論　文

端子容量行列とは限らない行列からの無向フローネットワークの実現について

田村　裕[†]　仙石　正和[††]　篠田　庄司[†††]　阿部　武雄[†]

On a Realization Problem from Non-Terminal Capacity Matrices on Undirected Flow Networks

Hiroshi TAMURA[†], Masakazu SENGOKU[††], Shoji SHINODA[†††], and Takeo ABE[†]

あらまし　与えられた行列を無向フローネットワーク上へ実現する問題は，従来より研究されてきており，様々な結果が得られている．これらの結果は，2点間の最大流量と行列の成分が一致するように実現できるための必要十分条件であったり，その実現法である場合がほとんどである．しかしながら，実際には一致しなくとも近い値をとればよい場合もあるであろう．そこで，本論文では，各2点間にフローネットワークの最大流量として実現できるとは限らない値を与え，ある条件の下で実現する問題について考察する．まず，最大流量の上限，下限を与え，その範囲内に実現する問題について考察し，その必要十分条件を与える．次にこの結果を用いて，与えられた値と無向フローネットワークにおける最大流量との差を最小化する問題について考察し，その実現法について述べる．

キーワード　グラフ理論，フローネットワーク，端子容量行列，実現問題，NP-完全

1. まえがき

ネットワーク上で定式化される対象物の中で，特に輸送網のように流れという現象が工学上しばしば問題になる．フローネットワークは，この流れという現象をモデル化したものである．各2点間の最大流量は，その2点間の関係を表す基本的な量である．最大流量を行列の形で表現したものを端子容量行列という．先に行列を与えた場合，それが端子容量行列となるようフローネットワーク上に実現する問題は，古くから研究されており，無向フローネットワークの場合，実現できるための必要十分条件やその実現法等多くの成果が得られている [1], [2]．しかしながら，実際には，与えられる行列が端子容量行列とはならない場合もあるであろう．筆者らは以前に，行列の一部が与えられた場合のフローネットワーク上への実現問題について考察した [3]．本論文では，各2点間にフローネットワークの最大流量として実現できるとは限らない値を与え，ある条件の下で実現する問題について考察する．まず，各2点間に最大流量の上限，下限を与え，その範囲内に実現する問題について考察し，その必要十分条件を与える [4]．次に，この結果を用いて与えられた値と無向フローネットワークにおける最大流量との差を最小化する問題について考察し，その実現法について述べる．

2. 準　　備

本論文では，無向フローネットワークについて考察する．$N=(V(N),E(N),w_N)$ を無向フローネットワークとし，$V(N),E(N),w_N$ をそれぞれ，点集合，辺集合，非負の値をとる辺重みとする．v_i と v_j を N の点としたとき，$g_N(v_i,v_j)$ を2点間の最大流量（以降では容量という）を表すものとする．特に $g_N(v_i,v_i)=\infty$ と定める．i,j 成分が $g_N(v_i,v_j)$ であるような $n\times n$ 行列（n は N の点数）を N の端子容量行列という．また，そのような N が存在するような行列を単に端子容量行列という．本論文で扱う

† 新潟工科大学情報電子工学科，柏崎市
Dept. of Information and Electronics Engineering, Niigata Institute of Technology, Kashiwazaki-shi, 945–1195 Japan
†† 新潟大学工学部情報工学科，新潟市
Faculty of Engineering, Niigata University, Niigata-shi, 950–2181 Japan
††† 中央大学理工学部電気・電子工学科，東京都
Faculty of Science and Engineering, Chuo University, Tokyo, 112–8551 Japan

行列は，特に断わらない限り，対角成分が ∞ であり他が非負の値をとる $n \times n$ の対称行列とし，行列 A の i, j 成分は a_{ij} と小文字を用いて表すものとする．なお，定義せずに使用する用語，記号については，文献 [5] を参照されたい．

対称行列が端子容量行列となるための必要十分条件は古くから知られており，次の定理はその一つである．

［定理 1］ [1] 対角成分が ∞ であり，他が非負である対称行列 $A = [a_{ij}]$ が端子容量行列であるための必要十分条件は，すべての相異なる i, j, k において，

$$a_{ij} \geqq \min\{a_{ik}, a_{kj}\}$$

が成り立つことである． □

今，$n \times n$ の対称行列の対を $[A, B]$（ただし，任意の i, j に対して，$a_{ij} \leqq b_{ij}$）とすると，任意の i, j に対して，

$$a_{ij} \leqq g_N(v_i, v_j) \leqq b_{ij}$$

である n 点からなる無向フローネットワーク N が存在するとき，$[A, B]$ は区間実現可能であるといい，N を $[A, B]$ の区間実現という．なお以降では，行列の無向フローネットワーク N 上への実現を考える場合，N の点集合は $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ とし，行列の i, j 成分と N の v_i, v_j 間の容量を対応させるものとする．また，行列 A に対して，T_A は，辺 (v_i, v_j) の重みが a_{ij} である n 点からなる完全グラフの最大木を表すものとする．この区間実現に関しては次の結果が得られる．

