

容量空間における最適勢力圏図

正員 田村 裕<sup>†</sup>      正員 仙石 正和<sup>†</sup>      正員 篠田 庄司<sup>††</sup>

An Optimal Territory Map on a Capacity Space

Hiroshi TAMURA<sup>†</sup>, Masakazu SENGOKU<sup>†</sup> and Shoji SHINODA<sup>††</sup>, Members

あらまし  $V$  を点といわれる要素からなる空でない集合とし、容量関数といわれる  $V \times V$  から  $\bar{R}_+$  への関数  $\gamma$  が定義されているとき、 $(V; \gamma)$  を容量空間という。また、母点集合といわれる  $V$  の部分集合  $C$  (要素を母点という) が指定されているものとする。和集合が  $V$  となる  $V$  の部分集合族  $M = \{T(c) \mid c \in C\}$  の各部分集合  $T(c)$  が互いに素で、母点  $c$  を含むが他の母点を含まなければ  $T(c)$  を  $c$  の勢力圏といい、 $M$  を  $(V; \gamma)$  の勢力圏図という。各母点  $c$  の勢力圏  $T(c)$  に対して  $f(T(c))$  を  $c$  と  $T(c)$  の各点  $v$  との容量  $(\gamma(c, v))$  の総和とする。勢力圏図  $M$  に対して  $F(M)$  を  $f(T(c))$  の総和としたとき、最大の  $F(M)$  をとる勢力圏図を最適勢力圏図という。本論文では、容量空間における最適勢力圏図の構成と母点集合の変化に伴う最適勢力圏図の修正について考察し、2点間の最大流量を容量関数とする無向ネットワーク  $N$  においては  $O(knm \log n)$  の手間で最適勢力圏図を構成できることを示す。但し、 $k, n, m$  はそれぞれ  $C$  の要素数、 $N$  の点数、 $N$  の枝数を表す。また非母点の母点への変更やその逆の場合の最適勢力圏図の修正が  $O(\log |V|)$  で可能となるネットワークを容量空間から構成する。

1. まえがき

最適勢力圏図<sup>(1)</sup>や Voronoi 図<sup>(2),(3)</sup>は、通信網、交通網、郵便局網などにおいて、例えば通信網であれば、各受信局をどの基地局(親局)の下に配置する(割り当てるともいう)かという配置(割当)問題<sup>(4),(5)</sup>に応用できることが知られているが、これまでは点と点との係わりの尺度としては、2点間の距離に基づいていた。ところで、点を都市、道路を枝と考えて交通網のモデル化としてネットワークをとらえた場合、都市間の距離が近ければ互いの係わりが大きいと単純に言い切れない場合も多い。ある二都市間が多少離れていても、太い幹線で結ばれていれば、互いの係わりは大きいといえるであろう。そこで距離ではなく、どれだけ多くの物質を流すことができるかを係わりの尺度とすることが考えられる。通信網や郵便局網に関する配置(割当)問題は、この視点に立つことも重要である。そこで本論文では、2点間の容量を係わりの尺度とした場合の最適勢力圏図に関する考察を行う。

$V$  は点といわれる要素からなる空でない集合(点集合という)とし、 $\gamma: V \times V \rightarrow \bar{R}_+$  ( $\bar{R}_+ = [0, \infty]$ : 非負実数と  $\infty$ ) とする。 $\gamma$  が次の容量公理を満足するとき、 $(V; \gamma)$  は  $\gamma$  を容量関数とする容量空間といわれる。

[容量公理]<sup>(6)</sup>

$\gamma(v_1, v_2) \geq 0, v_1, v_2, v_3 \in V$  に対して、

(I)  $\gamma(v_1, v_2) = \infty \Leftrightarrow v_1 = v_2$

(II)  $\gamma(v_1, v_2) = \gamma(v_2, v_1)$

(III)  $\gamma(v_1, v_3) \geq \min \{ \gamma(v_1, v_2), \gamma(v_2, v_3) \}$       □

容量関数の典型的な例として、無向ネットワーク上の2点間の最大流量がある。

$(V; \gamma)$  が容量空間であり、 $V$  の部分集合で母点集合といわれるものが指定されているものとし、その母点集合を  $C$  で表し、その要素を母点と言う。各母点  $c$  に対する点集合  $T(c)$  ( $c \in C$ ) が、

(I) 母点  $c$  を含むが他の母点を含まない

(II)  $c' \in C, c' \neq c \Rightarrow T(c) \cap T(c') = \emptyset$

(III)  $\bigcup_{c \in C} T(c) = V$

を満たすとき、 $T(c)$  の集合  $M = \{T(c) \mid c \in C\}$  を  $V$  の勢力圏図といい、各点集合  $T(c)$  を  $c$  の勢力圏という<sup>(1)</sup>。

各母点  $c$  の勢力圏  $T(c)$  に対して、

$$f(T(c)) = \sum_{v \in T(c)} \gamma(c, v)$$

<sup>†</sup> 新潟大学工学部情報工学科, 新潟市  
Faculty of Engineering, Niigata University, Niigata-shi, 950-21 Japan

<sup>††</sup> 中央大学理工学部電気工学科, 東京都  
Faculty of Science and Engineering, Chuo University, Tokyo, 112 Japan

