

## 論文

## マークグラフにおける同期距離に関する性質について

正員 田村 裕<sup>†</sup>      非会員 斎藤 聡<sup>††</sup>      非会員 三神 潔<sup>††</sup>  
 正員 仙石 正和<sup>††</sup>      正員 山口 芳雄<sup>††</sup>      正員 篠田 庄司<sup>†††</sup>  
 正員 阿部 武雄<sup>†</sup>

## On Properties of the Synchronic Distance Matrix of a Marked Graph

Hiroshi TAMURA<sup>†</sup>, *Member*, Satoshi SAITOH<sup>††</sup>, Kiyoshi MIKAMI<sup>††</sup>, *Nonmembers*,  
 Masakazu SENGOKU<sup>††</sup>, Yoshio YAMAGUCHI<sup>††</sup>, Shoji SHINODA<sup>†††</sup> and Takeo ABE<sup>†</sup>,  
*Members*

あらまし ペトリネットは、並列計算機等離散事象システムのモデル化の有力な手段として有名である。同期距離は、ペトリネットにおいて2点間上で定義され、事象間の相互独立性を表す尺度として知られている。本論文では、ペトリネットの重要なサブクラスであるマークグラフにおいて、同期距離のもつ性質について述べる。マークグラフにおける同期距離は、その名のとおり距離公理を満足する概念であることは知られているが、その逆、つまり距離公理を満足すれば、あるマークグラフ上に同期距離として実現できるかどうかは知られていなかった。本論文では、マークグラフ上に同期距離として実現可能であるための必要十分条件を与え、これを用いて、距離公理は満足してもマークグラフ上に実現できない場合があることを示す。このことにより、距離公理を満足するものは、マークグラフ上に実現できるクラスとできないクラスに分かれることになる。実現できるあるクラスは既に知られていたが、本論文では、これ以外に実現できるいくつかのクラスを与える。

キーワード ペトリネット、マークグラフ、同期距離、実現問題、距離公理

## 1. まえがき

近年の並行・並列・分散システムの急速な発展に伴い、これらのシステム解析が重要な課題となってきている。これらのシステムのモデル化の一つとしてペトリネット<sup>(1)</sup>が適していることが知られている。これは、ペトリネットが同時進行的・並列的事象を簡単に表現可能であるからである。ペトリネットによってモデル化されたシステムにおいて、事象間の相互独立性を表す概念の一つとして同期距離が提案されている。本論文では、ペトリネットの重要なサブクラスであるマークグラフにおいて、同期距離のもつ性質について

述べる。マークグラフにおける同期距離はその名のとおり距離公理を満足する概念であることは知られているが、その逆、つまり距離公理を満足すれば、あるマークグラフ上に同期距離として実現できるかどうかは知られていなかった。本論文では、この同期距離の実現問題に焦点をあてて考察する。分散処理システム等では、システム全体の正常な運用のために事象間の相互独立性に制限が出てくるものもある。この問題は、各事象間の相互独立性に制限のあるこのようなシステムの構築を考えたとき、それが実際のシステムとして構成できるかを判断する際に重要となり、興味深い問題である。本論文では、この問題をグラフ理論における問題としてとらえ、マークグラフ上に実現可能であるための必要十分条件を与える。これを用いて距離公理は満足してもマークグラフ上に実現できない場合があることを示す。これによって、距離公理を満足するものはマークグラフ上に実現できるクラスとできないクラスに分かれることになる。村田らにより、木状のグラフでの距離の関係として表されるものは、マーク

<sup>†</sup> 新潟工科大学, 柏崎市

Niigata Institute of Technology, Kashiwazaki-shi, 945-11 Japan

<sup>††</sup> 新潟大学工学部, 新潟市

Faculty of Engineering, Niigata University, Niigata-shi, 950-21 Japan

<sup>†††</sup> 中央大学理工学部, 東京都

Faculty of Science and Engineering, Chuo University, Tokyo, 112 Japan

グラフ上の同期距離として実現できることが示されている<sup>(2)</sup>が、これ以外に実現できるいくつかのクラスを与える。

## 2. 定義と基本的性質

本章では、ペトリネットに関連する用語と基本的性質を挙げ、本論文で扱う問題について述べる。

本論文で扱うマークグラフ  $N$  は、ペトリネットのサブクラスであり、ネット内のすべてのプレースがただ一つの入力アークとただ一つの出力アークをもつ (図 1)。トランジション  $t_i$  が発火可能であるとは、 $t_i$  の各入力プレースにトークンが存在することである。 $t_i$  の各入力プレースのトークンを一つずつ減らし、各出力プレースのトークンを一つずつ増やすことを  $t_i$  が発火すると言う。マーキング  $M$  から、マーキング  $M'$  へ変換する発火系列が存在するとき、マーキング  $M'$  はマーキング  $M$  から到達であると言う。マーキング  $M$  から到達なマーキングの集合を  $R(M)$  で表すとする。トランジション  $t_i$  が  $R(M_0)$  に属する任意のマーキングからある発火系列によって発火可能であるとき、 $t_i$  は活性であると言う。但し、 $M_0$  は初期マーキングを表すものとする。すべてのトランジションが活性であるとき、そのマークグラフは活性であると言う。活性はペトリネットにおける基本的な概念であり、本論文では、活性なマークグラフのみを扱うものとし、与えられた行列を活性なマークグラフ上の同期距離として実現する問題について考察する。

トランジション  $t_i$  から  $t_j$  への有向パスの中で最小トークン総量を  $t_i$  から  $t_j$  へのトークン距離と言い、 $td_{ij}$  と表す。そのような有向パスが存在しないとき、 $td_{ij} = \infty$  と定義する。なお、他のペトリネットに関する

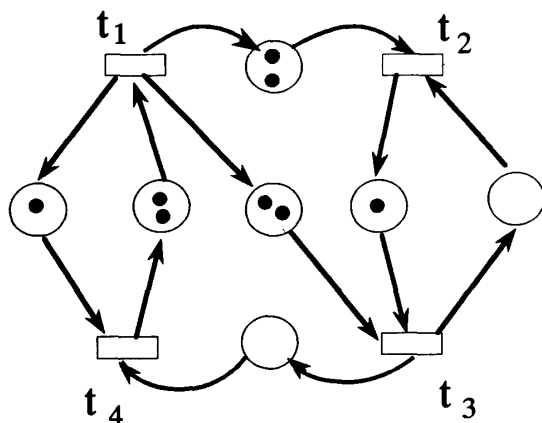


図 1 マークグラフ  
Fig. 1 A marked graph.

