_q^h へ、ある点 v_x が T_i^h から T_q^h へ移動したとすると、

$$\lambda^h(\bar{c}_i) = \lambda^h(\bar{c}_p) + \bar{d}^h(\bar{P}_{pi}) \quad (29)$$

$$\lambda^h(\bar{c}_j) = \lambda^h(\bar{c}_q) + \bar{d}^h(\bar{P}_{qj}) \quad (30)$$

が成立するから、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&\bar{l}^{h+1}(\bar{c}_p, \bar{c}_q) \\
&= \bar{l}^{h+1}(\bar{c}_p, \bar{c}_q) + \pi^{h+1}(\bar{c}_p) - \pi^{h+1}(\bar{c}_q) \\
&= \bar{l}^{h+1}(v_x, v_r) + \pi^{h+1}(\bar{c}_p) - \pi^{h+1}(\bar{c}_q) \\
&= \bar{l}^{h+1}(v_x, v_r) + \{\pi^h(\bar{c}_p) + \lambda^h(\bar{c}_p)\} \\
&\quad - \{\pi^h(\bar{c}_q) + \lambda^h(\bar{c}_q)\} \\
&\geq \bar{d}^h(\bar{P}_{pi}) + \bar{l}^h(\bar{c}_i, \bar{c}_j) - \bar{d}^h(\bar{P}_{qj}) \\
&\quad + \{\pi^h(\bar{c}_p) + \lambda^h(\bar{c}_p)\} \\
&\quad - \{\pi^h(\bar{c}_q) + \lambda^h(\bar{c}_q)\} \quad (\text{式(18)より}) \\
&= \{\bar{d}^h(\bar{P}_{pi}) + \pi^h(\bar{c}_p) - \pi^h(\bar{c}_i)\} \\
&\quad + \{\bar{l}^h(\bar{c}_i, \bar{c}_j) + \pi^h(\bar{c}_i) - \pi^h(\bar{c}_j)\} \\
&\quad - \{\bar{d}^h(\bar{P}_{qj}) + \pi^h(\bar{c}_q) - \pi^h(\bar{c}_j)\} \\
&\quad + \{\lambda^h(\bar{c}_p) - \lambda^h(\bar{c}_q)\} \\
&= \bar{d}^h(\bar{P}_{pi}) + \bar{l}^h(\bar{c}_i, \bar{c}_j) - \bar{d}^h(\bar{P}_{qj})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\quad + \lambda^h(\bar{c}_p) - \lambda^h(\bar{c}_q) \\
&= \bar{l}^h(\bar{c}_i, \bar{c}_j) + \lambda^h(\bar{c}_i) - \lambda^h(\bar{c}_j) \\
&\geq 0 \quad (\text{式(29)および式(30)より})
\end{aligned}$$

(ウ-2) の場合：(ウ-1) のときと同様 \square

最後にアルゴリズムの手間について考察する。

I はダイクストラ法を用いて $O(S(m, n))$ で解ける。ここで n および m はそれぞれ与えられたネットワークの点および枝の個数であり、 $S(m, n)$ は 1 点からの最短路を求めるダイクストラ法の手間である。II-1 と III-1 の随伴グラフおよび $\bar{l}(\bar{c}_i, \bar{c}_j)$ の値を求める手間は、 G の各枝 $(v_i, v_j) \in \omega(T_i, T_j)$ に対して $\bar{l}(v_i, v_j)$ を計算すれば良く、 $\bar{l}(v_i, v_j)$ は $d(c(v_i), v_i)$ および $d(c(v_j), v_j)$ などから容易に計算できるから、 $O(m)$ ができる。なお、 $d(c(v_i), v_i)$ の値は、 II-5 および III-5 の更新操作によって、点 v_i が T_i から T_i へ移動したとし、 II-4 または III-4 で見出された最短路 \bar{P} の点 \bar{c}_i から点 \bar{c}_j へ至る部分パスを \bar{P}_{ij} とすると、補題 2 より、 $d(c_i, v_i) = d(c_j, v_j) + \bar{d}(\bar{P}_{ij})$ となるから、 II-5 または III-5 において容易に修正できる。

また、 II-3 と II-4 および III-3 と III-4 の随伴グラフ上での最短路は、やはりダイクストラ法を用いて $O(S(m^*, k))$ で見出せる。ここで、 k は母点の数であり、 随伴グラフの枝の個数 m^* はグラフ G の枝の個数 m 以下なので、 $m^* \leq \min\{m, k^2\}$ を満足する。II-5 および III-5 の勢力圏更新の手間は、各勢力圏から高々 1 個の点を移動させるだけであるから、 $O(k)$ である。従って、 II または III を 1 回するのに要する手間は、 $O(m + S(m^*, k))$ となる。

一方、 II あるいは III を繰り返す回数は、繰り返し一回実行するごとに、少なくとも \bar{C}_{ex} に含まれる勢力圏の点数が 1 減少するか、あるいは \bar{C}_{st} に含まれる勢力圏の点数が 1 増加するかのいずれかが起きるから、 II および III の総繰り返し数は高々 n 回である。従って、 II および III 全体で $O(n(m + S(m^*, k)))$ となるから、 I の手間 $O(S(m, n))$ と比べて、アルゴリズム全体では、 $O(n(m + S(m^*, k)))$ となる。

