論　文

一部の最大流量からの無向フローネットワークの実現

正　員　田村　　裕[†]　　正　員　仙石　正和[†]
正　員　篠田　庄司[††]　　正　員　阿部　武雄[†]

Realization of an Undirected Flow Network from a Subset of the Set of the Maximum Flow Values (Terminal Capacities) between Every Pair of Vertices

Hiroshi TAMURA[†], Masakazu SENGOKU[†], Shoji SHINODA[††] *and* Takeo ABE[†], *Members*

あらまし　ある点集合において，すべての2点間の最大流量を与え，それらが無向フローネットワーク上に実現できるかどうかの判定や，実際にフローネットワークを構成する問題については多くの研究がなされている．ところで，輸送網などを設計する際には，すべての都市間ではなく一部の重要都市間の輸送量のみが満足されることが要求される場合がある．そこで本論文では，一部の最大流量を与えた場合の無向フローネットワーク上への実現について論ずる．まず無向フローネットワーク上へ実現できるかどうかの判定アルゴリズムを与えるが，これは，これまでに得られている結果を補足的に拡張したものとなっている．次に，一部の最大流量を与えた時点で自動的に決定してしまう，与えられた以外の最大流量を求める問題について考察し，そのアルゴリズムを与える．そして，このアルゴリズムに用いる簡易化ネットワークを構成することで，与えられた最大流量から不要なものを除くことが可能であり，この問題を最短路問題に帰着させることが可能であることを示している．

1. まえがき

ネットワーク上で定式化される対象物の中で，特に輸送網等のように流れという現象が工学上しばしば問題になる．フローネットワークは，この流れという現象をモデル化したものである．フローネットワークにおいては，2点間の最大流量が2点間の関係を表す基本的な量である．各2点間の最大流量を行列によって表現したものを端子容量行列と呼び，ある行列が端子容量行列となるための必要十分条件[(1)]や，端子容量行列を満足するフローネットワークを構成する問題[(2),(3)]は，興味ある重要な問題であり，現在まで多くの研究がなされている．フローネットワークを実現する問題は，行列のすべての要素が与えられている場合，それが端子容量行列となるかどうかを判定するものである．

ところで輸送網などを設計する際には，すべての都市間ではなく，少なくともある一部の重要都市間の輸送量が満足されることが要求される場合がある．この場合の問題は，従来のすべての都市間の輸送量を与えてから，フローネットワークに実現できるかどうかを判定する，つまり行列の要素をすべて与えてそれが端子容量行列となるかどうかを判定するという問題とは異なる．

本論文では，一部の最大流量を与えたとき，それらが無向フローネットワーク上に実現可能であるための必要十分条件を与えると共に，実現可能かどうかを判定するアルゴリズムを提案している．

またそれが無向フローネットワーク上に実現可能である場合，無向フローネットワークの性質から，与えられた最大流量以外のいくつかの最大流量が自動的に決定されることがある．輸送網の設計の際には，ある2都市間の輸送量が，既に与えられた一部の重要都市間の輸送量の関係から決まっているのかどうかを知りたい場合もある．そこで後半では，2都市間の輸送量

† 新潟大学工学部情報工学科，新潟市
Faculty of Engineering, Niigata University, Niigata-shi, 950-21 Japan
†† 中央大学理工学部電気工学科，東京都
Faculty of Science and Engineering, Chuo University, Tokyo, 112 Japan

が自動的に決定されるための必要十分条件を与える．そして，その輸送量を求めるのに便利な簡易化ネットワークと呼ばれるネットワークを構成し，自動的に決定されるかどうかを判定するアルゴリズムを提案している．そして最後にこの簡易化ネットワークのもつ注目すべき性質について述べている．

なお定義なしで用いる用語は文献(4)によるものとする．

2. 準　　備

［定義1］ 点集合を V，枝集合を E とする単純無向グラフ $G=(V,E)$ の各枝 $e\in E$ に非負の枝容量 $c(e)$ が付与されたネットワーク $N=(G,c)$ を無向フローネットワークと呼ぶ．枝 e の両端点が x,y であるとき $e=(x,y)$ と表すこととする．また G を N の基礎グラフと呼び，ネットワーク N における点集合，枝集合をそれぞれ $V(N),E(N)$ と表すこともある．

無向フローネットワーク N 上の2点 x,y 間の最大流量を $g(x,y)$ で表し，x,y 間の容量と呼ぶこととする．特に $g(x,x)=\infty$ と定める．□

［定義2］ 無向フローネットワーク N 上の2点を，x_i,x_j とすると，i,j 成分が $g(x_i,x_j)$ である $n\times n$ 行列 C を N の端子容量行列と呼ぶ．但し n は N の点数とする．□

本論文では，便利のために容量をネットワークを用いて表す．なお，本論文で扱うネットワークの枝の重みは，非負であるものとする．

［定義3］ M を点集合 $V(M)$，枝集合 $E(M)$ とする単純無向グラフの各枝 (x,y) に重み $w(x,y)$ が付与されたネットワークとする．また $N=(G,c)$ を無向フローネットワークとする．このとき各 $(x,y)\in E(M)$ に対して，$w(x,y)=g(f(x),f(y))$ を満たす $V(M)$ から $V(N)$ への全単射 f が存在するならば，M を N の端子容量行列のネットワーク表現と呼ぶ．

なお，簡単のため M と N の点集合は同一のものを用い f を省略する場合もある．□

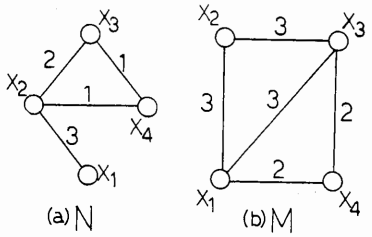

図1　無向フローネットワーク N とその端子容量行列のあるネットワーク表現 M

Fig. 1　An undirected flow network N and a network representation M of the terminal capacity matrix of N.

