Institute of Electronics, Information, and Communication Engineers

論　文

無向フローネットワークにおける総合被覆問題について

田村　裕[†]　菅原　秀仁[††]　仙石　正和[††]　篠田　庄司[†††]

Plural Cover Problem on Undirected Flow Networks

Hiroshi TAMURA[†], Hidehito SUGAWARA[††], Masakazu SENGOKU[††], and Shoji SHINODA[†††]

あらまし　輸送網，通信網等のネットワークにおいて，種々の施設を設置する際にその最適な位置を求める問題をネットワークのロケーション問題という．本論文では，フローネットワークにおけるロケーション問題の一つである，総合被覆といわれるある被覆問題を拡張し，無向フローネットワークの場合に，多項式時間で解が求められることを示す．これまでの問題では，各点へのフローは，ある一定値以上という条件であり，多項式時間の解法が提案されていた．ここでは，この値を各点によって可変にした場合でも，単純なアルゴリズムで解を求めることが可能であることを示す．

キーワード　グラフ理論，ロケーション問題，フローネットワーク，被覆問題，総合被覆問題

1. まえがき

輸送網，通信網等のネットワークにおいて，種々の施設を設置する際にその最適な位置を求める問題をネットワークのロケーション問題 [1],[2] といい，被覆問題 [1],[3],[4] は，ロケーション問題の一つである．2点間の結びつきの尺度として，最大フロー値（容量ともいう）を用いたネットワーク（フローネットワークといわれる）のロケーション問題も重要であり，研究が進んでいる [5]～[7]．フローネットワークにおける被覆問題は，主として無向フローネットワークの場合には，多項式時間で解が得られることがわかっている．この問題は通信網におけるファイルの設置位置を決める問題に応用でき，これまでの研究における設置の条件は「各端末は，一定値以上の容量でファイルに接続できなければならない」というものであった．

上の条件では各端末に対して確保する容量は一定であったが，実際には各端末によって異なる場合が一般的である．文献 [8],[9] では，文献 [6] で定義された単一被覆といわれる被覆問題の一つを，上記のように一般化すると共に，無向フローネットワークの場合には，多項式時間で解けることを示した．本論文では，同じく文献 [6] で定義された総合被覆問題が，上記のように一般化した場合にも，やはり多項式時間で解が得られることを示す．

なお，定義なしで用いる用語，記号は文献 [10] によるものとする．

2. 総合被覆問題の定義

本論文では，無向フローネットワークのみを扱うものとする．また，点 u から点 v への最大フロー値を $g(u,v)$ で表すこととし，特に，$g(u,u)=\infty$ とする．なお以降では，最大フロー値を容量ということとする．

点集合 X から点集合 Y への容量 $g(X,Y)$ とは，新たに点 s と点 t を設け，s と X の各要素，t と Y の各要素を辺で結び，辺容量をそれぞれ ∞ としたときの，s から t への容量のことである．例えば，図1の無向フローネットワーク N において，辺上の数字は辺容量を表すものとする．このとき，$g(\{v_1,v_3\},\{v_5\})$ を考えると，図2の N' における $g(s,t)$ を求めればよいので，$g(\{v_1,v_3\},\{v_5\})=4$ となる．

なお，定義から明らかに，$g(X,Y)=g(Y,X)$ が成り立つことがわかる．

［定義1］　$N=(V,E,w,h)$ を点集合 V，辺集合 E

† 新潟工科大学情報電子工学科，柏崎市
Department of Information and Electronics Engineering, Niigata Institute of Technology, Kashiwazaki-shi, 945-1195 Japan
†† 新潟大学工学部情報工学科，新潟市
Faculty of Engineering, Niigata University, Niigata-shi, 950-2181 Japan
††† 中央大学理工学部電気・電子工学科，東京都
Faculty of Science and Engineering, Chuo University, Tokyo, 112-8551 Japan

NII-Electronic Library Service

Institute of Electronics, Information, and Communication Engineers

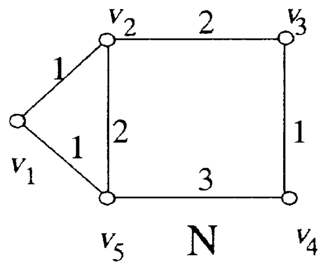


図 1　無向フローネットワーク N
Fig. 1　An undirected flow network N.

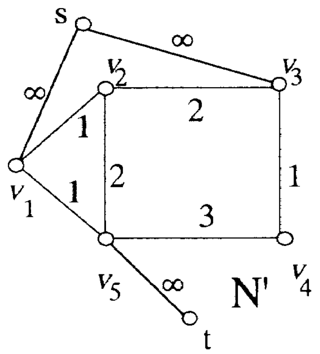


図 2　無向フローネットワーク N'
Fig. 2　An undirected flow network N'.