［補題 1］ N を $[A, B]$ の区間実現とすると，任意の i, j に対して，以下の式が成り立つ．

$$g_{T_A}(v_i, v_j) \leqq g_N(v_i, v_j)$$

（証明）N は $[A, B]$ の区間実現であることから，

$$a_{ij} \leqq g_N(v_i, v_j)$$

が成り立つ．T_A における v_i から v_j への初等的な道を $(v_i, v_{k_1}, v_{k_2}, \ldots, v_{k_t}, v_j)$ とすると，

$$\begin{aligned} g_{T_A}(v_i, v_j) &= \min\{a_{ik_1}, a_{k_1k_2}, \ldots, a_{k_tj}\} \\ &\leqq \min\{g_N(v_i, v_{k_1}), \\ &\qquad g_N(v_{k_1}, v_{k_2}), \ldots, g_N(v_{k_t}, v_j)\} \end{aligned}$$

となる．定理 1 の不等式を繰り返し用いることより，

$$\leqq g_N(v_i, v_j)$$

となるので，証明が終了する． □

補題 1 を用いることで，区間実現可能であるための必要十分条件が得られる．

［定理 2］ $[A, B]$ が区間実現可能であるための必要十分条件は任意の i, j に対して，以下の式が成り立つことである．

$$b_{ij} \geqq g_{T_A}(v_i, v_j) \tag{1}$$

なお，式 (1) が成り立つ場合，T_A が $[A, B]$ の区間実現となっている．

（証明）N が $[A, B]$ の区間実現で，$b_{hk} < g_{T_A}(v_h, v_k)$ なる B の成分 b_{hk} が存在したとする．補題 1 より，

$$g_{T_A}(v_h, v_k) \leqq g_N(v_h, v_k)$$

となるので，$b_{hk} < g_N(v_h, v_k)$ となり，N が $[A, B]$ の区間実現であることに矛盾する．よって，任意の i, j に対して，$b_{ij} \geqq g_{T_A}(v_i, v_j)$ である．

逆に任意の B の要素 b_{ij} に対して，$b_{ij} \geqq g_{T_A}(v_i, v_j)$ が成り立っているとする．T_A は最大木であることから，$a_{ij} \leqq g_{T_A}(v_i, v_j)$ であるので，T_A が $[A, B]$ の区間実現となる． □

定理 2 より，区間実現可能であるための必要十分条件は得られたが，実現可能であるからといって，その区間内の任意の値をとることが可能であるとは限らない．これに関して次の結果を得た．

［定理 3］ $[A, B]$ は区間実現可能であるとする．N を $[A, B]$ の区間実現とし，(v_i, v_j) を N の点対とすると，次の不等式が成り立つ．

$$\begin{aligned} g_{T_A}(v_i, v_j) &\leqq g_N(v_i, v_j) \\ &\leqq \min\{b_{i'j'} | g_{T_A}(v_{i'}, v_i), g_{T_A}(v_j, v_{j'}) > b_{i'j'}\} \end{aligned} \tag{2}$$

逆に，式 (2) の上限，下限を満足する任意の値 s に対して，

$$g_{N'}(v_i, v_j) = s$$

となる $[A, B]$ の区間実現である無向フローネットワーク N' が存在する．

（証明）まず，式 (2) が成り立つことを示す．

$$b_{ij} \in \{b_{i'j'} | g_{T_A}(v_{i'}, v_i), g_{T_A}(v_j, v_{j'}) > b_{i'j'}\}$$

であるので，

$$\{b_{i'j'} | g_{T_A}(v_{i'}, v_i), g_{T_A}(v_j, v_{j'}) > b_{i'j'}\} \neq \phi$$

であることがわかる．

$[A,B]$ を区間実現可能とし，無向フローネットワーク N をその実現とする．(v_i,v_j) を N の点対とすると，補題 1 より，

$$g_{T_A}(v_i,v_j) \leqq g_N(v_i,v_j) \tag{3}$$

である．よって，

$$g_N(v_i,v_j) \leqq \min\{b_{i'j'} | g_{T_A}(v_{i'},v_i), g_{T_A}(v_j,v_{j'}) > b_{i'j'}\}$$

を示せばよい．今，

$$g_N(v_i,v_j) > \min\{b_{i'j'} | g_{T_A}(v_{i'},v_i), g_{T_A}(v_j,v_{j'}) > b_{i'j'}\}$$