定義よりある端子容量行列の一部分が表されていれば，その端子容量行列のネットワーク表現と呼ぶ．ある端子容量行列のネットワーク表現から，いくつかの枝を開放除去したものも，ネットワーク表現となるので，ある無向フローネットワークの端子容量行列のネットワーク表現は，複数存在する．例を図1に示す．図1において M は N の端子容量行列のネットワーク表現である．なお N,M における枝上の数字は，それぞれ枝容量，重みを表すものとする．

［定義4］ ネットワーク M がある無向フローネットワークの端子容量行列のネットワーク表現となっているとき，M をフロー実現可能ネットワークと呼ぶ．□

3. フロー実現可能ネットワーク

3.1 フロー実現可能ネットワークであるための必要十分条件

まえがきで述べたように，本論文の目的の一つは，一部の容量を与えたとき，それらが無向フローネットワーク上に実現可能であるための必要十分条件を与えることである（なお容量を与える場合，$g(x,x)=\infty$ と定めてあるので，$g(x,x)$ は考えないものとする）．よって2.の定義から，このことは M がフロー実現可能ネットワークであるための必要十分条件を与えることと換言できる．結果的には，以下の結果は文献(1)，(2)における結果を補足的に拡張したものとなっている．

まず，次の定理は G. E. Gomory と T. C. Hu による．

［定理1］[1] 各成分が非負であり，対角成分が∞である正方行列 A が，ある無向フローネットワークの端子容量行列であるための必要十分条件は，すべての相異なる i,j,k において，

$$A(i,k)\geqq\min\{A(i,j),A(j,k)\}$$

が成り立つことである．但し $A(i,j)$ は行列の i,j 成分を表すものとする．□

よって，次のような無向フローネットワークの容量に関する不等式が得られる．

［系1］ 無向フローネットワーク N の相異なる3点 x,y,z において，

$$g(x,z)\geqq\min\{g(x,y),g(y,z)\}$$

が成り立つ． □

定理1の行列 A をネットワークで言い換えると次のようになる．

［定理2］ 基礎グラフ G が完全グラフであるネットワーク M が，フロー実現可能ネットワークであるための必要十分条件は，すべての相異なる3点 x, y, z に対して，

$$w(x, z) \geqq \min\{w(x, y), w(y, z)\}$$

が成り立つことである． □

M を一般のネットワークに拡張するために，定理2の不等式が十分条件であることを次に示しておく．

十分条件の証明に必要な次の補題は文献(5)による．

［補題1］ T が無向ネットワークの最大木であるための必要十分条件は，任意の補木枝 (x, y) に対する基本閉路を $((y, x), (x, z_1), (z_1, z_2), \cdots, (z_k, y))$ とすると，

$$w(x, y) \leqq \min\{w(x, z_1), \cdots, w(z_k, y)\}$$

が成り立つことである． □

今，基礎グラフ G が完全グラフであるネットワーク M の最大木を T とし，x, y を相異なる2点とする．

ここで，T の枝の重みを枝容量と考え，無向フローネットワークとみなすこととする．

$(x, y) \in E(T)$ であれば，木の性質より $g_T(x, y) = w(x, y)$ （$g_T(x, y)$ は T における x, y 間の容量を表す）．

$(x, y) \notin E(T)$ であれば，(x, y) は補木枝である．基本閉路を $((y, x), (x, z_1), (z_1, z_2), \cdots, (z_k, y))$ とし，$m = \min\{w(x, z_1), \cdots, w(z_k, y)\}$ とおくと，仮定から，$w(x, z_2) \geqq \min\{w(x, z_1), w(z_1, z_2)\}$ であるので，$m \leqq \min\{w(x, z_2), \cdots, w(z_k, y)\}$ となる．これを繰り返すことにより，$w(x, y) \geqq m$ が得られる．また補題1より，$w(x, y) \leqq m$ であるので，$w(x, y) = m$ となる．木の性質から $m = g_T(x, y)$ であるので，$w(x, y) = g_T(x, y)$ となる．

よって，最大木 T の端子容量行列のネットワーク表現が M となり十分性の証明が終了する．

ところでこの十分性の証明で重要なのは，(x, y) が M の枝であって，M の任意の x-y 道 P に対して $w(x, y) \geqq \min\{w(e) \mid e$ は P 上の枝$\}$ が成り立っているならば，M の最大木 T を無向フローネットワークとみなした場合，$w(x, y) = g_T(x, y)$ となることである．

つまり，M が一般の無向ネットワークの場合，すべての枝 (x, y) に対し，P が x-y 道であるならば，$w(x, y) \geqq \min\{w(e) \mid e$ は P 上の枝$\}$ であることが，M がフロー実現可能ネットワークであるための十分条件である．

逆に M がフロー実現可能ネットワークであると仮定し，N の端子容量行列のネットワーク表現であるとする．(x, y) を M の枝とし，$((x, z_1), (z_1, z_2), \cdots, (z_k, y))$ を M 上の x-y 道とすると，N においては系1を繰り返し用いることにより，

$$g_N(x, y) \geqq \min\{g_N(x, z_1), \cdots, g_N(z_k, y)\}$$

が成り立つ．よって M においては，

$$w(x, y) \geqq \min\{w(x, z_1), \cdots, w(z_k, y)\}$$

となり，先の条件は必要条件にもなり得る．

［定理3］ M がフロー実現可能ネットワークであるための必要十分条件は，すべての枝 (x, y) に対し，P が x-y 道であるならば，

$$w(x, y) \geqq \min\{w(e) \mid e \text{ は } P \text{ 上の枝}\}$$

であることである． □

3.2 フロー実現可能ネットワークの判定アルゴリズム

この節では，定理3を用いて無向ネットワーク M が，フロー実現可能ネットワークであるかどうかを判定する手続き JUDGEMENT を提案する．このアルゴリズムは，最小木問題における Kruskal の算法[6],[7]を応用したものである．また UNION-FIND 問題[8]における操作も応用することとする．

［定義5］ 木の集まりからなる有向グラフを森と呼ぶ．F を森とし，点 x から y への有向枝が存在するならば，x は y の親と呼び，y は x の子と呼ぶ．点 x から y への有向道が存在するならば，x は y の先祖と呼び，y は x の子孫と呼ぶ．また先祖の存在しない点を根と呼ぶ． □

手続き ROOT (x) は，x の属する木の根を得る手続きである．

procedure ROOT (x)
  begin
R1 **while** father $(x) \neq 0$ **do** $x :=$ father (x);
  (* father (x) は x の親を表す．親が存在しない場合は0とする*)