からなる無向フローネットワークとする．なお，w は各辺 $e\in E$ に対する辺容量 $w(e)$ を表す非負の整数値関数とする．各点 v に $h(v)$ なる非負整数の要求値が与えられている（これを v の要求容量という）．このとき，$U\subset V$ が（本論文では，等号も含めた意味で，記号 $\subset$ を用いる），任意の $v\in V$ に対して $g(U,\{v\})\geqq h(v)$ となるとき，U は N を $h(\cdot)$-総合被覆するといい，その中で要素数最小なものを $h(\cdot)$-総合被覆問題の解という．□

上記の $g(U,\{v\})$ とは，点集合 U から点集合 $\{v\}$ への容量であるが，点集合が点 v のみからなる場合，$g(U,v)$ と表すこともある．

今，W，$W'\subset V$（但し，$W\cap W'=\phi$）に対して，

$$\langle W, W'\rangle=\{(u,v)\in E|u\in W, v\in W'\}$$

とし，W と W' のカットという．特に，点集合 X，Y に関して，$X\subset W$，$Y\subset V-W$ であるとき，$\langle W, V-W\rangle$ を X と Y を分離するカットという．また，

$$c(W,W')=\sum_{(u,v)\in\langle W,W'\rangle} w(u,v)$$

とし，W と W' のカット容量という．X と Y を分離するカットの中で，カット容量が最小のものを X と Y を分離する最小カットという．

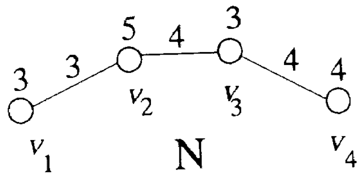


図 3　無向フローネットワーク N
Fig. 3　An undirected flow network N.

以上の定義から，次のような最大フロー最小カットの定理の拡張が成り立つことは容易にわかる．

［定理 1］　N を無向フローネットワークとする．X，Y を $X\cap Y=\phi$ なる点集合とする．このとき，X から Y への容量は，X と Y を分離する最小カットのカット容量に等しい．□

［定義 2］　N を無向フローネットワークとする．$W\subset V$ が N の $h(\cdot)$-総合被覆に関する未充足集合であるとは，$W=V$ であるか，または，

$$c(W, V-W)<\max\{h(v)|v\in W\}$$

であることをいう（以下，単に未充足集合ということとする）．

未充足集合で，真部分集合として未充足集合を含まないものを極小な未充足集合という．

また，$W\subset V$ に対して，

$$h(W)=\max\{h(v)|v\in W\}$$

と定義する．□

図 3 の N において，点上の数字は要求容量を表すものとする．例えば，$W=\{v_1, v_2, v_3\}$ は，未充足集合である．なぜなら，$h(W)=h(v_2)=5>c(W, V-W)=4$ だからである．しかしながら，W は極小ではない．$\{v_1, v_2\}$ が W に含まれる極小な未充足集合である．N における極小な未充足集合は，$\{v_1, v_2\}$ と $\{v_2, v_3, v_4\}$ の二つである．

［定義 3］　N を無向フローネットワークとし，W を極小な未充足集合とする．点 v が W に属し，$h(v)=h(W)$ であるとき，v を W の要求容量最大点という．また，点 v に対して，そのような W が存在するとき，v を単に要求容量最大点という．□

［定義 4］　N を無向フローネットワークとし，$W_1,\cdots,W_t\subset V$ とする．$U\subset V$ が $W_1,\cdots,W_t$ のそれぞれと共通部分をもち，任意の $u\in U$ に対して，$W_i\cap(U-\{u\})=\phi$ なる $W_i(1\leqq i\leqq t)$ が存在するとき，U は $W_1,\cdots,W_t$ に関して臨界であるという．□

NII-Electronic Library Service

Institute of Electronics, Information, and Communication Engineers

3. 総合被覆の性質

まず最初に前章で定義した用語を用いて，ある点集合が無向フローネットワークを $h(\cdot)$-総合被覆するための必要十分条件を示す．

［補題 1］ N を無向フローネットワークとする．$U\subset V$ が N を $h(\cdot)$-総合被覆するための必要十分条件は，U が任意の未充足集合と共通部分をもつことである．