であるような点対 (v_i,v_j) が存在したと仮定する．ここで，

$$b_{k_1k_2} = \min\{b_{i'j'} | g_{T_A}(v_{i'},v_i), g_{T_A}(v_j,v_{j'}) > b_{i'j'}\}$$

とおく．$b_{k_1k_2} < g_N(v_i,v_j)$，$b_{k_1k_2} < g_{T_A}(v_{k_1},v_i)$，$b_{k_1k_2} < g_{T_A}(v_j,v_{k_2})$ であることと，式 (3) より，

$$\min\{g_N(v_{k_1},v_i),\ g_N(v_i,v_j),\ g_N(v_j,v_{k_2})\} > b_{k_1k_2}$$

となる．したがって，定理 1 の不等式を繰り返し用いることより，$g_N(v_{k_1},v_{k_2}) > b_{k_1k_2}$ となるが，これは，N が $[A,B]$ の区間実現であることに矛盾する．したがって，任意の点対 (v_i,v_j) に対して，

$$g_N(v_i,v_j) \leqq \min\{b_{i'j'} | g_{T_A}(v_{i'},v_i), g_{T_A}(v_j,v_{j'}) > b_{i'j'}\}$$

となる．

次に，

$$g_{T_A}(v_i,v_j) \leqq s \leqq \min\{b_{i'j'} | g_{T_A}(v_{i'},v_i), g_{T_A}(v_j,v_{j'}) > b_{i'j'}\}$$

なる s を考え，v_i, v_j 間の容量が s となる無向フローネットワークを構成する．

今，T_A において，(v_i,v_j) が辺である場合，(v_i,v_j) の重みを s に変更する．(v_i,v_j) が辺でない場合，T_A に辺 (v_i,v_j) を加え，重みを s としたグラフの最大木 T' を考える．すなわち，T' は，T_A に辺 (v_i,v_j) を加えてできる基本閉路から重み最小の辺を削除したものである．このように T' を構成すると，(v_i,v_j) が T' の辺であっても，T' におけるある初等的な道が辺 (v_i,v_j) を通らなければ，それは T_A における道でもあることがわかる．

(v_i,v_j) が T_A の辺のときは，明らかに $g_{T'}(v_i,v_j) = s$ である．辺でない場合も，

$$g_{T_A}(v_i,v_j) \leqq s$$

であることから，やはり $g_{T'}(v_i,v_j) = s$ であることがわかる．

ここで，T' が $[A,B]$ の区間実現であることを示す．まず，任意の点対 (v_{i^*},v_{j^*}) に対して，

$$g_{T_A}(v_{i^*},v_{j^*}) \leqq g_{T'}(v_{i^*},v_{j^*})$$

であることから，

$$a_{i^*j^*} \leqq g_{T'}(v_{i^*},v_{j^*})$$

であることがわかる．

ここで，$g_{T'}(v_{i^*},v_{j^*}) > b_{i^*j^*}$ であるような点対 (v_{i^*},v_{j^*}) が存在したとする．$g_{T_A}(v_{i^*},v_{j^*}) \leqq b_{i^*j^*}$ であるので，(v_i,v_j) は T' の辺であり，T' における v_{i^*} から v_{j^*} への初等的な道上にある．よって，

$$g_{T'}(v_{i^*},v_{j^*}) \leqq s \tag{4}$$

となる．ここで，T' における v_{i^*} から v_i への初等的な道，v_j から v_{j^*} への初等的な道は，辺 (v_i,v_j) を通らないので，T_A における道でもある．よって，

$$g_{T_A}(v_{i^*},v_i) = g_{T'}(v_{i^*},v_i),$$
$$g_{T_A}(v_j,v_{j^*}) = g_{T'}(v_j,v_{j^*})$$

である．したがって，

$$g_{T_A}(v_{i^*},v_i),\ g_{T_A}(v_j,v_{j^*}) > b_{i^*j^*}$$

であることから，

$$s \leqq \min\{b_{i'j'} | g_{T_A}(v_{i'},v_i),\ g_{T_A}(v_j,v_{j'}) > b_{i'j'}\} \leqq b_{i^*j^*}$$