なる関数を考え、これを用いて、勢力圏図  $M$  に対して、

$$F(M) = \sum_{T(c) \in M} f(T(c))$$

なる値を定義する。このとき、勢力圏図  $M$  のうちで最大の  $F(M)$  を与えるものを最適勢力圏図という。計算幾何学において、距離に関して定義される Voronoi 図は、容量に関しても同様に定義できる。容量に関して定義された Voronoi 図において、このような最適勢力圏図は、どの Voronoi 領域にも属さない点、つまり複数の母点からの容量が等しい点を、そのどれかの Voronoi 領域に組み入れたものである。また逆に、すべての最適勢力圏図における母点  $c$  の勢力圏の共通部分が、 $c$  の Voronoi 領域であるともいえる。

本論文では、ある条件の下で、非母点の母点への変更（以降では母点の付加という）やその逆の場合（以降では母点の削除という）による最適勢力圏図の修正が局所的で済むことを示し、これを用いて 2 点間の最大流量を容量関数とする無向ネットワーク  $N$  における最適勢力圏図を、 $O(knm \log n)$  の時間で構成できることを示す。但し、 $k, n, m$  はそれぞれ  $C$  の要素数、 $N$  の点数、 $N$  の枝数を表す。次に、母点の付加や削除による最適勢力圏図の修正が  $O(\log |V|)$  で可能となるネットワーク構造を容量空間から構成する。

なお定義なしで用いる用語は文献(7)によるものとする。

## 2. 母点集合の変化に伴う最適勢力圏図の修正

この章では、最適勢力圏図が構成されているものとし、母点の付加や削除によって、母点集合が変化した場合の最適勢力圏図の修正に関して考察する。

容量公理から、次の補題が直ちに導ける。

[補題 1]

( $V; \gamma$ ) を容量空間とし、 $v_1, v_2, v_3 \in V$  であるとする。いま、 $\gamma(v_1, v_2) \geq \gamma(v_2, v_3) \geq \gamma(v_1, v_3)$  であるとする。次の二つの場合しか起こらない。

$$\gamma(v_1, v_2) > \gamma(v_2, v_3) = \gamma(v_1, v_3)$$

$$\gamma(v_1, v_2) = \gamma(v_2, v_3) = \gamma(v_1, v_3) \quad \square$$

次の定理は最適勢力圏図の定義から明らかである。

[定理 1]

勢力圏図  $M$  が最適勢力圏図であるための必要十分条件は、 $V$  の任意の要素を  $v$  とし、 $v \in T(c)$  とすると、 $c$  以外の任意の母点  $c'$  に対して、 $\gamma(v, c) \geq \gamma(v, c')$

が成り立つことである。  $\square$

### 2.1 母点の付加

[定義 1]

$T(c)$  を勢力圏とし、 $T(c)$  の任意の要素を  $u$  とする。 $T(c)$  に属さないどの点  $v$  に対しても、 $\gamma(u, c) \geq \gamma(v, u)$  が成り立つとき、 $T(c)$  は堅固であるという。また勢力圏図  $M$  のすべての勢力圏が堅固であるとき  $M$  は堅固であるという。  $\square$

勢力圏図  $M$  が堅固であれば、定理 1 の条件を満足するので、 $M$  は最適勢力圏図となる。

[定理 2]

$M = \{T(c) \mid c \in C\}$  を堅固な最適勢力圏図とする。また  $c' \in C, c' \in T(c)$  とし、 $T(c)$  の部分集合  $A, B$  が、

$$(I) \quad c \in A, c' \in B$$

$$(II) \quad A \cap B = \phi,$$

$$(III) \quad T(c) = A \cup B,$$

$$(IV) \quad \text{任意の } a \in A, b \in B \text{ に対して,}$$

$$\gamma(a, c) \geq \gamma(a, b)$$

$$\gamma(b, c') \geq \gamma(a, b)$$

を満足しているとする。

$M$  から  $T(c)$  を除き  $A$  と  $B$  を加えたものを  $M'$  とすると、 $M'$  は母点集合が  $C \cup \{c'\}$  である堅固な最適勢力圏図となる。

(証明)

$M'$  は勢力圏図となるのは明らかなので、 $M'$  が堅固であることをいえばよい。 $M$  が堅固であることから、 $A, B$  以外の勢力圏は堅固である。

$a \in A, v \in A$  とする。 $v \in B$  であれば、 $T(c)$  が堅固であることより  $\gamma(a, c) \geq \gamma(a, v)$ 、また  $v \in B$  であれば (IV) より  $\gamma(a, c) \geq \gamma(a, v)$  である。

$b \in B, v \in B$  とする。(IV) より  $\gamma(b, c') \geq \gamma(b, c)$  である。 $v \in A$  であれば、 $T(c)$  が堅固であることより  $\gamma(b, c) \geq \gamma(b, v)$  なので、 $\gamma(b, c') \geq \gamma(b, v)$ 、また  $v \in A$  であれば、(IV) より  $\gamma(b, c') \geq \gamma(b, v)$  である。

以上より、 $A, B$  も堅固であるので、 $M'$  も堅固である。  $\square$

[補題 2]<sup>(8)</sup>

$N$  を無向ネットワークとし、2点間の最大流量を容量関数とする。 $(X, \bar{X})$  を点  $s$  と  $t$  を分離する最小カットとする。 $v \in X$  とすると、 $s$  と  $v$  を分離する最小カット  $(Y, \bar{Y})$  で、 $\bar{Y} \subset X$  なるものが存在する。  $\square$

[補題 3]