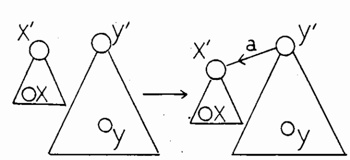

図2 UNION (x, y, a)
Fig. 2 UNION (x, y, a).

```
R2      return (x)
     end
```

手続き UNION (x, y, a) は，y の属する木の点数の方が x の属する木の点数より少なくないとした場合，x の属する木の根の親を y の属する木の根とし，重みを a とする手続きである（図２）．

```
procedure UNION (x, y, a)
     begin
U1      if ROOT (x)≠ROOT (y) then
           begin
U2            if count (ROOT (x))> count (ROOT
                 (y))
                 then exchange x and y;
              (*z が根であるとき，count (z) は z の
              属する木の点数を表す*)
U3            x′:=ROOT (x);
U4            y′:=ROOT (y);
U5            father (x′):=y′;
U6            w(y′, x′):=a;
U7            count (y′):=count (y′)+count (x′)
           end
     end
```

以上二つの手続きを用いた，判定アルゴリズム JUDGEMENT を次に示す．

```
procedure JUDGEMENT
     begin
J1      枝 e を w(e) の大きい順に 1 から m まで並べ
        る
        (* e_i=(x_i, y_i) とし，w(e_1)≧…≧w(e_m) とす
        る*);
J2      for each x∈V(M) do
           begin
J3            father (x):=0; count (x):=1
           end;
J4      s:=1;
J5      for i=1 to m do
           begin
J6            if ROOT (x_i)=ROOT (y_i)
                    then return (false);
J7            if i<m then
                 begin
J8                  if w(e_i)>w(e_{i+1}) then
                       begin
J9                        for j=s to i do
                             UNION (x_j, y_j,
                             w(e_j));
J10                       s:=i+1
                       end
                 end
              else
                 begin
J11                 for j=s to m do
                       UNION (x_j, y_j, w(e_j))
                 end
           end;
J12     return (true)
     end
```

3.3 アルゴリズムの意味と計算量

M の枝の重みを大きい方から順に $a_1>a_2>\cdots>a_k>\cdots>a_{k_0}$ とする．このとき点集合が $V(M)$，枝集合が $\{(x, y) \mid w(x, y)\geqq a_k\}$ であるような M の部分ネットワークを M_k と表す．特に，点集合 $V(M)$ だけからなる null ネットワークを M_0 と定める．また M_k に対して手続き JUDGEMENT を実行したときのデータの木構造を F_k と表し，$F=F_{k_0}$ と定める．F_k の構成方法より M_k の各連結成分と F_k の各連結成分の点集合は等しい．

今，false が出力されたとし，ROOT (x_i)=ROOT (y_i), $w(x_i, y_i)=a_k$ であったとする．すると ROOT (x_i)=ROOT (y_i) であるので，F_{k-1} においては x_i と y_i は同じ連結成分に属する．よって M_{k-1} においても同じ連結成分に属するので，各枝の重みが a_k より大きい x_i-y_i 道 P が存在する．すると，

$w(x_i, y_i)<\min\{w(e) \mid e$ は P 上の枝$\}$

となり，定理３より M はフロー実現可能ネットワークではない． □

また，M がフロー実現可能ネットワークでないとすると定理３より，

$w(x, y)<\min\{w(e) \mid e$ は P 上の枝$\}$

となる M の枝 (x, y) と x-y 道 P が存在する．$w(x, y)=a_k$ とすると，x, y は M_{k-1}，つまり F_{k-1} において同じ連結成分に属する．よってJ6においてROOT (x)=ROOT (y) となり false が出力される．

次に，計算量について考察する．M の点数を n とする．J１で m 個の枝をソーティングしているのでこの手間が $O(m \log n)$，ROOT，UNION の操作の手間は $O(\log n)$ であり，$O(m)$ 回の ROOT，UNION の操作を行い，各操作は $O(\log n)$ の手間なので，このアルゴ

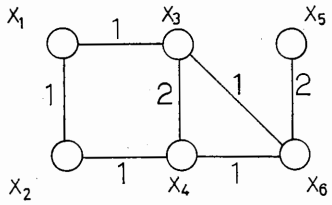

図 3　ネットワーク M
Fig. 3　A network M.

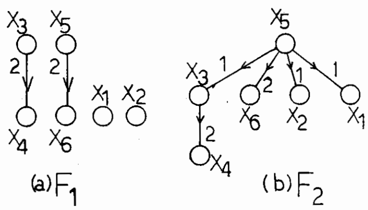

図 4　データ構造
Fig. 4　The data structure.

リズム全体の手間は，$O(m \log n)$ である．

例として，手続き JUDGEMENT を用いて図 3 のネットワーク M がフロー実現ネットワークであるかどうかを判定する．J 1 での枝の重みのソーティングの結果，枝の添数が下記のように定められたとする．

$e_1=(x_3, x_4)$, $e_2=(x_5, x_6)$, $e_3=(x_3, x_6)$,
$e_4=(x_4, x_6)$, $e_5=(x_1, x_3)$, $e_6=(x_1, x_2)$,
$e_7=(x_2, x_4)$

$a_1=2$, $a_2=1$ であり，F_1, F_2 をそれぞれ図 4(a)，(b)に示す．データ構造が F_0 (null ネットワーク) のとき，J 6 で $i=1, 2$ (つまり e_1, e_2) に関する判定を行う．F_1 のとき，$i=3, \cdots, 7$ について判定を行う．いずれの場合も枝の両端点の根が異なっているので，true が出力され M はフロー実現可能ネットワークとなる．

4. フロー実現可能ネットワークからの容量の決定

4.1 フロー実現可能ネットワークの閉包

前章で取り上げた系 1 の無向フローネットワークの容量に関する関係式を用いることで，与えられた容量の関係から，未知の容量を決定することが可能となる．今，相異なる頂点 x, y, z において，$g(y, z)$ が与えられ，$g(x, y)>g(y, z)$ であることがわかっているとする．このとき，$g(x, z)<g(y, z)$ と仮定すると，$g(x, y)>g(y, z)>g(x, z)$ となり，系 1 に矛盾する．$g(x, z)>g(y, z)$ と仮定した場合も同様に系 1 に矛盾するので，$g(x, z)$ の値は，容量の関係から $g(x, z)=g(y, z)$ と決定できる．

ネットワーク M にこの操作を用いたのが次の定義であり，また M がフロー実現可能ネットワークである場合には補題 2 が導ける．

［定義 6］　ネットワーク M において，$(x, y), (y, z) \in E(M)$, $(x, z) \notin E(M)$, $w(x, y)>w(y, z)$ であるとする．

このとき M に枝 (x, z) を付加し，$w(x, z)=w(y, z)$ とすることを，M に対する枝 (x, z) の D 付加と呼ぶ (定理 2 の不等式より導出 (derived) された枝の意味)．□