用語等は文献(10), (11)を参照されたい。次の定理はよく知られたものである。

[定理 1]<sup>(3)</sup> マークグラフが活性であるための必要十分条件は、任意の  $i, j (i \neq j)$  に関して、 $td_{ij} + td_{ji} \neq 0$  であることである。□

次に同期距離<sup>(10),(11)</sup>の概念を導入する。マークグラフ  $N$  のトランジション  $t_i$  と  $t_j$  間の同期距離  $d^*_{ij}$  が  $k$  であるとは、一方のトランジションが他方のトランジションを発火させることのないように最大で  $k$  回発火できるような  $R(M_0)$  に属するマーキングが存在することである (一般には、同期距離は一般のペトリネット上で定義される)。行列  $A$  の  $i, j$  成分を  $a_{ij}$  としたとき、 $A = \{a_{ij}\}$  と表す場合もある。 $i, j$  成分が  $d^*_{ij}$  となるような  $n \times n$  行列  $D^*$  をマークグラフ  $N$  の同期距離行列と言う (但し、 $n$  は  $N$  のトランジションの数を表す)。また、そのようなマークグラフが存在するとき、その行列を単に同期距離行列と言う。

マークグラフにおいては、トランジション間の同期距離は次の式により与えられることが知られている。

[定理 2]<sup>(2)</sup>  $t_i, t_j$  をマークグラフ  $N$  のトランジションとすると、以下の式が成立する。

$$d^*_{ij} = td_{ij} + td_{ji} \quad \square$$

定理 2 より、同期距離が  $\infty$  となる場合は、 $t_i$  から  $t_j$  へのトークン距離か  $t_j$  から  $t_i$  へのトークン距離のどちらかが  $\infty$  となる。このような場合は、各連結成分ごとに考えればよいので、以降では同期距離の値として  $\infty$  はとらないものとする。また、活性なマークグラフを対象としているので、定理 1 より、異なるトランジション間の同期距離の値として、0 もとらない。本論文は、行列が与えられたときこれが同期距離行列となるかという問題を扱う。従って、上記の理由により、与える行列は対角成分のみが 0 でほかは正の整数値をとる対称行列となる。

例えば、次の行列  $A$  が与えられたとする。図 1 のマークグラフ  $N$  の同期距離行列は  $A$  となるので、 $A$  は同期距離行列となる。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

(活性な)マークグラフの同期距離行列は以下の性質をもつ。

[定理 3]<sup>(2)</sup>  $D^* = \{d^*_{ij}\}$  を同期距離行列とすると、以下の関係が成り立つ。

- (i)  $d^*_{ij}=0 \iff i=j$
  - (ii)  $d^*_{ij} \leq d^*_{ik} + d^*_{kj}$  for all  $i, j, k$
  - (iii)  $d^*_{ij}$  は非負整数
  - (iv)  $d^*_{ij} = d^*_{ji}$  for all  $i, j$
- ((i), (ii), (iv)は距離公理と言われる) □

### 3. グラフ理論における問題への変換

本章以降では、前章で取り上げた問題をグラフ理論の問題に変換し、グラフ理論的手法でこの問題を解析する。なお、定義なしで用いるグラフ理論に関する用語等は、文献(4), (5)を参照されたい。

マークグラフはすべてのプレースがただ一つの入力アークとただ一つの出力アークをもつので、マーク有向グラフ<sup>(10)</sup>として描くことができる。例えば、図1のマークグラフは、図2のマーク有向グラフとして表すことができる。マーク有向グラフにおいて、○で表されるノードはトランジションに相当し、トークンはアーク上におかれる。ここで、各ノードを点、各アークを有向辺とし、アーク上のトランジションの数を対応する辺の重みとすることで、マーク有向グラフをグラ

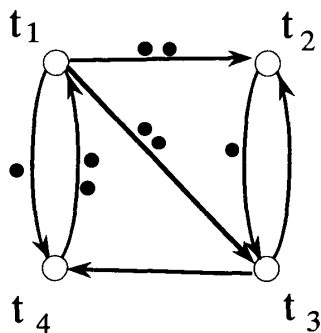


図2 マーク有向グラフ  
Fig. 2 A marked directed graph.

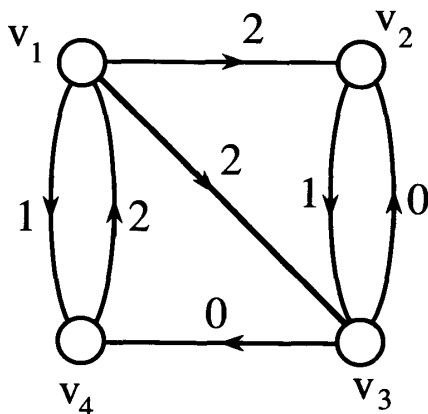


図3 有向グラフ  
Fig. 3 A directed graph.