$N$  を無向ネットワークとし、2点間の最大流量を容

量関数とする.  $(X, \bar{X})$  を点  $s$  と  $t$  を分離する最小カットとする.  $v \in X, u \in \bar{X}$  とすると,

$$\gamma(v, s) \geq \gamma(u, v)$$

(証明)

補題 2 より,  $s$  と  $v$  を分離する最小カット  $(Y, \bar{Y})$  で,  $\bar{Y} \subset X$  なるものが存在する.  $\bar{Y} \subset X$  であるので,  $(Y, \bar{Y})$  は  $u$  と  $v$  を分離するカットにもなる. よって,

$$\gamma(v, s) \geq \gamma(u, v) \quad \square$$

[定理 3]

$N$  を無向ネットワークとし, 2 点間の最大流量を容量関数とする.  $M$  を  $N$  における最適勢力圏図とし, 堅固であるとする.  $(X, \bar{X})$  を  $c$  と  $c'$  を分離する最小カットとする. 定理 2 における  $A, B$  を

$$A = X \cap T(c), B = \bar{X} \cap T(c)$$

と定めると,  $M'$  は母点集合が  $C \cup \{c'\}$  である堅固な最適勢力圏図となる.

(証明)

$A, B$  が定理 2 の条件 (I) ~ (III) を満足するのは明らかなので条件 (IV) を満足することを示す.

$(X, \bar{X})$  は  $c'$  を入口,  $c$  を出口としたときの最小カットにもなっているため, 補題 3 から  $v \in X, v' \in \bar{X}$  に対して,

$$\gamma(c, v) \geq \gamma(v, v')$$

$$\gamma(c', v') \geq \gamma(v, v')$$

である. よって定理 2 から  $M'$  は母点集合が  $C \cup \{c'\}$  である堅固な最適勢力圏図となる.  $\square$

定理 2 より,  $M$  が堅固であるとき, 新たな母点の付加に伴う最適勢力圏図の修正は, その母点の属する勢力圏についてのみ行えばよいことがわかる.

また最大流量を容量関数とする場合, 無向ネットワークに定理 3 を直接用いて, 最適勢力圏図を構成することも可能である. 1 点ずつ母点を付加していく方法 (逐次添加法といわれる) で, 母点の数を  $k$  とすると,  $k-1$  回容量を求めるだけで最適勢力圏図を構成できる. 点数が  $n$ , 枝数が  $m$  の無向ネットワークにおいて, 2 点間の最大流量を求める手間は, 現在までに知られている最良のもので  $O(nm \log n)^{(9)}$  であるので, 手間は  $O(knm \log n)$  である.

## 2.2 母点の削除

[定理 4]

$M = \{T(c) \mid c \in C\}$  を最適勢力圏図とする.  $c, c'$  を母点とし,

$$\gamma(c, c^*) = \max \{ \gamma(c, c') \mid c' \in C - \{c\} \}$$

であるとする. このとき,  $M$  から  $T(c), T(c^*)$  を除

き,  $T(c) \cup T(c^*)$  を加えた勢力圏図を  $M'$  とすると,  $M'$  は母点集合が  $C - \{c\}$  である最適勢力圏図となる. また  $M$  が堅固であるならば,  $M'$  も堅固である.

(証明)

$M'$  が最適勢力圏図でないとする. 定理 1 より  $M'$  において  $v$  は  $c_1$  の勢力圏に属し,

$$\gamma(v, c_1) < \gamma(v, c_2) \quad (1)$$

なる点  $v$  と母点  $c_1, c_2$  が存在する.  $M$  は最適勢力圏図であるので  $c_1 = c^*, v \in T(c)$  である.

$v \in T(c)$  であることより,

$$\gamma(v, c_2) \leq \gamma(v, c) \quad (2)$$

式 (1), (2) より,

$$\gamma(v, c^*) < \gamma(v, c) \quad (3)$$

補題 1 と式 (3) より,

$$\gamma(c, c^*) = \gamma(v, c^*) \quad (4)$$

補題 1 と式 (2) より,

$$\gamma(c_2, c) \geq \gamma(v, c_2) \quad (5)$$

よって, 式 (5), (1), (4) より,  $\gamma(c_2, c) > \gamma(c, c^*)$  となり,  $\gamma(c, c^*)$  が最大であることに矛盾する.

次に  $M'$  が堅固であることを示す.  $T(c) \cup T(c^*)$  以外は堅固であるので,  $T(c) \cup T(c^*)$  についてのみ示せばよい.

$$u \in T(c) \cup T(c^*), \gamma(u, c^*) < \gamma(u, v) \quad (6)$$

であるとする.

場合 1:  $u \in T(c^*)$  であるとき

$T(c^*)$  は堅固であるので  $v \in T(c^*)$ , よって  $v \in T(c) \cup T(c^*)$  である.