（証明） 必要性 対偶を証明する．$W\cap U=\phi$ なる未充足集合 W が存在したとすると，W は未充足集合なので，$c(W, V-W)<h(v)$ なる点 $v\in W$ が存在する．$U\subset V-W$ であるので，$g(\{v\}, U)=g(U, v)<h(v)$ となり，U は N を $h(\cdot)$-総合被覆しない．

十分性 こちらも対偶を証明する．U が N を $h(\cdot)$-総合被覆しない，つまり，$g(U, v)<h(v)$ なる点 v が存在したとする．$g(U, v)<\infty$ より $v\notin U$ である．

U と $\{v\}$ を分離する最小カット $\langle W_1, V-W_1\rangle$ のカット容量は

$$c(W_1, V-W_1)=g(U, v)<h(v)$$

となる．$V-W_1$ 内で最大の要求容量をもつ点を v_0 とすると（図 4）

$$c(W_1, V-W_1)<h(v)\leqq h(v_0)$$

であるから $V-W_1$ は未充足集合である．

ところが $U\subset W_1$ であるので $U\cap(V-W_1)=\phi$ となり，U は未充足集合 $V-W_1$ と共通部分をもたない． □

次の定理は補題 1 より直ちに導ける．

［定理 2］ N を無向フローネットワークとする．$U\subset V$ が N を $h(\cdot)$-総合被覆するための必要十分条件は，U が任意の極小な未充足集合と共通部分をもつことである． □

定理 2 より，$h(\cdot)$-総合被覆問題の解は，すべての極小な未充足集合に関して，臨界であることがわかる．

次の補題は，議論を進めていく上で，大変役立つものである．

［補題 2］ N を無向フローネットワークとする．W_1, W_2 を相異なる N の極小な未充足集合とし，$W_1\cap W_2\neq\phi$ であるとする．このとき，v_1 が W_1 の要求容量最大点，v_2 が W_2 の要求容量最大点ならば，

$$v_1\notin W_1-W_2 \quad \text{または} \quad v_2\notin W_2-W_1$$

である．

（証明） W_1, W_2 は，極小な未充足集合であるので，$W_1-W_2\neq\phi$, $W_2-W_1\neq\phi$ である．今，

$$a_1=c(W_1-W_2, W_2-W_1)$$
$$a_2=c(W_1-W_2, W_2\cap W_1)$$
$$a_3=c(W_2-W_1, W_2\cap W_1)$$
$$a_4=c(W_1\cap W_2, V-W_1-W_2)$$
$$a_5=c(W_1-W_2, V-W_1-W_2)$$
$$a_6=c(W_2-W_1, V-W_1-W_2)$$

とする（図 5）．

未充足集合の定義より

$$c(W_1, V-W_1)=a_1+a_3+a_4+a_5<h(v_1) \qquad (1)$$
$$c(W_2, V-W_2)=a_1+a_2+a_4+a_6<h(v_2) \qquad (2)$$

である．ここで $v_1\in W_1-W_2$ かつ $v_2\in W_2-W_1$ であるとする．W_1, W_2 が極小な未充足集合であることより，W_1-W_2, W_2-W_1 は未充足集合ではない．よって，

$$c(W_1-W_2, V-(W_1-W_2))=a_1+a_2+a_5\geqq h(v_1) \qquad (3)$$
$$c(W_2-W_1, V-(W_2-W_1))=a_1+a_3+a_6\geqq h(v_2) \qquad (4)$$

である．(1)+(2)より

$$2a_1+a_2+a_3+2a_4+a_5+a_6<h(v_1)+h(v_2) \qquad (5)$$

(3)+(4)より

$$2a_1+a_2+a_3+a_5+a_6\geqq h(v_1)+h(v_2) \qquad (6)$$

(5)，(6)より

$$2a_1+a_2+a_3+2a_4+a_5+a_6<2a_1+a_2+a_3+a_5+a_6$$

よって，$2a_4<0$

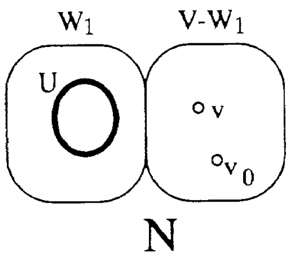


図 4 補題 1 の証明のための図
Fig. 4 Explanation for the proof of Lemma 1.

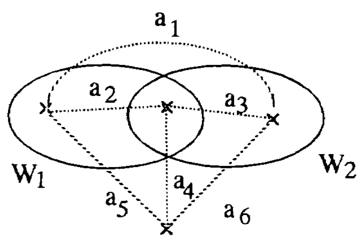


図 5 補題 2 の証明のための図
Fig. 5 Explanation for the proof of Lemma 2.