フ理論における有向グラフ  $H=(V(H), E(H), w_H)$  (但し、 $V(H)$ は点集合、 $E(H)$ は辺集合、 $w_H$ は辺の重み関数) と見ることができる。例えば、図2のマーク有向グラフは、図3の有向グラフとして表される。このように変換すると、マークグラフにおけるトランジション  $t_i$  から  $t_j$  へのトークン距離は、有向グラフ  $H$  において、それらに対応する点  $v_i$  から点  $v_j$  への距離  $d_H(v_i, v_j)$  (最短有向路の長さ) となることは容易にわかる。有向グラフ  $H$  における点  $v_i$  と  $v_j$  間の同期距離  $d^*_H(v_i, v_j)$  を

$$d^*_H(v_i, v_j) = d_H(v_i, v_j) + d_H(v_j, v_i)$$

と定義すると、本論文で考察するマークグラフに関する問題は、次のようにグラフ理論における言葉で言い換えることができる。

「行列  $A=\{a_{ij}\}$  が与えられたとき、任意の2点  $v_i, v_j$  に対して、 $d^*_H(v_i, v_j)=a_{ij}$  となる有向グラフ  $H$  が存在するか」

このような有向グラフ  $H$  が存在するとき、 $A$  は前章で定義した同期距離行列となる。またこの場合、 $A$  を有向グラフ  $H$  の同期距離行列と言うこととする。行列が同期距離行列となるためには、定理3の(i)~(iv)を満足する正方行列でなければならない。ここで、このような行列を距離行列と言うこととし、与える行列は距離行列に限定する。なお、無向グラフにおける距離は、距離公理を満足することがわかっている。また、有向グラフにおける距離に関しては、定理3の(i), (ii)が成り立つ。

### 4. 同期距離行列となるための必要十分条件

距離行列の定義から、同期距離行列は距離行列となるが、逆に距離行列は必ず同期距離行列となるかどうかは知られていなかった。本章では、この問題を否定的に解決する。

無向グラフ  $G$  の辺  $(v_i, v_j)$  が冗長であるとは、次の不等式を満足する点  $v_k (k \neq i, j)$  が存在することである。

$$w_c(v_i, v_j) \geq d_c(v_i, v_k) + d_c(v_k, v_j)$$

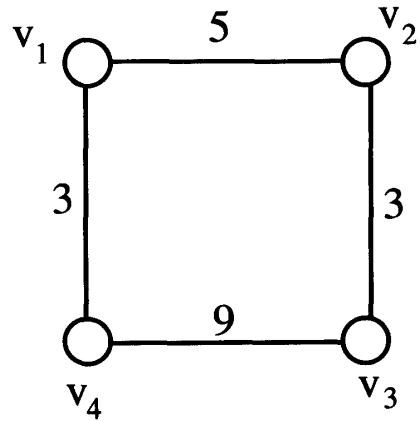
( $w_c(v_i, v_j)$  は辺  $(v_i, v_j)$  の重みを表す)

辺  $(v_i, v_j)$  が冗長な辺でないとき、 $w_c(v_i, v_j) = d_c(v_i, v_j)$  となることは容易にわかる。

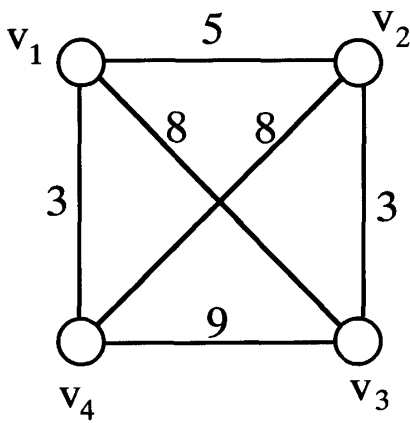
$D=\{d_{ij}\}$  を  $n \times n$  の距離行列としたとき、点集合  $\{v_1, \dots, v_n\}$  からなる(無向)完全グラフをつくり、各辺の重みを  $d_{ij}$  とする。この完全グラフから冗長な辺を

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 & 3 \\ 5 & 0 & 3 & 8 \\ 8 & 3 & 0 & 9 \\ 3 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

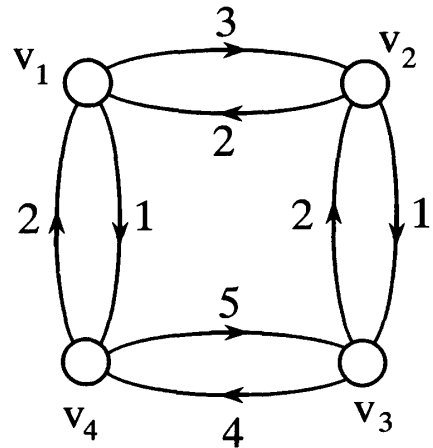
(a)



(c)



(b)



(d)

図 4 (a) 距離行列  $D$   
 (b) 各辺に対応する重みを付けた完全グラフ  
 (c) 冗長な辺を取り除いたグラフ  $G_D$   
 (d)  $G_D$  の各辺を対称辺に置き換えた有向グラフ  $H_D$

Fig. 4 (a) A distance matrix.  
 (b) The complete graph whose each edge is assigned to the corresponding element of  $D$ .  
 (c) The graph  $G_D$ .  
 (d) A directed graph  $H_D$ .