場合 2:  $u \in T(c)$  であるとき

場合 2a:  $\gamma(u, c) < \gamma(u, v)$  であるとき

$T(c)$  は堅固であるので  $v \in T(c)$ , よって  $v \in T(c) \cup T(c^*)$  である.

$$\text{場合 2b: } \gamma(u, c) \geq \gamma(u, v) \quad (7)$$

であるとき 補題 1 と式 (7) より

$$\gamma(c, v) \geq \gamma(u, v) \quad (8)$$

式 (7), (6) より,

$$\gamma(u, c) > \gamma(u, c^*) \quad (9)$$

補題 1 と式 (9) より,

$$\gamma(c^*, c) = \gamma(u, c^*) \quad (10)$$

$c^*$  の決め方から  $c' = c$  である母点  $c'$  に対して,

$$\gamma(c, c') \leq \gamma(c, c^*) \quad (11)$$

よって式 (8), (6), (10), (11) より,

$$\gamma(c, v) > \gamma(c, c') \quad (12)$$

補題 1 と式 (12) より,

$$\gamma(c, v) > \gamma(c', v) (= \gamma(c, c')) \text{ となり, } M \text{ は最適勢}$$

力圏図であるので、 $v \in T(c)$ である。

よって何れの場合も  $v \in T(c) \cup T(c^*)$  となり、対偶が示されたので  $M'$  は堅固である。 □

定理 4 より、母点の削除に伴う最適勢力圏図の修正は、その母点の勢力圏を、その母点への容量が最も大きい母点の勢力圏に加えればよいことがわかる。また  $M$  が堅固であるならば、修正後も堅固であるので、母点を削除した後に、ある母点の付加を行っても、定理 2 のような局所的な修正で済む。

### 3. 容量保存平衡木

前章では、最大流量が容量関数であるときの最適勢力圏図の構成方法を示したが、容量空間における最適勢力圏図を構成した後に、母点の付加や削除による母点集合の変化が頻繁に起こる場合もある。よって本章では、最適勢力圏図の修正に便利な容量保存平衡木といわれるものを提案する。

この容量保存平衡木を構成するアルゴリズムは、最小木問題における Kruskal の算法<sup>(2),(10)</sup>を応用したものである。また UNION-FIND 問題<sup>(11)</sup>における操作も応用することとする。

手続き  $ROOT(v)$  は、各連結成分が根付木である森において、点  $v$  の属する木の根を得る手続きである。

**procedure**  $ROOT(v)$

**begin**

R1 **while**  $father(v) \neq 0$  **do**  $v := father(v)$ ;  
 (\*  $father(v)$  は  $v$  の親を表す。木構造なので  $v$  の親は存在すれば一意、存在しない場合は 0 とする \*)

R2 **return**  $(v)$

**end**

手続き  $UNION(u, v, a)$  は、 $v$  の属する木の点数のほうが  $u$  の属する木の点数より少なくないとした場合、 $u$  の属する木の根の親を  $v$  の属する木の根とし、重みを  $a$  とするものである (図 1)。

**procedure**  $UNION(u, v, a)$

**begin**

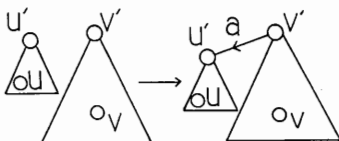


図 1  $UNION(u, v, a)$   
 Fig. 1  $UNION(u, v, a)$

U1 **if**  $count(ROOT(u)) > count(ROOT(v))$   
**then** **exchange**  $u$  and  $v$ ;  
 (\*  $u'$  が根であるとき  $count(u')$  は  $u'$  の属する木の点数を表す \*)

U2  $u' := ROOT(u)$ ;

U3  $v' := ROOT(v)$ ;

U4  $father(u') := v'$ ;

U5  $w(v', u') := a$ ;

U6  $count(v') := count(v') + count(u')$

**end**

$T$  を点集合が  $V$  (点数を  $n$  とする) で、各枝  $(u, v)$  に非負の重み  $w(u, v)$  が付けられた木状の無向ネットワークとし、 $T$  における 2 点間の最大流量を容量関数とする。このとき以下の手続き C-TREE によって  $T$  から構成された (有向木)  $T^*$  を  $T$  の容量保存平衡木という。

**procedure** C-TREE

**begin**

B1 枝  $e$  を  $w(e)$  の大きい順に 1 から  $m$  まで並べる  
 (\*  $e_i = (u_i, v_i)$  とし、 $w(e_1) \geq \dots \geq w(e_m)$  とする、 $T$  は木であるので、 $m = n - 1$  \*);

B2 **for each**  $v \in V$  **do**

**begin**

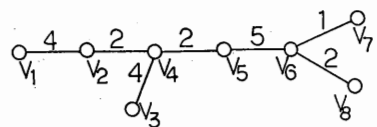
B3  $father(v) := 0$ ;  $count(v) := 1$

**end**;

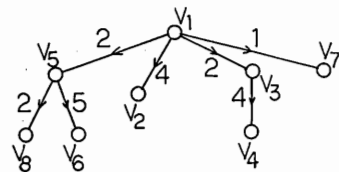
B4 **for**  $i = 1$  **to**  $m$  **do**  $UNION(u_i, v_i, w(e_i))$

**end**

(注意: B1 の枝の重みによるソーティングのとき、同



(a)  $T$



(b)  $T^*$

図 2 無向ネットワーク  $T$  と  $T$  の容量保存平衡木  $T^*$   
 Fig. 2 An undirected  $T$  and a capacity preserved balanced tree  $T^*$  of  $T$ .

じ重みの枝の順序には任意性があるので、容量保存平衡木は  $T$  から一意に構成されるとは限らない.)

例えば,  $T$  が図 2(a) であるとき, 図 2(b)  $T^*$  は  $T$  の容量保存平衡木である.

容量保存平衡木の性質を次にあげる.

[定理 5]

(性質 I) 高さは  $O(\log n)$  である.