NII-Electronic Library Service

Institute of Electronics, Information, and Communication Engineers

となり $a_4 \geqq 0$ であることに矛盾する．

従って，$v_1 \notin W_1 - W_2$ または $v_2 \notin W' - W_1$ である．

□

以降では，$h(\cdot)$-総合被覆問題の解の要素として注目するのは，要求容量最大点だけに限ってよいことを示す．次の補題はその準備である．

［補題 3］ N を無向フローネットワークとする．$W_1, \cdots, W_t$ を $h(W_i)=a (i=1, \cdots, t)$ なる極小な未充足集合とし，$W_1 \cap \cdots \cap W_t \neq \phi$ であるとする．U を各要素の要求容量が a で，かつ $U \cap W_i \neq \phi (i=1, \cdots, t)$ であるとする．このとき，U の要素で，$W_1 \cap \cdots \cap W_t$ に含まれるものが存在する．

（証明） U の要素のうち，$W_1, \cdots, W_t$ の中の最も多くの極小な未充足集合に含まれるものを u_1 とする．ここで，u_1 を含まない，ある極小な未充足集合 $W_k (1 \leqq k \leqq t)$ が存在したとする．W_k に含まれる U の要素を u_2 とすると，u_1 が最も多くの極小な未充足集合に含まれていることから，$u_1 \in W_{k'}$ かつ $u_2 \notin W_{k'} (1 \leqq k' \leqq t)$ なる $W_{k'}$ が存在する．$u_1 \in W_{k'}$ かつ $u_1 \notin W_k$ であり，$u_2 \in W_k$ かつ $u_2 \notin W_{k'}$ である．u_1 は，$h(u_1)=a=h(W_{k'})$ であるので，$W_{k'}$ の要求容量最大点となる．また，u_2 は，$h(u_2)=a=h(W_k)$ であるので，W_k の要求容量最大点となり，補題 2 に矛盾する（図 6）．従って，そのような W_k は存在しないので，$u_1 \in W_1 \cap \cdots \cap W_t$ となる．

□

［補題 4］ N を無向フローネットワークとし，$W_1, \cdots, W_t$ を N の極小な未充足集合とする．$W_1 \cap \cdots \cap W_t \neq \phi$ であるならば，$W_1, \cdots, W_t$ のいずれかの要求容量最大点で，$W_1 \cap \cdots \cap W_t$ に含まれるものが存在する．

（証明） $h(W_1) \leqq h(W_2) \leqq \cdots \leqq h(W_t)$ としてよい．

$h(W_1)=h(W_2)=\cdots=h(W_t)$ の場合は，$W_1, \cdots, W_t$ のそれぞれに対して要求容量最大点を選び，その集合を U とすると，明らかに $U \cap W_i \neq \phi (i=1, \cdots, t)$ であるので，補題 3 より，$W_1 \cap \cdots \cap W_t$ に含まれる U の要素が存在することとなり，証明が終了する．

$h(W_1)=h(W_2)=\cdots=h(W_s)<h(W_{s+1}) \leqq \cdots \leqq h(W_t)$ であったとする．上記の場合と同様に，補題 3 より，

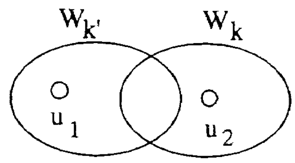


図 6 補題 3 の証明のための図
Fig. 6 Explanation for the proof of Lemma 3.

$W_1 \cap \cdots \cap W_s$ に含まれる，$W_1, \cdots, W_s$ の要求容量最大点 v_1 が存在する．ここで，$v_1 \notin W_j (s<j \leqq t)$ なる W_j が存在すると仮定する．$v_1 \in W_1 - W_j$ であり，W_j の要求容量最大点を v_j とすると，$h(v_j)>h(v_1)$ であることより，$v_j \in W_j - W_1$ である．これは，$W_1 \cap W_j \neq \phi$ なので，補題 2 に矛盾する．従って $v_1 \in W_j (s<j \leqq t)$ となり，v_1 は $W_1 \cap \cdots \cap W_t$ に含まれることとなる．