［補題 2］　M を無向フローネットワーク N の端子容量行列のネットワーク表現とし，M' を枝の D 付加を M から何回か繰り返したネットワークとするならば，M' も N の端子容量行列のネットワーク表現となる．□

M がフロー実現可能ネットワークのとき，枝 (x, y) の D 付加が可能であれば，$g(x, y)$ は一部の容量を与えた時点で決定されていたと考えることができる．

そこでこの章ではフロー実現可能ネットワーク M から簡易化ネットワークと呼ばれるネットワークを構成し，これを用いて M から決定されてしまう容量を求めるアルゴリズムを提案する．

［定義 7］　フロー実現可能ネットワーク M から，枝の D 付加を可能な限り繰り返して得られるネットワークを，M の閉包と呼び $C(M)$ と表す．

フロー実現可能ネットワーク M から $C(M)$ が一意に決定されることを，次に示す．

［補題 3］　M' と M'' がともにフロー実現可能ネットワーク M の閉包ならば $M'=M''$ である．

(証明)　M を無向フローネットワーク N の端子容量行列のネットワーク表現とする．補題 2 より M', M'' も N の端子容量行列のネットワーク表現であるので，(x, y) が M' においても M'' においても枝であれば，重みは等しい．よって M' と M'' の枝集合が等しいことを示せばよい．

M から順に枝 $(x_1, y_1), \cdots, (x_t, y_t)$ が D 付加され M' が得られたとする．M'' に属さない枝が存在したとし，その中で添数最小の枝を (x_s, y_s) とする．M に枝 $(x_1, y_1), \cdots, (x_{s-1}, y_{s-1})$ を加えたネットワークを L とすると，D 付加の定義から，L において $w(x_s, z)>w(z, y_s)$ なる点 z が存在すると考えてよい．s の最小性より，

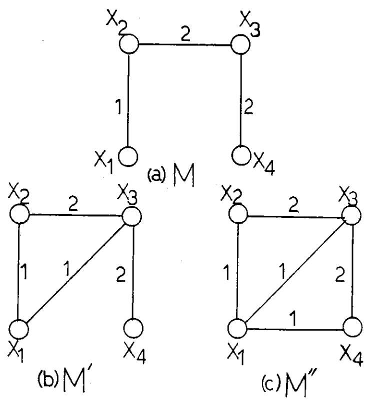

図5　フロー実現可能ネットワーク M の閉包
Fig. 5　The closure of M.

$(x_s, z), (z, y_s)$ は M'' の枝であるので (x_s, y_s) を M'' にD付加することができ，M'' が閉包であることに矛盾する．よって，枝 $(x_1, y_1), \cdots, (x_t, y_t)$ は M'' の枝でもあるので，M' の枝集合は M'' の枝集合に含まれる．逆も同様に示せるので M' と M'' の枝集合は等しい． □

閉包の例を示す．図5におけるネットワーク M は定理3よりフロー実現可能ネットワークである．$w(x_2, x_3) > w(x_1, x_2)$, $w(x_1, x_2) = 1$ なので，M に枝 (x_1, x_3) をD付加し重みを1としたネットワークを M' とする．$w(x_3, x_4) > w(x_1, x_3)$, $w(x_1, x_3) = 1$ なので，M' に枝 (x_1, x_4) をD付加し重みを1としたネットワークを M'' とする．M'' には枝のD付加はできないので，$C(M) = M''$ となる．

このように，フロー実現可能ネットワークの閉包を求めることで，与えられた以外の容量を決定することができるのだが，定理1は必要十分条件であるので，(x, y) が $C(M)$ の枝とならないならば，$g(x, y)$ は容量の関係からは決定できないことを意味する．この例では，M の閉包によって $g(x_2, x_4)$ を決定することはできない．$g(x_2, x_4)$ が2以上であれば，対角成分を ∞ とし，容量を行列で表現した場合，定理1の条件を満足するので端子容量行列となり，最初に与えられた容量の関係からは矛盾は生じない．

よってフロー実現可能ネットワーク M の閉包を求めることは，与えられた容量の関係から決定できるすべての容量を求めることである．

4.2　閉包の枝であるための必要十分条件

［定義8］　P を長さ1以上の道とする．このとき，P 上の枝の重みの最小値を $m(P)$ と表し，P を枝の列で表したとき，重みが $m(P)$ である枝の出現回数を $\#m(P)$ と表す．

P を $\#m(P) = 1$ であるような道とする．P が初等的な道であるとき単一最小枝道と称し，以下U道と略す． □

［補題4］　M をフロー実現可能ネットワークとする．このとき，P が M における $\#m(P) = 1$ であるような x, y 間の道であるならば，x, y 間に枝集合としては P の部分集合となるU道 P' で，$m(P') = m(P)$ となるものが存在する．

（証明）　(z_1, z_2) を，$w(z_1, z_2) = m(P)$ であるような P 上の枝とする．P の枝とそれに接続する点からなる M の部分ネットワークを L とし，L から枝 (z_1, z_2) を除いたネットワークを L' とする．L' が連結であれば，L' において，z_1, z_2 間の初等的な道 P'' が存在するので，$w(z_1, z_2) < \min\{w(e) \mid e$ は P'' 上の枝$\}$ となり，定理3より M がフロー実現可能ネットワークであることに矛盾する．よって L' は非連結であり，x と y は異なる連結成分に属する．

また $\#m(P) = 1$ であるので，枝 (z_1, z_2) は，P の枝の列に一度しか表れない．よって L' において，x と z_1，y と z_2 は，それぞれ同じ連結成分に属すると考えてよい．すると L' において，x から z_1 への初等的な道 P_1，z_2 から y への初等的な道 P_2 が存在する．P_1 と P_2 を枝 (z_1, z_2) でつなげば，枝の重みの最小値が $m(P)$ の x, y 間のU道となる． □

［定理4］　M をフロー実現可能ネットワークとする．$C(M)$ において，(x, y) が重み a の枝であるための必要十分条件は，M において x, y 間のU道 P で $m(P) = a$ なるものが存在することである．

（証明）　まず十分性を証明する．$P = ((x, z_1), (z_1, z_2), \cdots, (z_t, y))$ を x から y へのU道とし，$w(z_s, z_{s+1}) = a$ とする．すると $(z_s, z_{s+2}), (z_s, z_{s+3}), \cdots, (z_s, y), (z_{s-1}, y), (z_{s-2}, y), \cdots, (x, y)$ の順に枝のD付加が可能で重みはすべて a となるので十分性の証明終了．