すべて削除した無向グラフを  $G_D$  と表す。各辺の重みは正なので、 $G_D$  は一意に定まる<sup>(6)</sup>。  $G_D$  から次のように有向グラフ  $H_D$  を構成する。  $G_D$  の各辺  $(v_i, v_j)$  を対称辺  $(v_i, v_j)$  と  $(v_j, v_i)$  に置き換え、各対称辺の重みの和がもとの  $G_D$  の辺の重みと等しくなるようにする (図 4(a)~(d))。  $H_D$  は一意に定まるとは限らないが、この  $H_D$  を用いることで、  $D$  が同期距離行列となるための必要十分条件が得られる。

[補題 1]  $D^*$  を有向グラフ  $H$  の同期距離行列とする。このとき、  $H$  における以下の操作のもとでは、  $D^*$  は不変である。

(i)  $(v_i, v_j)$  が  $H$  の辺であれば、  $(v_i, v_j)$  の重みを  $d_H(v_i, v_j)$  に書き換える。

(ii)  $(v_i, v_j)$  が  $H$  の辺でないとき、  $(v_i, v_j)$  の辺を加え、重みを  $d_H(v_i, v_j)$  とする。

(iii)  $(v_i, v_j)$  が  $H$  の辺で、  $w_H(v_i, v_j) \geq d_{H-(v_i, v_j)}(v_i, v_j)$  のとき、辺  $(v_i, v_j)$  を削除する。

(証明) (i)~(iii) の操作で 2 点間の距離が変化しないのは明らかである。従って、同期距離も変化しない。

□

[定理 4] 距離行列  $D = \{d_{ij}\}$  が同期距離行列であるための必要十分条件は、同期距離行列が  $D$  となるよう

な  $H_D$  が存在することである。

(証明) 十分性は明らかなので、必要性を証明する。

$H$  を同期距離行列が  $D$  となるような有向グラフで、かつ  $E(H)$  が  $E(H_D)$  を含むようなもので辺数最小なものとする。補題 1 で同期距離を変えずに辺の付加が可能であることより、このような  $H$  が存在することがわかる。

$H$  の各辺  $(v_i, v_j)$  の重みを  $v_i$  から  $v_j$  への距離  $d_H(v_i, v_j)$  に書き換える。補題 1 により同期距離は変化しない。ここで、 $H_D$  に含まれない  $H$  の辺  $(v_i, v_j)$  が存在すると仮定する。 $P=(v_i, u_1, \dots, u_t, v_j)$  を  $G_D$  における  $v_i$  から  $v_j$  への最短路とすると、

$$w_{CD}(v_i, u_1) + \dots + w_{CD}(u_t, v_j) = d_{CD}(v_i, v_j)$$

となる。 $P$  の各辺は冗長ではないので、

$$d_{CD}(v_i, u_1) + \dots + d_{CD}(u_t, v_j) = d_{CD}(v_i, v_j)$$

となる。また  $H$  においては、

$$w_H(v_i, u_1) + w_H(u_1, v_i) = d_H(v_i, u_1) + d_H(u_1, v_i) = d^*_H(v_i, u_1) = d_{CD}(v_i, u_1)$$

となるので、この関係を繰り返し用いることにより、

$$w_H(v_i, u_1) + \dots + w_H(u_t, v_j) + w_H(u_1, v_i) + \dots + w_H(v_j, u_t) = d_{CD}(v_i, v_j)$$

が得られる。ここで、

$$w_H(v_i, u_1) + \dots + w_H(u_t, v_j) > w_H(v_i, v_j)$$

と仮定すると、

$$w_H(v_i, v_j) + w_H(v_j, u_t) + \dots + w_H(u_1, v_i) < d_{CD}(v_i, v_j) = d_{ij}$$

となる。

$$d^*_H(v_i, v_j) \leq w_H(v_i, v_j) + w_H(v_j, u_t) + \dots + w_H(u_1, v_i)$$

であるので、 $d^*_H(v_i, v_j) < d_{ij}$  となり、 $H$  の同期距離行列が  $D$  であることに矛盾する。よって、 $w_H(v_i, u_1) + \dots + w_H(u_t, v_j) \leq w_H(v_i, v_j)$  となる。 $(v_i, v_j)$  は  $H_D$  の辺ではないので、 $t \geq 1$  である。従って、 $d_{H-(v_i, v_j)}(v_i, v_j) \leq w_H(v_i, u_1) + \dots + w_H(u_t, v_j)$  であるので、補題 1 より  $H$  から辺  $(v_i, v_j)$  を除去しても同期距離行列は変化しない。これは、 $H$  の辺数の最小性に矛盾するので、そのような辺  $(v_i, v_j)$  は存在しない。従って、 $H$  と  $H_D$  の辺集合が一致する。

また、 $w_H(v_i, v_j) + w_H(v_j, v_i) = d_H(v_i, v_j) + d_H(v_j, v_i) = d_{ij}$  となり、 $H$  の各対称辺の重みの和は  $G_D$  の辺の重みとなる。従って、同期距離行列が  $D$  となるような  $H_D$  が存在することがわかる。□

定理 4 により、 $H_D$  上に実現できないのであれば、距離行列  $D$  は同期距離行列とはなり得ない。これを用い

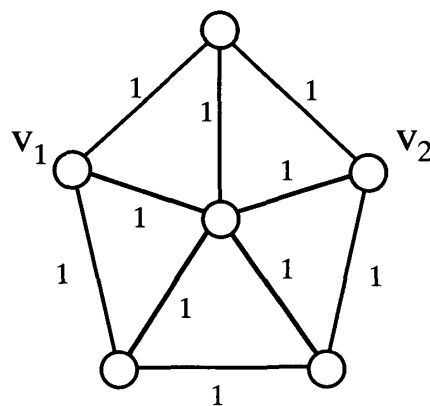


図 5 車輪グラフ  $W_5$   
Fig. 5 A wheel graph  $W_5$ .