□

補題 4 から，直ちに次の定理が得られる．

［定理 3］ 無向フローネットワーク N における $h(\cdot)$-総合被覆問題の解の中に，すべての要素が要求容量最大点であるものが存在する．

（証明） U を $h(\cdot)$-総合被覆問題の解の中で，最も要求容量最大点の数が多いものとする．ここで，$u \in U$ が要求容量最大点でないと仮定する．$h(\cdot)$-総合被覆問題の解は，定理 2 より，すべての極小な未充足集合に関して臨界であるので，極小な未充足集合 $W_1, \cdots, W_t$ で，$W_i \cap (U-\{u\})=\phi (i=1, \cdots, t)$ なるものが存在する．$u \in W_1 \cap \cdots \cap W_t$，つまり $W_1 \cap \cdots \cap W_t \neq \phi$ であるので，補題 4 より，$v \in W_1 \cap \cdots \cap W_t$ となる $W_1, \cdots, W_t$ のいずれかの要求容量最大点 v が存在する．U から u を削除し，v を付加しても定理 2 より解である．これは，U が最も多くの要求容量最大点を含むことに矛盾する．従って，そのような u は存在しない，つまり，U の要素すべてが要求容量最大点である．

□

定理 3 より，要求容量最大点のみからなる解が存在することが示されたが，その中で，要求容量の和が最大となるようなものに注目する．要求容量の和が最大となるような解は，次のような性質をもつ．

［補題 5］ N を無向フローネットワークとする．U をすべての要素が要求容量最大点である $h(\cdot)$-総合被覆問題の解のうち，要求容量の和が最大であるとする．すると，任意の $u \in U$ に対して，$\{u\}=U \cap W$ かつ $h(u)=h(W)$ なる極小な未充足集合 W が存在する．

（証明） ある $u_0 \in U$ に対して，$\{u_0\}=U \cap W, h(u_0)=h(W)$ なる極小な未充足集合 W が存在しないと仮定する．今，$W_1, \cdots, W_t$ を $(U-\{u_0\}) \cap W_i=\phi (i=1, \cdots, t)$ なる極小な未充足集合とする．$\{u_0\}=U \cap W_i$ であるので，u_0 が W_i の要求容量最大点となると仮定に矛盾する．従って，各 W_i に対して，$h(u_0)<h(W_i)$ である．$W_1 \cap \cdots \cap W_t \neq \phi$ であるので，補題 4 より $v \in W_1 \cap \cdots \cap W_t$ なる $W_1, \cdots, W_t$ のいずれかの要求容

NII-Electronic Library Service

Institute of Electronics, Information, and Communication Engineers

量最大点 v が存在する．ここで，$(U-\{u_0\})\cup\{v\}$ は，要素すべてが要求容量最大点である解である．ところが，$h(v)>h(u_0)$ であるので，U が要求容量の和が最大であることに矛盾する．従って，そのような u_0 は存在せず，証明が終了する．□

次に，極小な未充足集合 $W_1, \cdots, W_t$ が $h(W_i)=a(i=1,\cdots,t)$ であるとき，これらと共通部分をもつ集合について考える．

［補題 6］ N を無向フローネットワークとする．$W_1, \cdots, W_t$ を $h(W_i)=a(i=1,\cdots,t)$ なる極小な未充足集合とし，U，U' をそれぞれ各要素の要求容量が a で，かつ，$W_1, \cdots, W_t$ に関して臨界となるような点集合とする．このとき，U と U' の要素数は等しい．

（証明） $|U|\leqq|U'|$ としてよい．今，$u_0\in U$ が含まれる極小な未充足集合を $W_1, \cdots, W_k$ とする．U' は $W_1, \cdots, W_t$ に関して臨界であることより，$U'\cap W_i\neq\phi(i=1,\cdots,t)$ である．よって，$U_0'=\{u\in U'|u\in W_1\cup\cdots\cup W_k\}$ とすると，$U_0'\cap W_i\neq\phi(i=1,\cdots,k)$ となる．$W_1\cap\cdots\cap W_k$ には u_0 が含まれ空でないので，補題 3 より，$W_1, \cdots, W_k$ すべてに含まれる $u_0'\in U_0'$ が存在する．U の各要素 u_0 に対応する上記の U' の要素 u_0' を一つずつ選び，その集合を U'' とすると，$|U|\geqq|U''|$ となる．また，$U\cap W_i\neq\phi(i=1,\cdots,t)$ より $U''\cap W_i\neq\phi(i=1,\cdots,t)$ である．U' が $W_1, \cdots, W_t$ に関して臨界であることより，U'' は U' の真部分集合とはならないので，$U'=U''$ となる．従って，$|U'|\leqq|U|$ となり，$|U|\leqq|U'|$ より，$|U|=|U'|$ が導ける．□

［補題 7］ N を無向フローネットワークとする．$W_1, \cdots, W_t$ は，$h(W_i)=a(i=1,\cdots,t)$ なる極小な未充足集合とする．U，U' をそれぞれ各要素の要求容量が a で，かつ，$W_1, \cdots, W_t$ に関して臨界となるような点集合とする．このとき，W' が $h(W')>a$ なる極小な未充足集合であるならば，$W'\cap U\neq\phi$ であることと $W'\cap U'\neq\phi$ であることは同値である．