(性質 II) 容量保存平衡木  $T^*$  を無向ネットワークとみなしたとき, 任意の 2 点  $u, v$  に対して,  $T$  における  $u, v$  間の最大流量と,  $T^*$  における  $u, v$  間の最大流量は等しい.

(性質 III) 点  $v'$  は点  $v$  の親, 点  $v''$  は点  $v'$  の親とすると,  $w(v, v') \geq w(v', v'')$

(証明)

(I) 手続き UNION の U1 で点の多くない方の根が多い方の根の子となっているので文献(11)より高さは  $O(\log n)$  である.

(II) B1 の部分列  $e_1, \dots, e_{m'}$  (但し  $w(e_1) \geq \dots \geq w(e_{m'})$ ,  $m' \leq m$ ) において, B2 以下を実行した場合の, 容量保存平衡木を  $T_{m'}^*$ , また点集合  $V$ , 枝集合が  $e_1, \dots, e_{m'}$  である  $T$  の部分ネットワークを  $T_m$  とすると,  $T_m$  の各連結成分の点集合と  $T_{m'}^*$  の各連結成分の点集合は等しくなる.

木状の無向ネットワークにおける  $u, v$  間の最大流量は, 唯一定まる, 初等的な  $u-v$  道 ( $u$  から  $v$  への道) 上の枝の重みの最小値である. いま, 2 点  $u, v$  間の  $T$  における最大流量  $a$  と  $T^*$  における最大流量  $a^*$  が異なるとする.  $a < a^*$  とし,  $T$  における初等的な  $u-v$  道上の枝  $(u_i, v_i)$  の重みが  $a$  であったとする. すると,  $u, v$  は  $T_{i-1}$  において異なる連結成分に属し,  $T_{i-1}^*$  においては同じ連結成分に属するので, 各連結成分の点集合が等しいことに矛盾する.  $a > a^*$  の場合も同様に矛盾するので,  $T$  における最大流量と  $T^*$  における最大流量は等しい.

(III) 枝  $(v', v'')$  が UNION  $(u_i, v_i, w(e_i))$  によって,  $T^*$  に付加されたとする. UNION  $(u_i, v_i, w(e_i))$  によって  $v'$  は根ではなくなるので,  $v'$  を端点とする枝が以後付加されることはない. よって, 枝  $(v, v')$  は UNION  $(u_i, v_i, w(e_i))$  を実行する以前から  $T^*$  の枝である. 枝は重みの大きい順に付加されるので,

$$w(v, v') \geq w(v', v'') \quad \square$$

なお B1 の枝のソーティングにかかる手間は  $O(n \log n)$  であり, ROOT, UNION にかかる手間は  $O(\log n)$  であるので, このアルゴリズム全体の手間は,  $O(n$

$\log n)$  である.

#### 4. 容量保存平衡木における最適勢力圏図

この章では, 前章で構成した容量保存平衡木を無向ネットワークとみなし, 容量関数を点間の最大流量としたときの最適勢力圏図について考察する. 結果として, 記憶容量は  $O(n)$  であり, ある点の属する勢力圏の母点を求めることと, 母点の付加や削除に伴う最適勢力圏図の修正は各々  $O(\log n)$  で可能となる. また逐次添加法によって, 母点の個数を  $k$  個とすると  $O(k \log n)$  の手間で最適勢力圏図を構成することができることも示す.

$M$  を容量保存平衡木  $T^*$  における最適勢力圏図とし, 各勢力圏  $T(c)$  の点セクショングラフは連結であるとする. すると各  $T(c)$  に対してレベル (level) が最も小さい点  $v_0$  は一意に決定される. このとき  $s(v_0) = c$  とし, 他の  $T(c)$  の点  $v$  は  $s(v) = \phi$  と, 各点にラベルを付ける. また  $v_0$  を  $c$  のラベル点ということとする.

$v_0$  は  $T(c)$  の各点から  $T^*$  の根への道上にあるので, 点  $v$  がどの勢力圏に属するかは, この  $s(\cdot)$  を用いて次のように求められる.

**procedure DETERMINE ( $v$ )**

**begin**

E1 **while**  $s(v) = \phi$  **do**  $v := \text{father}(v)$  ;

E2 **return**  $(s(v))$

**end**

よってラベル  $s(\cdot)$  により点集合を各勢力圏にわけることが可能である. このラベルによる勢力圏図は, 点の付加や削除に伴う修正が簡単であるので, 以降はこの方法を用いることとする.

##### 4.1 母点の付加

この節では, 容量保存平衡木  $T^*$  において母点集合が  $C$  である最適勢力圏図  $M$  が構成されているものとし,  $M$  の各勢力圏  $T(c)$  は堅固で, 点セクショングラフは連結であるとする. このとき母点  $c'$  の付加による最適勢力圏図の修正アルゴリズムは次の通りである. なお両端点が異なる勢力圏に属する枝を境界枝といい, 端点をその点の属する勢力圏の境界点という. list  $(v)$  は  $v$  が始点となる境界枝を記憶するものとする.

**procedure ADD ( $c'$ )**

**begin**

A1  $c' \in T(c)$  なる  $c$  と,  $c$  のラベル点  $v_0$  をみつける ;

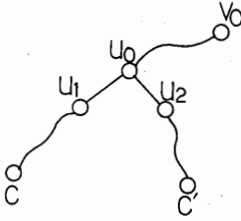


図3 ADD(c')の説明のための図  
Fig. 3 Explanation for ADD(c').