て、次の定理が導ける。

[定理 5]  $D = \{d_{ij}\}$  を距離行列とし、 $G_D$  が次の条件を満たす車輪グラフ  $W_k^{(4)}$  を誘導部分グラフとして含むとする。

- (i)  $k$  は 5 以上の奇数。
- (ii) 車輪グラフにおける各辺の重みはすべて 1。

このとき、 $D$  は同期距離行列ではない ( $k=5$  のときの車輪グラフを図 5 に示す)。

(略証) 活性となるように  $H_D$  の各辺へ重みを割り当てると、どのように割り当てても図 5 の  $v_1$  と  $v_2$  の位置にある点对で同期距離が 1 となるものが存在してしまう。 $d_{12}=2$  であるので、 $H_D$  の同期距離行列は  $D$  とはならない。よって、定理 4 より  $D$  は同期距離行列ではない。(詳細な証明は文献(9)(レター)参照) □

定理 5 より距離行列は必ずしも同期距離行列とはなり得ないことが示された。

### 5. 同期距離行列となる距離行列のクラス

前章では、定理 4 を用いて、距離行列が必ずしもマークグラフの同期距離行列とはなり得ないことを示した。さて、行列が与えられたときに、それが同期距離行列となるかどうかを判定する問題を考えると、個々の行列に対して、定理 4 を用いて判定するのは容易ではない。そこで本章では、 $G_D$  の構造により、同期距離行列となるような行列  $D$  のいくつかのクラスを与えることとする。これまで、 $G_D$  が木となる場合に  $D$  は同期距離行列となることは知られていたが、他のクラスに関しては、考察されていなかった。

[定理 6]<sup>(2)</sup>  $D$  を距離行列とする。 $G_D$  が木であれば、 $D$  は同期距離行列である。□

[定理 7]  $D$  を距離行列とする。 $G_D$  が閉路であれば、

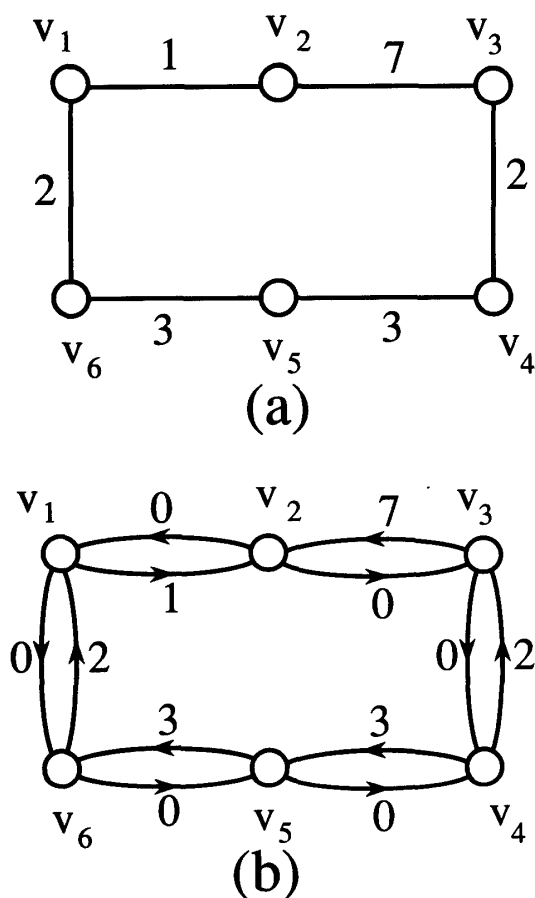


図 6 閉路となる  $G_D$  と有向グラフ  $H_D$   
 Fig. 6 A cycle  $G_D$  and a directed graph  $H_D$ .

$D$  は同期距離行列である。

(証明) 点  $v, v'$  を  $G_D$  の直径となる 2 点とする。つまり、 $d_{CD}(v, v') = \max\{d_{CD}(v_i, v_j) | v_i, v_j \in V(G_D)\}$  である。このとき、 $H_D$  における  $v$  から  $v'$  への二つのパスをそれぞれ  $P_1, P_2$  とする。辺  $(v_i, v_j)$  が  $P_1$  または  $P_2$  上にあるとき、重みを  $w_{CD}(v_i, v_j)$  とし、ないとき 0 とする。このように重みを割り当てれば、 $H_D$  の同期距離行列が  $D$  となることは、容易に確かめられる。 □

例えば、図 6(a) の  $G_D$  の場合、 $d_{CD}(v_2, v_4)$  が直径となるので、図 6(b) のように  $H_D$  を構成すればよい。

[補題 2]  $D = \{d_{ij}\}$  を距離行列とし、次のような完全対称有向グラフ  $H^{(4)}$  の重み付け  $w_H$  が存在したとする。

(i)  $w_H(v_i, v_j) + w_H(v_j, v_i) = d_{ij}$  for all  $i, j$

(ii)  $w_H(v_i, v_k) + w_H(v_k, v_j) \geq w_H(v_i, v_j)$

for all  $i, j, k$

このとき、 $D$  は  $H$  の同期距離行列となる。

(証明)  $d^*_H(v_i, v_j) = d_H(v_i, v_j) + d_H(v_j, v_i) \leq w_H(v_i, v_j) + w_H(v_j, v_i) = d_{ij}$  なので、 $d^*_H(v_i, v_j) \leq d_{ij}$  である。

ここで、 $d^*_H(v_i, v_j) < d_{ij}$  であったとする。一般性を失うことなく、 $d_H(v_i, v_j) < w_H(v_i, v_j)$  としてよい。このとき、 $v_i$  から  $v_j$  への最短路を  $P = (v_i, u_1, \dots, u_t, v_j)$  とすると、 $d_H(v_i, v_j) = w_H(v_i, u_1) + \dots + w_H(u_t, v_j)$  となる。(ii) の不等式を繰り返し用いることで、 $d_H(v_i, v_j) \geq w_H(v_i, v_j)$  となりこれは矛盾である。従って、 $d^*_H(v_i, v_j) = d_{ij}$  となり、 $D$  は  $H$  の同期距離行列となる。 □