（証明） 今，ある $h(W')>a$ なる極小な未充足集合 W' に対して，$W'\cap U\neq\phi$ であり，かつ $W'\cap U'=\phi$ であると仮定する．$u\in U\cap W'$ としたとき，U が $W_1, \cdots, W_t$ に関して臨界であることより，u を含むある極小な未充足集合 $W_i(1\leqq i\leqq t)$ が存在する．$u\in W'\cap W_i$ なので，$W'\cap W_i\neq\phi$ である．U' は $W_1, \cdots, W_t$ に関して臨界であるので，W_i と共通部分をもつ．よって，$u'\in W_i$ なる $u'\in U'$ が存在する．v_0 を W' の要求容量最大点とすると，$h(v_0)>h(W_i)=a$ であるので，$v_0\in W'-W_i$ である．また，U' と W' は互い

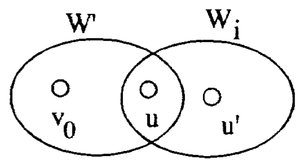


図 7　補題 7 の証明のための図
Fig. 7　Explanation for the proof of Lemma 7.

に素なので，$u'\in W_i-W'$ であり，u' は W_i の要求容量最大点でもあるので，補題 2 に矛盾する（図 7）．従って，$W'\cap U\neq\phi$ ならば，$W'\cap U'\neq\phi$ である．逆も成り立つので，$W'\cap U\neq\phi$ であることと $W'\cap U'\neq\phi$ であることは同値である．□

以上の補題 5〜7 は，**4.** で提案するアルゴリズムの正当性を示すためのものである．

4. アルゴリズムとその正当性

本章では，次のような単純なアルゴリズムを考える．

アルゴリズム A

入力：無向フローネットワーク N

出力：U

STEP 0：$V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ を $h(v_1)\leqq\cdots\leqq h(v_n)$ となるように並べる．

STEP 1：$U:=V$

STEP 2：$i:=1$

STEP 3：$U-\{v_i\}$ が N を $h(\cdot)$-総合被覆しない場合 STEP 5 へ

STEP 4：$U:=U-\{v_i\}$

STEP 5：$i=n$ のとき，U を出力し終了．
$i<n$ のとき，$i:=i+1$ として STEP 3 へ

(*STEP 0 では，要求容量が等しい点の順序の付け方に任意性があるので，入力 N に対して，アルゴリズム A の出力は一意とは限らない．*)

なお，要求容量が各点で一定の場合は，極小な未充足集合が互いに素となり，STEP 0 のように並べることなく解が求められることがわかっている [6]．

例えば，図 8 の N を入力とすると，アルゴリズム A の出力は，$\{v_4, v_5\}$ となる．N における極小な未充足集合は，$\{v_1, v_5\}$，$\{v_5, v_6, v_3\}$，$\{v_4\}$ であるので，確かに $\{v_4, v_5\}$ は $h(\cdot)$-総合被覆問題の解である．

この出力 U が $h(\cdot)$-総合被覆問題の解となることを以下で示す．

［定理 4］ アルゴリズム A により，無向フローネットワーク N における $h(\cdot)$-総合被覆問題の解が出力

NII-Electronic Library Service

Institute of Electronics, Information, and Communication Engineers

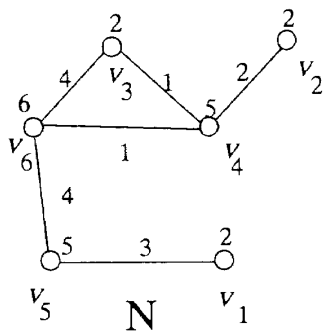


図 8　無向フローネットワーク N
Fig. 8　An undirected flow network N.

される．

(証明)　まず，STEP 0 の点の順序の付け方によっては，N における $h(\cdot)$-総合被覆問題の解がアルゴリズム A の出力となることを示す．

すべての要素が要求容量最大点である解の中で，要求容量の和が最大であるものを U_0 とする．STEP 0 において，U_0 の各要素を要求容量が同じ点の中で順位を最後とすることで，補題 5 より U_0 を出力することは，以下の理由により可能である．

アルゴリズム A の STEP 3 において，点 v_1 から順に扱われて，v_i まできたとする．ここで，$v_i \in U_0$ であれば，補題 5 より，$\{v_i\} = U_0 \cap W$，$h(v_i) = h(W)$ なる極小な未充足集合 W が存在する．STEP 0 の順序の付け方から，v_i 以外の W の要素は既に U から削除されているので，v_i は U から削除されない．また $v_i \notin U_0$ であれば，$U - \{v_i\}$ に U_0 が含まれているので，v_i は U から削除される．