次に必要性を証明する．(x, y) が M の枝であればそれ自身がU道となる．(x, y) が付加された枝であれば以下のとおりである．M に $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_i, y_i), \cdots, (x_r, y_r)$ の順に枝を付加して $C(M)$ が得られたとし，i に関する帰納法を用い，x_i, y_i 間にU道が存在することを示す．

$i = 1$ のとき，D付加の定義から $w(x_1, z) > w(z, y_1)$ なる点 z が存在するとしてよい．すると $((x_1, z), (z, y_1))$ は重み $w(x_1, y_1)$ の M におけるU道となる．

$i \leqq h$ のとき，x_i, y_i 間には $m(P_i) = w(x_i, y_i)$ なる M

におけるU道 P_i が存在すると仮定する．M に枝 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_h, y_h)$ を付加して得られたネットワークを M' とすると，M' においてD付加の定義から，$w(x_{h+1}, z') > w(z', y_{h+1}) = w(x_{h+1}, y_{h+1})$ なる点 z' が存在するとしてよい．帰納法の仮定から M における x_{h+1}，z' 間のU道 P' で $m(P') = w(x_{h+1}, z')$ なるものと，z', y_{h+1} 間のU道 P'' で $m(P'') = w(z', y_{h+1})$ なるものが存在する．P' と P'' を点 z' でつないだ道を P_0 とすると，P_0 は x_{h+1}, y_{h+1} 間の道で，$m(P_0) = w(z', y_{h+1}) = w(x_{h+1}, y_{h+1})$, $\# m(P_0) = 1$ となる．よって補題4より，x_{h+1}, y_{h+1} 間のU道 P で，$m(P) = w(x_{h+1}, y_{h+1})$ なるものが存在するので必要性の証明終了． □

4.3 閉包の枝の判定アルゴリズムと簡易化ネットワーク

次に，点対 (x, y) がフロー実現可能ネットワーク M の閉包の枝かどうかを，判定するのに便利な M の簡易化ネットワーク M^* を以下の手続き SIMPLIFICATION によって構成する．

procedure SIMPLIFICATION
    begin
S 1 M^* を点集合 $V(M)$ だけからなる null ネットワークとする；
S 2   枝 e を $w(e)$ の大きい順に1から m まで並べる（* $e_i = (x_i, y_i)$ とし，$w(e_1) \geqq \cdots \geqq w(e_m)$ とする *）；
S 3   **for** each $x \in V(M)$ **do**
      begin
S 4   father (x) : $=0$; count (x) : $=1$
      end；
S 5 $s := 1$；
S 6   **for** $i = 1$ **to** m **do**
      begin
S 7   **if** ROOT $(x_i) \neq$ ROOT (y_i) **then**
          begin
S 8   add (ROOT (x_i), ROOT (y_i)) to $E(M^*)$；
S 9 w(ROOT (x_i), ROOT (y_i)) : $= w(e_i)$
          end；
S 10   **if** $i < m$ **then**
          begin
S 11   **if** $w(e_i) > w(e_{i+1})$ **then**
              begin
S 12   **for** $j = s$ **to** i **do**
                UNION $(x_j, y_j, w(e_j))$；
S 13 $s := i+1$
              end
          end
          else
          begin
S 14   **for** $j = s$ **to** m **do**
              UNION $(x_j, y_j, w(e_j))$
          end
      end
    end

この手続き SIMPLIFICATION では，S 7～S 9 において M^* への枝付加，S 10～S 14 においては F への枝付加を実行している．なお，F や以降で用いる F_k, M_k, a_k は，**3.3** において定義したものである．

［定義9］ M をフロー実現可能ネットワークとするとき，手続き SIMPLIFICATION によって構成されたネットワークを，M の簡易化ネットワークと呼び，M^* と表す． □

（注意） S2の枝の重みによるソーティングのとき，同じ重みの枝の順序には任意性があるので，簡易化ネットワークは M から一意に構成されるとは限らない．

例えば図3のフロー実現可能ネットワーク M の枝が，**3.3** における例で示したようにソーティングされたとする．このとき，M の簡易化ネットワークは図6のようになる．

M_k^* を M_k の簡易化ネットワークとすると，M^* の構成方法より，M_k^* の各連結成分の点集合は，M_k, F_k のそれと等しくなる．

次の補題は F と M^* の構成方法より明らかであろう．

［補題5］ (x, y) が重み a_k なる F の枝であるならば，x も y も F_{k-1} における根である．また x が F_k に

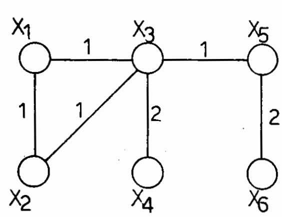

図6 簡易化ネットワーク M^*
Fig. 6 A simplified network M^*.

おいて根であるならば，x は F_h $(h \leqq k)$ における根である．

また，(x, y) が M^* の枝の場合も同様のことが言える．□

[補題 6]　M^* において $(x, x'), (y, y') \in E(M^*)$ とし，P を x-y 道とする．このとき $w(x, x') < m(P)$, $w(y, y') < m(P)$ であるならば，$x = y$ である．

また，F においても同様のことが言える．

(証明)　$w(x, x') \leqq w(y, y')$ としてよい．$w(y, y') = a_k$ とすると，補題 5 より x, y は F_{k-1} における根となる．x-y 道 P が存在することより x と y は F_{k-1} において同じ連結成分に属する．各連結成分に根は一つであるので $x = y$．

また F においても同様に証明が可能である．□

[補題 7]　M^* において，P, P' がともに x, y 間の初等的な道であるならば，$m(P) = m(P')$ である．

(証明)　$m(P) \neq m(P')$ であったとする．$m(P) < m(P')$ であると考えてよい．P における枝を順に $e_1, e_2, \cdots, e_h$ とし，$e_i = (z_i, z_{i+1})$ であるとする ($x = z_1$, $y = z_{h+1}$ である)．$w(e_i) = m(P)$ なる i の最小値を h'，最大値を h'' とする．$m(P) = a_k$ とすると，補題 5 より $z_{h'}$ も $z_{h''+1}$ も F_{k-1} における根となる．ここで $z_{h'}$ から道 P を x まで戻り，P' で y に行き，また P で $z_{h''+1}$ まで戻る道を考えると (図 7)，各枝の重みは a_k より大きい．よって補題 6 より $z_{h'} = z_{h''+1}$ となり P が初等的な道であることに矛盾する．□