[定理 8]<sup>(7),(8)</sup>  $D$  を距離行列とする。 $G_D$  が完全グラフであれば、 $D$  は同期距離行列である。

(証明)  $H_D$  の各辺に次のように重み付けする。

$w_{HD}(v_i, v_j) = \lfloor d_{CD}(v_i, v_j)/2 \rfloor$  if  $i < j$

$w_{HD}(v_i, v_j) = \lceil d_{CD}(v_i, v_j)/2 \rceil$  if  $i > j$

(ここで  $\lfloor \cdot \rfloor, \lceil \cdot \rceil$  はそれぞれ切捨て、切上げ記号を表す)すると、明らかに

$w_{HD}(v_i, v_j) + w_{HD}(v_j, v_i) = d_{CD}(v_i, v_j) = d_{ij}$  となる。よって、補題 2 の式 (ii) が成り立つことを示せば、 $H_D$  の同期距離行列が  $D$  となる。

$w_{HD}(v_i, v_k) + w_{HD}(v_k, v_j) \geq d_{CD}(v_i, v_k)/2 + d_{CD}(v_k, v_j)/2 - 1$ ,  $w_{HD}(v_i, v_j) \leq d_{CD}(v_i, v_j)/2 + 1/2$  なので、もし、 $d_{CD}(v_i, v_k) + d_{CD}(v_k, v_j) \geq d_{CD}(v_i, v_j) + 3$  であれば、補題 2 の式 (ii) は成り立つ。また距離の性質より、 $d_{CD}(v_i, v_k) + d_{CD}(v_k, v_j) \geq d_{CD}(v_i, v_j)$  であり、 $(v_i, v_j)$  は冗長な辺ではないので、 $d_{CD}(v_i, v_k) + d_{CD}(v_k, v_j) \neq d_{CD}(v_i, v_j)$  である。従って以降では、次の二つの場合を考えればよい。

<場合 1>  $d_{CD}(v_i, v_k) + d_{CD}(v_k, v_j) = d_{CD}(v_i, v_j) + 1$

更に次の三つの場合に分ける。

<場合 1(a)>  $d_{CD}(v_i, v_k)$ : 奇数,  $d_{CD}(v_k, v_j)$ : 偶数,  $d_{CD}(v_i, v_j)$ : 偶数, または、 $d_{CD}(v_i, v_k)$ : 偶数,  $d_{CD}(v_k, v_j)$ : 奇数,  $d_{CD}(v_i, v_j)$ : 偶数

これらの場合、 $w_{HD}(v_i, v_k) + w_{HD}(v_k, v_j) \geq d_{CD}(v_i, v_k)/2 + d_{CD}(v_k, v_j)/2 - 1/2 = d_{CD}(v_i, v_j)/2 = w_{HD}(v_i, v_j)$  となり、補題 2 の式 (ii) が成り立つ。

<場合 1(b)>  $d_{CD}(v_i, v_k)$ : 偶数,  $d_{CD}(v_k, v_j)$ : 偶数,  $d_{CD}(v_i, v_j)$ : 奇数

<場合 1(c)>  $d_{CD}(v_i, v_k)$ : 奇数,  $d_{CD}(v_k, v_j)$ : 奇数,  $d_{CD}(v_i, v_j)$ : 奇数

これら二つの場合も  $H_D$  の辺への重みの付け方から、補題 2 の式 (ii) が容易に導ける。

<場合 2>  $d_{CD}(v_i, v_k) + d_{CD}(v_k, v_j) = d_{CD}(v_i, v_j) + 2$

もし、 $w_{HD}(v_i, v_k) + w_{HD}(v_k, v_j) \geq d_{CD}(v_i, v_k)/2 + d_{CD}(v_k, v_j)/2 - 1/2$  であれば、補題 2 の式 (ii) は成立する。よって  $w_{HD}(v_i, v_k) + w_{HD}(v_k, v_j) = d_{CD}(v_i, v_k)/2$

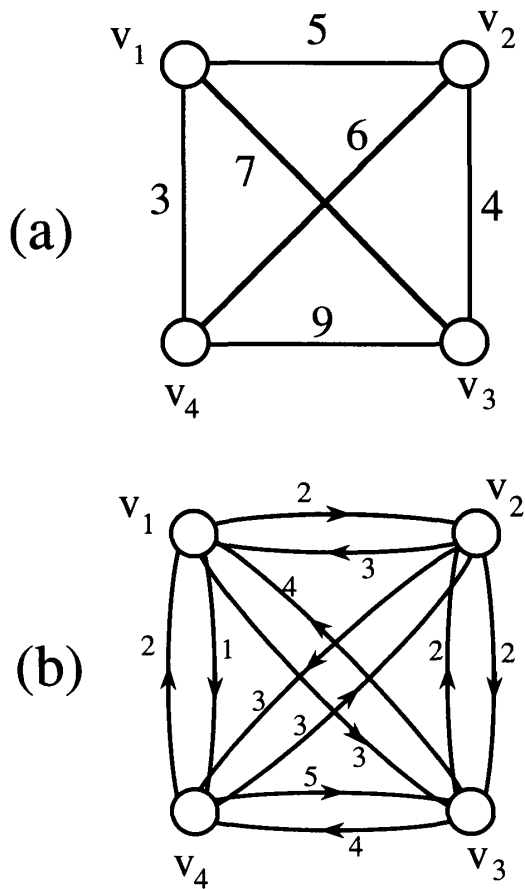


図 7 完全グラフとなる  $G_D$  と有向グラフ  $H_D$   
Fig. 7 A complete graph  $G_D$  and a directed graph  $H_D$ .