次に $U_{\rm out}$（但し，$|U_{\rm out}| = p$）をアルゴリズム A の出力とすると，STEP 0 の要求容量が等しい点の順序の付け方によらず，要素数が一定値 p であることを示す．$v_i \in U_{\rm out}$ とすると，アルゴリズム A の STEP 3 で v_i が扱われるとき，$U - \{v_i\}$ が $h(\cdot)$-総合被覆とはならないので，定理 2 より，$U \cap W = \{v_i\}$ なる極小な未充足集合 W が存在する．アルゴリズム A では，要求容量の小さい順に点を扱っているので，W の各点の要求容量は，v_i の要求容量以下である．従って，$U_{\rm out}$ の各要素は要求容量最大点となる．$a = \min\{h(W) | W$ は極小な未充足集合$\}$ とし，$W_1, \cdots, W_t$ を $h(W_i) = a (i = 1, \cdots, t)$ なる極小な未充足集合とする．$W_1, \cdots, W_t$ のいずれかの要求容量最大点であるもののいくつかが，アルゴリズム A の出力の一部となるのだが，これらが STEP 0 の順序の付け方によらず，数が一定であることを示す．

要求容量が a である $U_{\rm out}$ の部分集合を U_a とする．U_a の構成の仕方から，U_a が $W_1, \cdots, W_t$ に関して臨界であることは明らかであるので，補題 6 より，U_a の要素数は一定である．また $W_1, \cdots, W_t$ 以外で U_a と共通部分をもつ極小な未充足集合は，補題 7 より一定である．従って，W^* を U_a と互いに素な極小な未充足集合の集合とすると，W^* は，U_a のとり方によらず不変であり，$\min\{h(W) | W \in W^*\}$ の値も U_a のとり方によらず一定である．

上記の議論と同様に，要求容量が $\min\{h(W) | W \in W^*\}$ なる $U_{\rm out}$ の要素数は，STEP 0 の点の順序の付け方によらず一定である．この議論を繰り返すことで，STEP 0 の点の順序の付け方によらず，アルゴリズム A による出力の要素数は一定であることがわかる．

明らかに，アルゴリズム A の出力は N を $h(\cdot)$-総合被覆する．STEP 0 の点の順序の付け方によらず，出力の要素数は一定であり，ある順序の付け方では，解を出力することが可能である．つまり，このアルゴリズムの出力は，N を $h(\cdot)$-総合被覆しており，$h(\cdot)$-総合被覆問題の解と要素数は同じである．よって，このアルゴリズムの出力は，$h(\cdot)$-総合被覆問題の解である．□

無向フローネットワーク N の点数を n，辺数を m とすると，STEP 0 の手間が $O(n \log n)$，STEP 2-STEP 5 の loop が $O(n)$，STEP 3 が $O(n \cdot s(n, m))$ であるので，アルゴリズム A の計算量は，全体で $O(n^2 s(n, m))$ である（但し $s(n, m)$ は，2 点間の容量を求める手間で $s(n, m) = O(nm \log(n^2/m))$ であることが知られている [11]）．

以上より，次の結果が導ける．

［定理 5］　無向フローネットワークにおける $h(\cdot)$-総合被覆問題の解は，多項式時間で求めることができる．□

5. むすび

フローネットワークにおけるロケーション問題は，通信網の発達に伴って重要性が増してきたと考えられる．その中でも被覆問題，特に辺容量が整数値の場合は，グラフの連結性との関連 [12], [13] からも大変興味ある問題である．

本論文では，無向フローネットワークの被覆問題を各点ごとに要求容量を与えるように拡張した．そして，このように拡張した場合でも，総合被覆問題は単

NII-Electronic Library Service

Institute of Electronics, Information, and Communication Engineers

純なアルゴリズムにより，多項式時間で解が得られることを示した．本論文は，文献[14]で得られた結果を加筆し，表現等に修正を加えたものであるが，文献[15]でも同様の問題が議論され，計算量の短縮が計られている．

辺に向きのある，つまり有向フローネットワークにおいても，同様の問題を定義できるが，本論文で提案したアルゴリズムを直接適用することはできない．有向フローネットワークの場合の解析は今後の課題である．

謝辞 日ごろより御指導頂く新潟工科大学阿部武雄学長に感謝致します．

文　献

[1] 仙石正和, "ネットワークにおけるロケーション問題," 信学誌, vol. 71, no. 6, pp. 568-572, June 1988.