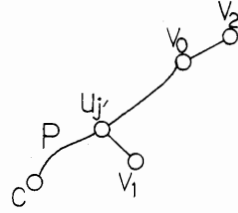


図4 DELETE(c)の説明のための図  
Fig. 4 Explanation for DELETE(c).

A 2 初等的な  $c-c'$  道  $P$  上の点で初等的な  $c-v_0$  道  $c'-v_0$  道両方に含まれる点  $u_0$  をみつける (\* $P$  における  $u_0$  の前後の点を  $u_1, u_2$  とする (図3参照) \*) ;

A 3 **if**  $w(u_1, u_0) \geq w(u_0, u_2)$  **then**  
**begin**

A 4  $s(u_2) := c'$  ;

A 5  $list(u_0)$  に  $(u_0, u_2)$  を加える

**end**

**else**

**begin**

A 6  $s(u_1) := c ; s(v_0) := c'$  ;

A 7  $list(u_0)$  に  $(u_0, u_1)$  を加える

**end**

**end**

$w(u_1, u_0) \geq w(u_0, u_2)$  の場合, 容量保存平衡木の性質 III より枝  $(u_0, u_2)$  は, 初等的な  $c-c'$  道上の重み最小の枝である. よって木の性質から枝  $(u_0, u_2)$  は  $c$  と  $c'$  を分離する最小カットとなる. よって定理3から, 修正された勢力圏図は堅固な最適勢力圏図となる.  $w(u_1, u_0) < w(u_0, u_2)$  の場合も同様に最適勢力圏図となる.

容量保存平衡木の性質から  $c-v_0, c'-v_0$  道の長さは  $O(\log n)$  であるので, A 1, A 2 の手間は, それぞれ  $O(\log n)$ . A 5, A 7 の手間は  $list(v)$  のデータ構造として, 例えば平衡2分探索木<sup>(2),(12)</sup>を用いれば,  $O(\log d)$  (但し,  $d$  は  $u$  の正の線度(out degree)). よってこのアルゴリズム全体の手間は  $O(\log n)$  となる.

#### 4.2 母点の削除

[定義2]

勢力圏  $T(c)$  において, 母点  $c$  から  $c$  のラベル点への初等的な道を  $P$  とする.  $T(c)$  の各境界点が  $P$  上にあるとき,  $T(c)$  は道状境界を持つという. また勢力圏図  $M$  のすべての勢力圏が道上境界を持つとき,  $M$  は道状境界を持つという. □

手続き ADD によって新たに増える境界枝はひとつ

であり,  $M$  が道状境界を持つならば, 修正された最適勢力圏図も道状境界を持つことは容易にわかる.

この節では, 容量保存平衡木  $T^*$  において母点集合が  $C$  である最適勢力圏図  $M$  が構成されているものとし,  $M$  の各勢力圏  $T(c)$  は堅固で道状境界を持ち, 点セクショングラフは連結であるとする. このとき, 母点  $c$  を削除した場合の最適勢力圏図の修正アルゴリズムは次の通りである.

**procedure** DELETE( $c$ )

**begin**

D 1  $c$  から  $c$  のラベル点  $v_0$  までの初等的な道  $P$  をみつける ; (\*  $P = (u_0, u_1, \dots, u_h)$ , 但し  $u_0 = c, u_h = v_0$ )

D 2  $list(u_j) \neq \phi$  なる  $j$  の最小値を  $j'$  とし, 存在しない場合は  $j' = h+1$  とする ; (\* 図4参照 \*)

D 3 **if**  $j' \neq h+1$  **then**

**begin**

D 4  $list(u_{j'})$  における重み最大の枝  $(u_{j'}, v_1)$  を  $list(u_{j'})$  から削除 ;

D 5  $s(v_0) := s(v_1) ; s(v_1) := \phi$

**end**

**else begin**

D 6  $v_2 := \text{father}(v_0)$  ;

D 7  $s(v_0) := \phi$  ;

D 8  $list(v_2)$  から  $(v_2, v_0)$  を削除

**end**

**end**

[補題4]

枝  $(u, v)$  を  $u \in T(c_1), v \in T(c_2)$  なる境界枝とすると,  $w(u, v) = \gamma(c_1, c_2)$

(証明)

木状のネットワークであり, 各勢力圏の点セクショングラフが連結であることから  $w(u, v) \geq \gamma(c_1, c_2)$  である.

$w(u, v) > \gamma(c_1, c_2)$ であると仮定する.  $(u', v')$ を初等的な  $c_1$ - $c_2$  道上の重み最小の枝とする.  $u', v' \in T(c_1)$ としてよい. すると  $\gamma(c_1, u) = \gamma(c_1, c_2)$ ,  $\gamma(c_1, c_2) < \gamma(u, v)$ となり,  $T(c_1)$ が堅固であることに矛盾する. □

[補題 5]

$(u_s, v), (u_t, v')$ を境界枝とする (但し  $u_s, u_t (s < t)$  は, D1における  $P$ 上の点とする) と,

$$w(u_s, v) \geq w(u_t, v')$$

(証明)