$+d_{GD}(v_k, v_j)/2-1$  のときに補題 2 の式 (ii) が成立することを示せばよい。この場合、 $d_{GD}(v_i, v_k)$  と  $d_{GD}(v_k, v_j)$  が奇数なので、 $d_{GD}(v_i, v_j)$  は偶数である。従って、 $w_{HD}(v_i, v_k) + w_{HD}(v_k, v_j) = d_{GD}(v_i, v_k)/2 + d_{GD}(v_k, v_j)/2 - 1 = d_{GD}(v_i, v_j)/2 = w_{HD}(v_i, v_j)$  となる。□

例えば、図 7(a) の  $G_D$  の場合、(b) の  $H_D$  が同期距離行列が  $D$  となる有向グラフである。

[定理 9]  $D$  を距離行列とする。  $G_D = G_{D1} \cup G_{D2}$  であり、  $V(G_{D1}) \cap V(G_{D2}) = \{v\}$ 、  $E(G_{D1}) \cap E(G_{D2}) = \emptyset$  であるとする (つまり、  $v$  は  $G_D$  におけるカット点)。このとき、  $D_1$  と  $D_2$  が同期距離行列であれば、  $D$  も同期距離行列となる。

(証明)  $H_{D_i}$  ( $i=1, 2$ ) の同期距離行列が  $D_i$  であるとする。ここで、  $H_D = H_{D1} \cup H_{D2}$  (図 8 参照) の同期距離行列が  $D$  となることを示す。これは、  $d^*_{HD}(v_i, v_j) = d_{GD}(v_i, v_j)$  となることを示せばよい。

<場合 1>  $v_i, v_j \in V(H_{D1})$  または  $v_i, v_j \in V(H_{D2})$

この場合、  $d^*_H(v_i, v_j) = d_{GD}(v_i, v_j) = d_{GD}(v_i, v_j)$  ( $k=1, 2$ )。

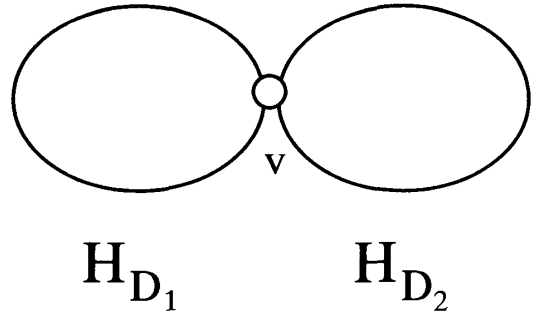


図 8 定理 9 の説明のための図  
Fig. 8 Explanation for Theorem 9.

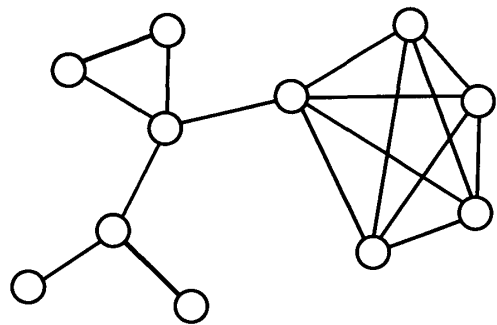


図 9 伏見木  
Fig. 9 A Husimi tree.

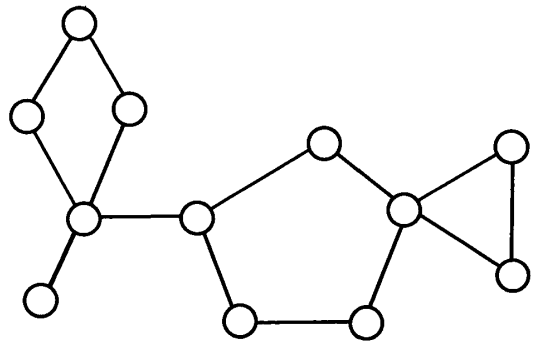


図 10 カクタス  
Fig. 10 A cactus.

<場合 2>  $v_i \in V(H_{D1})$ ,  $v_j \in V(H_{D2})$  または

$$v_i \in V(H_{D2}), v_j \in V(H_{D1})$$

一般性を失わずに  $v_i \in V(H_{D1})$ ,  $v_j \in V(H_{D2})$  としてよい。  $v$  は  $G_D$  のカット点であるので、  $d_{GD}(v_i, v_j) = d_{GD1}(v_i, v) + d_{GD2}(v, v_j)$  である。  $v$  は  $H_D$  におけるカット点でもあるので、  $d_{HD}(v_i, v_j) = d_{HD1}(v_i, v) + d_{HD2}(v, v_j)$ 、  $d_{HD}(v_j, v_i) = d_{HD2}(v_j, v) + d_{HD1}(v, v_i)$  である。従って、

$$d^*_{HD}(v_i, v_j) = d_{HD}(v_i, v_j) + d_{HD}(v_j, v_i) = d_{HD1}(v_i, v) + d_{HD2}(v, v_j) + d_{HD2}(v_j, v) + d_{HD1}(v, v_i) = d^*_{HD1}(v_i, v)$$

$+d^*_{HD2}(v, v_j) = d_{GD1}(v_i, v) + d_{GD2}(v, v_j) = d_{GD}(v_i, v_j)$ となる。場合 1, 2 より,  $H_D$  の同期距離行列は  $D$  となる。□

この定理を用いて同期距離行列となる行列  $D$  のクラスを考える。伏見木<sup>(4)</sup>(図 9 参照) は, 各ブロックが完全グラフとなっている連結グラフであり, カクタス<sup>(4)</sup>(図 10 参照) は, 各ブロックが閉路か 2 点からなる完全グラフとなっている連結グラフである。定理 7~9 を用いれば, 次の定理が導ける。