[2] G.Y. Handler and P.B. Mirchandani, Location on Networks Theoty and Algorithm, MIT Press, 1979.

[3] S.L. Hakimi, "Optimum distribution of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problems," Oper. Res., vol. 13, pp. 462-475, 1965.

[4] B.C. Tansel, R.L. Francis, and T.J. Lowe, "Location on networks: a survey. part 1: the p-center and p-median problems," Management Science, vol. 29, no. 4, pp. 482-497, April 1983.

[5] H. Tamura, M. Sengoku, S. Shinoda, and T. Abe, "Location problems on undirected flow networks," Trans. IEICE, vol. E73, no. 12, pp. 1989-1993, Dec. 1990.

[6] H. Tamura, M. Sengoku, S. Shinoda, and T. Abe, "Some covering problems in location theory on flow networks," IEICE Trans. Fundamentals, vol. E75-A, no. 6, pp. 678-684, June 1992.

[7] 渡辺　郁, 田村　裕, 仙石正和, "フローネットワークの出口配置問題," 信学論(A), vol. J78-A no. 8 pp. 938-946, Aug. 1995.

[8] 菅原秀仁, 田村　裕, 仙石正和, 篠田庄司, "各点で要求するフローの異なる場合の被覆問題," 信学会, 第9回回路とシステム軽井沢ワークショップ論文集, pp. 283-288, April 1996.

[9] H. Tamura, H. Sugawara, M. Sengoku, and S. Shinoda, "On a generalization of a covering problem called single cover on undirected flow networks," IEICE Trans. Fundamentals, vol. E80-A, no. 3, pp. 544-550, March 1997.

[10] 伊理正夫, 白川　功, 梶谷洋司, 篠田庄司他, 演習グラフ理論-基礎と応用-, コロナ社, 1983.

[11] A.V. Goldberg and R.E. Tarjan, "A new approach to the maximum flow problem," Proc. of the 18th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, pp. 136-146, 1986.

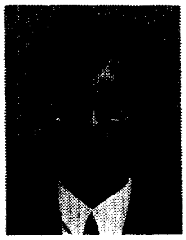
[12] 伊藤大雄, "全節点・領域間のk-枝連結性の高速判定法," 信学技報, COMP94-84, Jan. 1995.

[13] 伊藤大雄, "全節点・領域間がk-枝連結となる様に領域を決定する問題," 信学技報, COMP96-9, May 1996.

[14] 田村　裕, 菅原秀仁, 仙石正和, 篠田庄司, "フローネットワークにおける拡張された被覆問題について," 信学技報, CAS96-62, Oct. 1996.

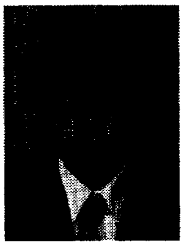
[15] 伊藤大雄, 横山光雄, "各節点の需要が異なる最小流入点集合配置問題," 信学技報, COMP97-14, May 1997.

(平成9年7月3日受付, 10月24日再受付)



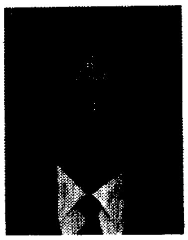
田村　裕　(正員)

昭57新潟大・教育卒．平2同大大学院自然科学研究科博士課程了．学術博．同年同大学院自然科学研究科助手．現在，新潟工科大学助教授．グラフ理論とその応用の研究に従事．平3年度，平7年度本会論文賞受賞．情報処理学会，IEEE各会員．



菅原　秀仁

平8新潟大・工・情報卒．同年東北インテリジェント通信入社．在学中，グラフ理論とその応用の研究に従事．



仙石　正和　(正員)

昭42新潟大・工・電気卒．昭47北大大学院博士課程了．工博．同年北大・工・電子助手．新潟大・工・情報助教授を経て，現在，同教授．回路網理論，グラフ・ネットワーク理論，情報伝送特に移動通信の研究に従事．平3年度，平7年度，平8年度本会論文賞，IEEE ICNNSP'95最優秀論文賞受賞．著書「演習グラフ理論」(共著)．情報処理学会，IEEEシニア各会員．

篠田　庄司　(正員)

昭39中大・理工・電気卒．昭48同大大学院理工学研究科電気工学専攻了．工博．現在，同大理工学部電気・電子工学科教授．回路，ネットワーク，システムの解析，診断，制御の研究に従事．現在，基礎・境界ソサイエティ編集長．平3年度，平8年度本会論文賞，IEEE ICNNSP'95最優秀論文賞受賞．著書「回路論入門(1)」ほか．

NII-Electronic Library Service