容量保存平衡木の性質IIIより,  $w(u_s, v) \geq w(u_t, u_{t-1})$ となる.  $w(u_t, u_{t-1}) < w(u_t, v')$ であるとすると,  $v'$ の属する勢力圏を  $T(c')$ とした場合,  $(u_t, u_{t-1})$ は初等的な  $c$ - $c'$  道上にあるので,  $w(u_t, v') > \gamma(c, c')$ となるが, これは補題4に矛盾する. よって,  $w(u_t, u_{t-1}) \geq w(u_t, v')$ となる. 以上より,  $w(u_s, v) \geq w(u_t, v')$ がいえる. □

道状境界を持つことから,  $T(c)$ の要素を端点とする境界枝は  $P$ 上の点に接続する. また容量保存平衡木の性質IIIより,  $(v_0, v_2)$ の重みは境界枝のなかで最小である.  $j = h+1$ のときは, 補題5と  $(u_y, v_1)$ の選び方から  $(u_y, v_1)$ の重みは, 境界枝のなかで最大となる. よって補題4から  $s(v_1)$ は  $T(c)$ に隣接する勢力圏の母点のなかで  $c$ との容量が最大となる. また任意の母点  $c'$ に対して  $c$ - $c'$ 道は必ず端点が  $T(c)$ の要素である境界枝を通ることから,  $s(v_1)$ はすべての母点の中で  $c$ との容量が最大となる母点である. よって定理4より修正後も堅固な最適勢力圏図となる.  $j = h+1$ のときは, 境界枝は  $(v_0, v_2)$ のみであるので, やはり  $(v_0, v_2)$ が重み最大となり, 同様に修正後も堅固な最適勢力圏図となる. また  $u_0 (=c), u_1, \dots, u_{y-1}$ は境界枝に接続していないので, 修正後も道状境界を持つことは容易にわかる.

$c$ - $v_0$ 道  $P$ の長さは, 容量保存平衡木の性質Iから  $O(\log n)$ なので D1, D2の手間は  $O(\log n)$ . D4, D8は  $u_y, v_2$ の正の線度をそれぞれ  $d_1, d_2$ とすると手間はそれぞれ  $O(\log d_1), O(\log d_2)$ . よってこのアルゴリズム全体の手間は  $O(\log n)$ である.

4.3 最適勢力圏図の構成

手続き ADDを用いて, 母点集合が  $C = \{c_1, \dots, c_k\}$ である最適勢力圏図  $M$ を以下のアルゴリズムで構成する.

procedure TERRITORY\_MAP

begin

```
T 1      s(ur) := c1; (* ur は T の根 *)
T 2      for j = 2 to k do ADD (cj)
end
```

手続き ADDによる修正後も, 勢力圏図は定理3から堅固であるので T2のような連続的な付加が可能であり, アルゴリズムの手間は  $O(k \log n)$ である.

例えば, 図2(b)の  $T^*$ において,  $v_5, v_4, v_7$ の順で母点を付加した場合,  $v_5, v_4, v_7$ のラベル点はそれぞれ  $v_1, v_3, v_7$ となり,

$$T(v_5) = \{v_1, v_2, v_5, v_6, v_8\}$$

$$T(v_4) = \{v_3, v_4\}$$

$$T(v_7) = \{v_7\}$$

となる.

手続き ADDを実行するには,  $M$ が堅固であることが前提であり, 手続き DELETEを実行するには,  $M$ が堅固で道状境界を持つことが前提である. また二つの手続きによって堅固であること, 道状境界を持つことは保存される. 手続き TERRITORY\_MAPによって構成された最適勢力圏図は堅固で道状境界を持つので, 母点の付加や削除による  $t$ 回の最適勢力圏図の修正を  $O(t \log n)$ の手間で行うことが可能である.

また記憶容量は, 容量保存平衡木に  $O(n)$ , また list  $(v)$ は, 各  $v$ の正の線度を  $d$ とすると  $O(d)$ であるので list  $(v)$ 全部で  $O(n)$ である. よって全体の記憶容量は  $O(n)$ である.

5. 容量保存平衡木の応用

この章では, 容量関数が次の三つの場合, 容量保存平衡木を構成する方法と手間について述べる.

5.1 最大流量

$N$ を無向ネットワークとすると文献(8)では,  $N$ の任意の2点  $u, v$ に対して, 最大流量が等しくなるような木構造を持つ無向ネットワーク  $T$ を構成している. よってこの無向ネットワークの最適勢力圏図は,  $T$ の容量保存平衡木における最適勢力圏図を構成すれば得られる.  $N$ の点数を  $n$ , 枝数を  $m$ とすると,  $T$ を構成する手間は,  $n-1$ 回2点間の最大流量を算出しているので,  $O(n^2 m \log n)$ である.

5.2 単一ルートによる最大通信容量<sup>(13)</sup>

$N$ を無向ネットワークとし,  $P$ を  $u, v$ 間の道とする. このとき  $P$ 上の枝の重みの最小値を  $P$ の通信容量と呼ぶ.  $u, v$ 間の最大容量のルート (maximum capacity root) とは,  $u, v$ 間の通信容量最大の道であり, このときの通信容量を  $\gamma(u, v)$ とすると容量関数

となる。文献(14)から  $N$  と  $N$  の最大木  $T$  における  $\gamma(u, v)$  の値は等しい。よってこの無向ネットワークの最適勢力圏図は、 $T$  の容量保存平衡木における最適勢力圏図を構成すれば得られる。 $N$  の点数を  $n$ 、枝数を  $m$  とすると、最大木  $T$  を構成する手間は、 $O(m+n \log n)^{(15)}$  である。