[補題 8]　P を M^* における $m(P) = a_k$ なる初等的な x-y 道とする．今，F_{k-1} における x の根を $\mathrm{ROOT}_{k-1}(x)$ と表すこととすると，P は $\mathrm{ROOT}_{k-1}(x)$ $(= x'$ とする$)$，$\mathrm{ROOT}_{k-1}(y)$ $(= y'$ とする$)$ を通り，P における x', y' 間の部分道 P' の枝の重みは a_k である．

また，F においても同様のことが言える．

(証明)　P における枝を順に $e_1, e_2, \cdots, e_h$ とし，$e_i = (z_i, z_{i+1})$ であるとする ($x = z_1, y = z_{h+1}$ である)．$w(e_i) = m(P)$ なる i の最小値を h' とする．補題 5 より $z_{h'}$ は F_{k-1} における根となり，x と $z_{h'}$ は $M_{k-1}{}^*$ において同じ連結成分に属するので $z_{h'} = \mathrm{ROOT}_{k-1}(x) = x'$ となる．同様に P が y' を通ることも示せる．

x', y' 間の部分道 P' 上に a_k 以外の枝 e が存在した場合，a_k の最小性から e の重みは a_k より大きい．すると e を含む P の部分道 P'' で補題 6 の仮定を満たすものが存在する．すると補題 6 より P'' の両端点が一致してしまい，P が初等的であることに矛盾する．

また F における場合も同様の証明が可能である．□

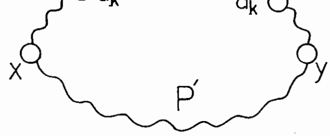

図 7　補題 7 の証明のための図
Fig. 7　Explanation for the proof of Lemma 7.

[定理 5]　M をフロー実現可能ネットワーク，M^* を M の簡易化ネットワークとする．

すると，M^* もフロー実現可能ネットワークとなり，$C(M^*) = C(M)$ である．

(証明)　M^* がフロー実現可能ネットワークでないと仮定すると，定理 3 より M^* において，$w(x^*, y^*) < \min\{w(e) \mid e$ は P^* 上の枝$\}$ なる枝 (x^*, y^*) と x^*-y^* 道 P^* が存在する．よって補題 6 より $x^* = y^*$ となる．M^* の構成方法から自己閉路は含まないのでこれは矛盾である．

次に，$C(M^*) = C(M)$ であることを示す．$(x, y) \in E(C(M))$ とすると，定理 4 より M において x, y 間の U 道 P が存在する．$m(P) = a_k$ とし，(x', y') を重みが a_k なる P 上の枝とする．$(x', y') \in E(M)$ であるので，$x'' = \mathrm{ROOT}_{k-1}(x')$, $y'' = \mathrm{ROOT}_{k-1}(y')$ とすると，M^* の構成方法より $(x'', y'') \in E(M^*)$ である．また x と x''，y と y'' は $M_{k-1}{}^*$ において同じ連結成分に属するので，(x'', y'') を通る x, y 間の U 道 P^* が存在し，$m(P^*) = w(x'', y'') = a_k$ となる．よって定理 4 より $(x, y) \in E(C(M^*))$, $w(x, y) = a_k$ となる．

逆の $(x, y) \in E(C(M^*))$, $w(x, y) = a_k$ の場合も，ほぼ同様の証明で $(x, y) \in E(C(M))$, $w(x, y) = a_k$ を示すことができる．□

次にこの簡易化ネットワークを用いて，点対 (x, y) が $C(M)$ の枝かどうかを判定する手続き DETERMINE_$w(x, y)$ を示す．手続き DETERMINE_$w(x, y)$ は，(x, y) が $C(M)$ の枝であれば枝の重みを返し，$C(M)$ の枝でないなら nil を返す手続きである．

procedure DETERMINE_$w(x, y)$

　begin

D1　　F における (初等的な) x-y 道 P を求め，P が存在しない場合は，nil を返す；

D 2　枝の重みがすべて $m(P)$ である P の最長の部分道を求め，部分道の端点を x_0, y_0 とする（＊この部分道以外の P の枝の重みは，$m(P)$ より大きい＊）；

D 3　**if** $(x_0, y_0)\in E(M^*)$

then return $(w(x_0, y_0))$

else return (nil)

end

4.4 アルゴリズムの意味と計算量

今，$(x_0, y_0)\in E(M^*)$, $w(x_0, y_0)=a_k$ であったとする．F_{k-1} において，x と x_0, y と y_0 は同じ連結成分に属するので，$M_{k-1}{}^*$ においても x と x_0, y と y_0 は同じ連結成分に属する．よって M^* において x, y 間に枝 (x_0, y_0) を通る U 道が存在し，$(x, y)\in E(C(M^*))$，つまり $(x, y)\in E(C(M))$ となり重みは a_k である．

逆に $(x, y)\in E(C(M))$, $w(x, y)=a_k$ であったとする．すると定理 4，5 より M^* において x, y 間の U 道 P^* が存在し，$m(P^*)=a_k$ である．今，P^* 上の枝 (x', y') の重みが a_k であったとする．すると補題 8 より $x'=\mathrm{ROOT}_{k-1}(x)$, $y'=\mathrm{ROOT}_{k-1}(y)$ となる．ところで，x, y は F_{k-1} において異なる連結成分に属し，F_k においては同じ連結成分に属するので，F における初等的な x, y 間の道を P とすると $m(P)=a_k$ となる．補題 8 より P も x', y' を通り，x', y' 間の枝の重みはすべて a_k である．よって D 2 において $x_0=x'$, $y_0=y'$ となり，$w(x', y')=a_k$ であることより a_k が出力される．

次に計算量について考察する．まず，手続き SIMPLIFICATION による M の簡易化ネットワーク M^* の構成である．m 個の枝のソーティングのほかには，M^* に加える枝の決定に $O(\log n)$ かかるので，この手続きには $O(m \log n)$ の手間がかかる．

次に手続き DETERMINE_$w(x, y)$ によって，点対 (x, y) が $C(M)$ の枝かどうかを判定するのだが，ネットワーク M^* がリスト表現されていると，ある点対が M^* の枝かどうかを判定するのに最悪の場合 $O(n)$ かかる．よって手続き DETERMINE_$w(x, y)$ の手間は $O(n)$ である．