メモリスペースについては、グラフ G と $\bar{G}(M)$ の記憶にはそれぞれ $O(n+m)$ と $O(k+m^*)$ 、 $\bar{G}(M)$ の各枝 \bar{c} に対して $\partial^+ \bar{c}$ および $\partial^- \bar{c}$ を記憶するのに $O(m^*)$ が必要であり、各点がどの勢力圏に属するかを記憶するのに $O(n+k)$ 必要である。また、 \bar{l} の計算に要する $c(v_i)$ および $d(c(v_i), v_i)$ の記憶には $O(n)$ が必要である。従って、必要なメモリスペースは $O(n+m)$ である。

5. むすび

本論文では、最適点数充足勢力圏図を求めるアルゴリズムとそれを支える理論を展開した。なお、最適点数充足勢力圏図が既に求まっている段階で、

(a) 各勢力圏の点の個数に対する制約範囲が変更された場合、

(b) 既存の点の母点への変更やその逆の場合などに対して最適点数充足勢力圏図を求め直すアルゴリズムも、本論文での理論の延長で工夫することができる。更に、ネットワークの点や母点にそれぞれ重み $w(\cdot)$ や $u(\cdot)$ が付けられた場合にも、中心度関数 $f(T_i)$ および関数 $F(M)$ が

$$f(T_i) = \sum_{v \in T_i} d(c_i, v) w(v)$$

$$F(M) = \sum_{T_i \in M} f(T_i) u(c_i)$$

と定義されるならば、

$$\bar{I}(c_i, v_j) = \{u(c_i)d(c_i, v_j) - u(c_j)d(c_j, v_j)\}w(v_j)$$

とし、随伴グラフを完全有向グラフとして、各枝の枝長を

$$\bar{I}(\bar{c}_i, \bar{c}_j) = \min\{\bar{I}(c_i, v_j) | v_j \in C(v_j)\}$$

と定義し直すだけで本論文での議論とほぼ同様の議論を展開できる。

今後の課題としては、各勢力圏に関する点セクショングラフに連結性を要求した場合や中心度関数 $F(T_i)$ として他の形^{(1),(9)}を採用した場合の考察などがある。

文 献

- (1) 篠田庄司, 仙石正和: 空間の変形とネットワークの点の中心らしさを測る関数の理論”, 信学論(A), J69-A, pp. 42-53(昭 61-01).
- (2) 伊理監修, 腰塚編集: “計算幾何学と地理情報諸処理”, pp. 126-148, 共立出版(昭 61).
- (3) F. P. Preparata and M. I. Shamos: “Computational Geometry”, pp. 198-257, Springer-Verlag, New York (1985).
- (4) G. Y. Handler and P. B. Mirchandani: “Location on Networks”, MIT Press, London(1979).
- (5) T. B. Boffey: “Graph Theory in Operations Research”, pp. 94-147, Macmillan Press, London (1982).
- (6) N. Tomizawa: “On some techniques useful for solution to transportation network problem”, Networks, 1, 2, pp. 173-194(1971).
- (7) M. L. Fredman and R. E. Tarjan: “Fibonacci heaps and their uses in improved network optimization algorithms”, Proc. 25-th Ann. IEEE Symp. Foundation of Computer Science, pp. 338-346(1984).
- (8) 伊理正夫, 白川 功, 梶谷洋司, 篠田庄司ほか: “演習グラフ理論”, コロナ社(昭 58).

- (9) 仙台正和, 篠田庄司: “枝に容量を有する無向ネットワークの枝の中心らしさを測る関数”, 信学論(A), J68-A, 11, pp. 1157-1165(昭 60-11).

(昭和 63 年 3 月 28 日受付)

森泉 隆

昭 61 中大・理工・電気卒。昭 63 同大学院博士課程前期課程了。ネットワーク理論に興味をもつ。現在、東芝に勤務。



築山 修治

昭 47 阪大・工・電子卒。昭 52 同大学院博士課程了。工博。同年阪大助手、昭 62 同助教授。この間、53 年 9 月～55 年 3 月、米国カリフォルニア大学バークレイ校客員研究員。62 年 4 月より中央大学理工学部助教授(電気工学科)。計算機援用回路設計およびグラフ理論に関する研究に従事。IEEE、情報処理学会各会員。



篠田 庄司

昭 39 中大・理工・電気卒。昭 48 同大学院博士課程了。工博。昭 40 中大研究助手。現在、同大学・理工・電気工学科教授。グラフ・ネットワーク構造をもつシステムの解析、設計、制御の研究に従事。著書「最新回路理論」、「回路解析」、「演習グラフ理論」など。



仙石 正和

昭 42 新潟大・工・電気卒。昭 47 北大大学院博士課程了。工博。同年北大・工・電子助手。現在、新潟大・工・情報助教授。回路網理論。グラフとネットワーク理論およびその応用、情報伝送、移動通信などの研究に従事。著書「演習グラフ理論」(共著)。



白川 功

昭 38 阪大・工・電子卒。昭 40 同大学院修士課程了。昭 43 同博士課程了。昭 43 阪大助手、昭 48 同助教授。昭 62 同教授(電子工学科勤務)。その間、昭 49～50、米国カリフォルニア大学客員研究員。主として、VLSI の CAD 技法、特に並列処理技法、に関する研究に従事。主な著書「グラフとネットワークの理論」、「演習グラフ理論」(以上、共著、コロナ社)。