### 5.3 一般の容量関数

点集合が  $V$  である一般の容量空間において、すべての2点間の容量が求められているとする。このとき点集合を  $V$  とし、すべての相異なる2点  $u, v$  を枝で結び、 $w(u, v) = \gamma(u, v)$  と重みを付けた無向ネットワークを  $N$  とする。すると、文献(8)より  $N$  の最大木  $T$  を構成すれば、 $T$  における  $u, v$  間の最大流量は  $\gamma(u, v)$  となる。よってこの容量空間における最適勢力圏図は、 $T$  の容量保存平衡木における最適勢力圏図を構成すれば得られる。 $N$  の点数を  $n$ 、枝数を  $m$  とすると、 $m = n(n-1)/2$  であるので、 $T$  を構成する手間は、 $O(n^2)$  である。

## 6. むすび

容量空間における最適勢力圏図に、母点が付加されたり削除された場合は、勢力圏図の局所的な修正で済むことがわかった。特に無向ネットワークにおける最大流量を容量関数とする場合は、 $k-1$  回最大流量を求めることで最適勢力圏図を構成することができた。また容量空間から容量保存平衡木を構成すれば、母点の付加や削除に伴う最適勢力圏図の修正が  $O(\log n)$  の手間で開催であることを示した。この容量保存平衡木は母点集合の変化には便利であるが、他の変化、例えば最大流量を容量関数とするとき、無向ネットワークの一部の枝の重みが増加した場合の最適勢力圏図の修正方法などについては今後の課題である。

また本文では述べなかったが、容量公理(II)を除いた場合(有向容量空間<sup>(6)</sup>)といわれる、有向ネットワークにおける最大流量を容量関数とする空間が代表的な例)における最適勢力圏図についての考察も重要な課題である。

謝辞 日頃御指導頂く、新潟大・工・阿部武雄教授に感謝の意を表する。

### 文 献

- (1) 森泉 隆, 築山修治, 篠田庄司, 仙石正和, 白川 功: “ネットワーク上の最適点充足勢力圏図”, 信学論(A), J71-A, 10, pp.1917-1929 (昭63-10).
- (2) 伊理正夫監修, 腰塚武志編集: “計算幾何学と地理情報処

理”, 共立出版(昭61).

- (3) F. P. Preparata and M. I. Shamos: “Computational Geometry”, Springer-Verlag, New York (1985).
- (4) G. Y. Handler and P. B. Mirchadani: “Location on Networks”, MIT Press, London (1979).
- (5) T. B. Boffey: “Graph Theory in Operations Research”, Macmillan Press, London (1982).
- (6) 篠田庄司, 仙石正和: “空間の変形とネットワークの点の中心らしさを測る関数の理論”, 信学論(A), J69-A, 1, pp. 42-53 (昭61-01).
- (7) 伊理正夫ほか: “演習グラフ理論”, コロナ社 (1983).
- (8) R. E. Gomory and T. C. Hu: “Multi-terminal network flows”, J. Soc. Indust. Appl. Math., 9, 4, pp. 551-570 (1961).
- (9) D. D. Sleator and R. E. Tarjan: “A Data Structure for Dynamic Trees”, Proceedings of the 13th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, Milwaukee, Wisconsin, pp. 114-122 (1981).
- (10) J. B. Kruskal, Jr.: “On the Shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem”, Proc. Amer. Math. Soc., 71, 1, pp. 48-50 (1956).
- (11) A. V. Aho, J. E. Hopcroft and J. D. Ullman: “The Design and Analysis of Computer Algorithms”, Addison-Wesley, Reading, Mass (1974).
- (12) R. E. Tarjan: “Data Structures and Network Algorithms”, Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, Pennsylvania (1983).
- (13) 尾崎, 白川, 翁長: “グラフ理論”, コロナ社 (1975).
- (14) T. C. Hu: “The maximum capacity route problem”, J. Opns. Res., 9, pp. 898-900 (1960).
- (15) M. L. Fredman and R. E. Tarjan: “Fibonacci heaps and their uses in improved network optimization algorithms”, Proceedings of the 25th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, Singer Island, Florida, pp. 338-346 (1984).
- (16) 田村 裕, 仙石正和, 篠田庄司: “無向フローネットワークにおける Voronoi 図に関する考察”, 信学技報, CAS87-158 (1987-09).
- (17) H. Tamura, M. Sengoku and S. Shinoda: “On the Voronoi diagram of a nondirected flow network”, Proc. IEEE International Symposium on Circuit and Systems, 2, pp. 1321-1324 (1988).

(平成元年2月9日受付)



田村 裕

昭57新潟大・教育卒。昭61同大大学院理学研究科修士課程了。現在、同大学院自然科学研究科博士課程在学中。グラフ理論とその応用、計算幾何学とその応用の研究に従事。





仙石 正和

昭42新潟大・工・電気卒。昭47北大大学院博士課程了。工博。同年北大・工・電子助手。新潟大・工・情報助教授を経て、現在、同教授。回路網理論，グラフ・ネットワーク理論，情報伝送特に移动通信の研究に従事。著書「演習グラフ理論」(共著)。



篠田 庄司

昭39中大・理工・電気卒。昭48同大学院博士課程了。工博。昭40中大研究助手。現在、同大理工学部電気工学科教授。グラフ・ネットワーク構造を持つシステムの解析，設計，制御の研究に従事。著書「最新回路理論」，「回路解析」，「演習グラフ理論」

など。