[定理 10]  $D$  を距離行列とする。  $G_D$  が伏見木またはカクタスであるとき,  $D$  は同期距離行列である。□

定理 8 と 9 から定理 6 が得られることも容易にわかる。

## 6. むすび

ペトリネットは, 並列・並行・分散システムのモデル化の有力な手段であり, 本論文では, ペトリネットの重要なサブクラスであるマークグラフにおいて, 同期距離のもつ性質, 特に同期距離をマークグラフ上に実現する問題について考察した。この問題は, 各事象間の相互独立度に制限のあるこのようなシステムの構築可能性を判断する際に重要となる。マークグラフの同期距離は距離公理を満足する概念であることは知られていたが, 本論文ではその逆, つまり距離公理を満足してもマークグラフの同期距離として実現できるとは限らないことを示した。これにより, 距離公理を満足するものはマークグラフ上に実現できるクラスとできないクラスに分かれることになる。木状のグラフの距離の関係として実現できるものは, 同期距離行列となることは既に知られていたが, それ以外に, 閉路や完全グラフ等の場合も, やはり同期距離行列となることを示した。

本論文では, 行列がマークグラフ上の同期距離行列として実現可能であるための必要十分条件を与えたが, これを用いて, 個々の行列が実現できるかどうかを判定するのは容易ではない。同期距離行列かどうかを判定するのに有効な必要十分条件を与えることが今後の課題である。

**謝辞** 本研究をすすめるにあたり, 御討論, 御助言を頂いたイリノイ大学シカゴ校村田忠夫教授に感謝の意を表します。

## 文 献

- (1) Petri C. A.: "Interpretations of net theory", St. Augustin Gesellschaft fur Mathematik und Datenverarbeitung Bonn, Interner Bericht ISF-75-07, Second Edition Dez. (1976).
- (2) Murata T., Le V. B. and Leu D. J.: "Method for realizing the synchronic distance matrix of a marked graph", Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Syst., Rome, Italy, 2, pp. 609-612 (May 1982).
- (3) Murata T.: "Relevance of network theory to model of distributed/parallel processings", J. of the Franklin Institute. 310, 1, pp. 41-50 (1980).
- (4) Behzad M., Chartrand G. and Foster L. L.: "Graphs & Digraphs", Prindle, Weber & Schmit (1979). (秋山, 西関訳: "グラフとダイグラフの理論", 共立出版 (1981))
- (5) Berge C.: "Graphs", North-Holland (1985).
- (6) Hakimi S. L. and Yau S. S.: "Distance matrix of a graphs and its realizability", Quart. Appl. Math., 22, pp. 305-317 (1965).
- (7) 斎藤 聡, 田村 裕, 仙石正和, 山口芳雄, 阿部武雄: "マークグラフの構造と同期距離について", 1990 信学春季全大, A-71.
- (8) 斎藤 聡: "マークグラフの構造と同期距離について", 平成元年度新潟大学修士論文.
- (9) Mikami K., Tamura H., Sengoku M. and Yamaguchi Y.: "On a sufficient condition for a matrix to be the synchronic distance matrix of a marked graph", IEICE Trans. Fundamentals., E76-A, 10, pp. 1607-1609 (1993). (letter)
- (10) 村田忠夫: "ペトリネットの解析と応用", 近代科学社 (1992).
- (11) Murata T.: "Petri Nets: Properties, Analysis and Applications", Proc. IEEE, 77, 4, pp. 541-580 (1989).



田村 裕

昭 57 新潟大・教育卒。昭 61 同大大学院理学研究科修士課程了。平 2 同大大学院自然科学研究科博士課程了。学術博。同年同大学院自然科学研究科助手。平 3 同大学地域共同研究センター助教授。現在, 新潟工科大学助教授。グラフ理論とその応用, 計算幾何学とその応用の研究に従事。平 3 年度本会論文賞受賞。日本数学会, 情報処理学会, IEEE 各会員。



論文/マークグラフにおける同期距離に関する性質について



齋藤 聡

昭 63 新潟大・工・情報卒。平 2 同大大学院工学研究科修士課程了。同年(株)沖ファームウェアシステムズ入社。現在、(株)沖データシステムズ勤務。在学中、ペトリネットに関する研究に従事。



三神 潔

平 4 新潟大・工・情報卒。平 6 同大大学院工学研究科修士課程了。同年日本電気(株)勤務。在学中、ペトリネットに関する研究に従事。



仙石 正和

昭 42 新潟大・工・電気卒。昭 47 北大大学院博士課程了。工博。同年北大・工・電子助手。新潟大・工・情報助教授を経て、現在、同教授。回路網理論，グラフ・ネットワーク理論，情報伝送特に移动通信の研究に従事。平 3 年度本会論文賞受賞。著書「演習グラフ理論」(共著)。情報処理学会，IEEE 各会員。



山口 芳雄

昭 51 新潟大・工・電子卒。昭 53 東工大大学院修士課程了。同年新潟大・工・助手。現在同教授。工博。損失媒質で囲まれた空間における電波伝搬，導波伝送，ネットワークの研究に従事。日本雪工学会，IEEE 各会員。



篠田 庄司

昭 39 中大・理工・電気卒。昭 48 同大大学院博士課程了。工博。昭 40 中大研究助手。現在，同大理工学部電気電子工学科教授。グラフ・ネットワーク構造をもつシステムの解析，設計，制御の研究に従事。平 3 年度本会論文賞受賞。著書「最新回路理論」，「回路解析」，「演習グラフ理論」ほか。IEEE 会員。



阿部 武雄

昭 24 東工大・工・電気卒。電気試験所，千葉工大，東工大工業教員養成所を経て，昭 41 新潟大・工・教授。平 3 千葉工大教授。現在，新潟工科大学学長。工博。この間，高周波標準，レーザ光の降雪中の伝搬，マイクロ波素子，損失媒質中の伝搬，および移动通信，ネットワークなどの研究に従事。平 3 年度本会論文賞受賞。著書「電気・電子計測」(共著)など。日本雪氷学会，日本雪工学会，IEEE 各会員。