また手続き JUDGEMENT を応用して，直接 $C(M)$ を構成することも可能であるが（構成方法は文献(9)参照），$C(M)$ の構成に，$m=O(n)$ であっても $O(n^2)$ の手間がかかる場合がある．記憶領域も M^* を構成する方が少なくて済む．

例として，フロー実現可能ネットワーク M として図 3 を考える．すると F は図 4(b) の F_2 であり，M の簡易化ネットワーク M^* は図 6 である．

今，(x_1, x_4) が $C(M)$ の枝かどうかを判定するものとする．F における x_1-x_4 道は，(x_1, x_5, x_3, x_4) であり，D 2 の x_0, y_0 に当たるのは，x_1 と x_3 である．(x_1, x_3) は M^* の枝であるので，(x_1, x_4) は $C(M)$ の枝となり，重みは $w(x_1, x_4)=1$ である．

5. 簡易化ネットワークの性質

この章では前章で定義した簡易化ネットワークについての二つの注目すべき性質について述べる．

［定理 6］ M^* において x, y 間の U 道が存在するための必要十分条件は，M^* の基礎グラフにおける x, y 間の最短路が U 道であることである．

（証明） 十分性は明らかであるので必要性を証明する．M^* において x, y 間に U 道 P が存在するとする．P' を M^* の基礎グラフにおける x, y 間の最短路とし，$m(P')=a_k$ とする．補題 7 より $m(P)=m(P')$ であるので，補題 8 から P も P' も $\mathrm{ROOT}_{k-1}(x)$ $(=x'$ とする$)$，$\mathrm{ROOT}_{k-1}(y)$ $(=y'$ とする$)$ を通る．P は U 道であるので $(x', y')\in E(M^*)$．よって P' が最短路であることより，(x', y') は P' 上の枝となるので，P' は U 道である．□

前章では，M から F と M^* を構成し，M^* と F の両方を使って点対 (x, y) が閉包の枝かどうかを判定した．定理 6 は点対 (x, y) が閉包の枝かどうかは M^* の基礎グラフにおける最短路が U 道であるかどうかを判定すればよいことを示している．最短路が決定できればそれが U 道かどうかの判定は容易であるので，M^* を構成することで最短路問題に帰着することができる．よって点対 (x, y) が閉包の枝であるかどうかは M^* のみを用いても容易であることがわかる．例えば，図 3 の M における点対 (x_1, x_4) が $C(M)$ の枝かどうかを判定するには，図 6 の簡易化ネットワーク M^* において x_1, x_4 間の最短路が U 道であるかどうかを判定すればよい．最短路 P は (x_1, x_3, x_4) となり，U 道であるので (x_1, x_4) は $C(M)$ の枝となり重みは $m(P)$ $(=1)$ である．

次に簡易化ネットワークは，閉包が等しくなるフロー実現可能ネットワークの中で枝数最小であることを示す．

次の補題は明らかである．

［補題 9］ M, M' をフロー実現可能ネットワークとする．$C(M)=C(M')$ ならば，M と M' の枝の重みの集合は等しい．□

［補題 10］ M, M' をフロー実現可能ネットワークとし，$C(M)=C(M')$ とする．すると各 M_k, M_k' において，各連結成分の点集合は等しい．

（証明） 補題 9 より M, M' の枝の重みの集合は等しいので，大きい方から順に $a_1>a_2>\cdots>a_k>\cdots>a_{k_0}$ とする．

M_k, M_k' の連結成分の点集合で等しくないものが存在するとし，x, y は M_k において異なる連結成分，M_k' においては同じ連結成分に属するとする．P' を M_k' における x-y 道とし，P' 上の点を x の方から順に $x_1(=x), x_2, \cdots, x_t$ $(=y)$ とする．M_k において x の属する連結成分を X とすると，x と y は異なる連結成分に属するので，$x_1, \cdots, x_i\in V(X), x_{i+1}\notin V(X)$ なる i が存在する．(x_i, x_{i+1}) は M_k' の枝であるので，$(x_i, x_{i+1})\in C(M'), w(x_i, x_{i+1})\geqq a_k$ である．ところが M_k においては，x_i, x_{i+1} 間に $m(P)\geqq a_k$ なる道は存在しないので $C(M)$ において $w(x_i, x_{i+1})\geqq a_k$ とはなり得ない．よって M と M' の閉包が等しいことに矛盾する．

x, y は M_k において同じ連結成分，M_k' において異なる連結成分に属する場合も同様に矛盾が生じるので，M_k と M_k' の各連結成分の点集合は等しい． □

［補題 11］ M をフロー実現可能ネットワークとし，長さが 2 以上のすべての U 道 P に対して，P の端点を x, y とすると，$(x, y)\notin E(M)$ であるとする．

このとき，L_1, L_2 を M_k における連結成分とすると，L_1 の点と L_2 の点を結ぶ重み a_{k+1} の枝の数は 1 以下である．

（証明） L_1 の点と L_2 の点を結ぶ重み a_{k+1} の枝が二つ以上あったとする．$e_i=(x_i, y_i), x_i\in V(L_1), y_i\in V(L_2), w(e_i)=a_{k+1}, (i=1, 2)$ とする．$e_1\neq e_2$ であるので，M において e_1, e_2 を通り，$m(P)=a_{k+1}, \#m(P)=2$ なる初等的な閉路 C が存在する（図 8）．C-e_1 は長さ 2 以上の x_1, y_1 間の U 道となり，また (x_1, y_1) は M の枝であるので仮定に矛盾する．よって，L_1 の点と L_2 の点を結ぶ重み a_{k+1} の枝の数は 1 以下である． □

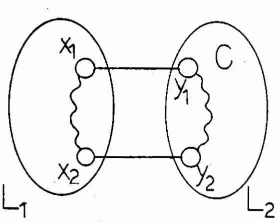

図 8 補題 11 の証明のための図
Fig. 8 Explanation for the proof of Lemma 11.

［定理 7］ 閉包が等しくなるフロー実現可能ネットワークの中で，M が枝数最小であるための必要十分条件は，長さが 2 以上のすべての U 道 P に対して，P の端点を x, y とすると，(x, y) が M の枝でないことである．

（証明） まず必要性を証明する．$(x, y)\in E(M)$ であるような，x, y 間の長さ 2 以上の U 道 P が存在したとする．すると $C(M-(x, y))=C(M)$ となり，M は枝数最小ではない．

次に十分性を証明する．M を仮定を満たすようなフロー実現可能ネットワークとし，$\tilde{M}$ を $C(\tilde{M})=C(M)$ なるフロー実現可能ネットワークで枝数最小なるものとする．$|E(\tilde{M})|<|E(M)|$ であると仮定する．すると，重みが a_k である M の枝の数を b，重みが a_k である $\tilde{M}$ の枝の数を $\tilde{b}$ としたとき，$b>\tilde{b}$ なる k が存在する．今，M_{k-1} の各連結成分を点とみなし，M において，連結成分 L_1, L_2 間に重み a_k の枝が存在するときに限り L_1 と L_2 を枝で結んだグラフを H とする．$\tilde{M}$ においても同様に $\tilde{H}$ を定義する．補題 10 より H と $\tilde{H}$ の点集合は等しいと考えてよい．すると，補題 11 より $b=|V(H)|$，また $\tilde{b}\geqq|V(\tilde{H})|$ であるので $|V(H)|>|V(\tilde{H})|$．よって $(X, Y)\in E(H), (X, Y)\notin E(\tilde{H})$ なる連結成分 X, Y が存在する．H の定義から，$x\in E(X), y\in E(Y), w(x, y)=a_k$ なる M の枝 (x, y) が存在する．つまり $(x, y)\in E(C(M)), w(x, y)=a_k$ であるが，$(X, Y)\notin E(\tilde{H})$ であるので，$\tilde{M}$ において x, y 間に $m(P)=a_k$ なる U 道は存在しない．よって $C(\tilde{M})$ において $w(x, y)\neq a_k$ となり，閉包が等しいという仮定に矛盾する． □

［定理 8］ 簡易化ネットワークは，定理 7 の必要十分条件を満足する．

（証明） M^* を簡易化ネットワークとし，(x, y) が M^* の枝であって，長さが 2 以上の x, y 間の U 道 P が存在するものとする．(x', y') を重みが $m(P)$ なる P 上の枝とする．x, x' 間の P の部分道を P' とすると $w(x, y)<m(P'), w(x', y')<m(P')$ であるので，補題 6 より $x=x'$ となる．同様に $y=y'$ が示せるので P の長さが 2 以上であることに矛盾する． □

定理 7，8 より直ちに次の定理が導かれる．

［定理 9］ フロー実現可能ネットワーク M の簡易化ネットワーク M^* は，閉包が $C(M)$ と等しくなるようなネットワークの中で，枝数最小である． □

定理 9 より，フロー実現可能ネットワークが与えられた場合，それを簡易化ネットワークに変換すること

は，不必要な情報を排除することとも言え，このことは記憶領域の軽減にもつながる．

6. むすび

本論文では点を n 個もつとし，2 点間の容量を m 個与えたとき，それらが無向フローネットワーク上に実現できるかどうかの判定を $O(m\log n)$ の手間で実行するアルゴリズムを提案した．次に $O(m\log n)$ の手間で簡易化ネットワークを構成し，これを用い $O(n)$ の手間で，与えられた容量の関係から，点対 (x, y) 間の容量が決定されるかどうか，決定されるならその容量を求めるアルゴリズムを提案した．与えられた容量を簡易化ネットワークに変換しておけば，不必要な容量を削除することができ，また簡易化ネットワークにおける最短路を求めることで，容量が決定できることを示した．

本論文では，一部の「容量」の「無向」ネットワーク上への実現について考察したが，容量の代わりに「距離」もネットワークの点の相互のかかわりを表す重要なパラメータであり，また無向ネットワークではなく「有向」ネットワーク上への実現も応用面から見て重要である．これらについては今後の課題である．

文献

(1) R. E. Gomory and T. C. Hu："Multi-terminal network flows", J. Soc. Indust. Appl. Math., **9**, 4, pp. 551-570 (1961).
(2) W. Mayeda："Terminal branch capacity matrices of a Communication Net", IRE, Trans. Circuit Theory, **CT-7**, pp. 261-269 (1960).
(3) 尾崎　弘，白川　功，翁長健治："グラフ理論"，コロナ社，(1975).
(4) 伊理正夫，白川　功，梶谷洋司，篠田庄司，ほか："演習グラフ理論—基礎と応用"，コロナ社（昭 58).
(5) L. R. Ford and D. R. Fulkerson："Flows in Networks", Princeton University Press, Princeton (1962).
(6) J. B. Kruskal, Jr.："On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem", Proc. Amer. Math. Soc., **71**, 1, pp. 48-50 (1956).
(7) 伊理正夫監修/腰塚武志編："計算幾何学と地理情報処理"，共立出版（昭 61).
(8) A. V. Aho, J. E. Hopcroft and J. D. Ullman："The Design and Analysis of Computer Algorithms", Addison-Wesley, Reading, Mass (1974).
(9) 田村　裕，仙石正和，篠田庄司，阿部武雄："一部の最大流量が与えられた場合の無向フローネットワークの実現"，信学技報，**CAS88**-39 (1988-07).

(昭和 64 年 1 月 4 日受付，平成元年 3 月 23 日再受付)

田村　裕

昭 57 新潟大・教育卒．昭 61 同大大学院理学研究科修士課程了．現在，同大学院自然科学研究科博士課程在学中．グラフ理論とその応用，計算幾何学とその応用の研究に従事．

仙石　正和

昭 42 新潟大・工・電気卒．昭 47 北大大学院博士課程了．工博．同年北大・工・電子助手．新潟大・工・情報助教授を経て，現在教授．回路網理論，グラフ・ネットワーク理論，情報伝送特に移動通信の研究に従事．著書「演習グラフ理論」(共著)．

篠田　庄司

昭 39 中大・理工・電気卒．昭 48 同大大学院博士課程了．工博．昭 40 中大研究助手．現在，同大理工学部電気工学科教授．グラフ・ネットワーク構造をもつシステムの解析，設計，制御の研究に従事．著書「最新回路理論」，「回路解析」，「演習グラフ理論」など．

阿部　武雄

昭 24 東工大・工・電気卒．電気試験所，千葉工大，東工大工業教員養成所を経て，現在，新潟大・工・教授．この間，高周波標準，レーザ光の降雪中の伝搬，マイクロ波素子，損失媒質中の伝搬，および移動通信，ネットワークなどの研究に従事．著書「電気・電子計測」(共著) など．