となるので，$s \leqq b_{i^*j^*}$ である．$b_{i^*j^*} < g_{T'}(v_{i^*},v_{j^*})$ であることより，$s < g_{T'}(v_{i^*},v_{j^*})$ となるが，これは式 (4) に矛盾する．したがって，任意の点対 (v_{i^*},v_{j^*}) に対して，

$$g_{T'}(v_{i^*},v_{j^*}) \leqq b_{i^*j^*}$$

となり，T' は，$g_{T'}(v_i,v_j) = s$ なる $[A,B]$ の区間実現である． □

3. 差の最大値が最小となる無向フローネットワーク

ここでは，行列 M が与えられたとき，その行列の各成分の値と対応する2点間の容量との差の最大値が最小となる無向フローネットワークの実現について考察する．

行列 M，無向フローネットワーク N に対して，

$$\max\{|g_N(v_i,v_j)-m_{ij}||1\leqq i,\ j\leqq n\}$$

の値を，M と N の最大差ということとし，行列 M に対して，最大差が最小となる無向フローネットワークを M の minimax 実現ということとする．

［補題 2］ M を任意の（端子容量行列とは限らない）行列，N を任意の無向フローネットワークとしたとき，M と N の最大差は，

$$\max\left\{\frac{g_{T_M}(v_i,v_j)-m_{ij}}{2}|1\leqq i,j\leqq n\right\} \tag{5}$$

以上となる．

（証明）式 (5) の値を c_M とする．今，

$$c_M=\frac{g_{T_M}(v_1,v_k)-m_{1k}}{2}$$

であるとし，かつ T_M における v_1 から v_k への初等的な道が $P=(v_1,v_2,\ldots,v_{k-1},v_k)$ で，P 上の重み最小の辺を (v_i,v_{i+1}) としても一般性を失わない．これより，

$$\frac{m_{ii+1}-m_{1k}}{2}=c_M$$

となる．

さて，最大差が c_M 未満となる実現が可能であると仮定する．N_0 をその実現とし，N_0 の端子容量行列を D とする．

各 $m_{jj+1}(j=1,\ldots,k-1)$ は，$g_{T_M}(v_1,v_k)=m_{ii+1}$ であったことから，

$$m_{jj+1}\geqq m_{ii+1} \tag{6}$$

である．また，N_0 において定理1の不等式を繰り返し用いることにより，

$$d_{1k}\geqq\min\{d_{jj+1}|j=1,\ldots,k-1\} \tag{7}$$

が成り立つ．今，

$$d_{hh+1}=\min\{d_{jj+1}|j=1,\ldots,k-1\}$$

と定める．ここで，次の二つの場合を考える．

（1） $d_{hh+1}\geqq m_{hh+1}$

$$\begin{aligned}d_{1k}-m_{1k}&\geqq d_{hh+1}-m_{1k} && \text{式 (7) より}\\ &\geqq m_{hh+1}-m_{1k} && \text{場合 (1) の仮定}\\ &\geqq m_{ii+1}-m_{1k} && \text{式 (6) より}\\ &=2c_M\end{aligned}$$

となり，N_0 において，

$$g_{N_0}(v_1,v_k)-m_{1k}=d_{1k}-m_{1k}\geqq 2c_M\geqq c_M$$

となり，最大差が c_M 未満の実現であることに矛盾する．

（2） $d_{hh+1}<m_{hh+1}$

N_0 は最大差 c_M 未満の実現であるので，

$$\begin{aligned}|d_{hh+1}-m_{hh+1}|&=m_{hh+1}-d_{hh+1}<c_M\\ &=(m_{ii+1}-m_{1k})/2\end{aligned}$$

となる．よって，

$$d_{hh+1}>m_{hh+1}-m_{ii+1}/2+m_{1k}/2$$

となる．ここで，式 (6) より，

$$\begin{aligned}d_{hh+1}&>m_{ii+1}-m_{ii+1}/2+m_{1k}/2\\ &=m_{ii+1}/2+m_{1k}/2\end{aligned} \tag{8}$$

となるので，

$$\begin{aligned}d_{1k}-m_{1k}&\geqq d_{hh+1}-m_{1k} && \text{式 (7) より}\\ &>(m_{ii+1}/2+m_{1k}/2)-m_{1k} && \text{式 (8) より}\\ &=m_{ii+1}/2-m_{1k}/2=c_M\end{aligned}$$

となり，やはり N_0 が最大差 c_M 未満の実現であることに矛盾する．

したがって，最大差が c_M 未満となることはない．□

ここで式 (5) の値を c_M としたとき，次のような二つの $n\times n$ 行列を考える．

$$A_M=[a_{ij}]\quad \text{ただし}, a_{ij}=\max\{m_{ij}-c_M,0\}$$
$$B_M=[b_{ij}]\quad \text{ただし}, b_{ij}=m_{ij}+c_M$$

定義から明らかに，

$$a_{ij} \leqq m_{ij} \leqq b_{ij}$$

である．このように行列 A_M，B_M を定義すると，次の定理が成り立つ．

［定理 4］ $[A_M, B_M]$ は区間実現可能であり，T_{A_M} がその区間実現である．

（証明）A_M の各成分は，M の成分から定数 c_M を減じている（負になるときは 0 とする）ので，T_M と辺集合が等しくなるように T_{A_M} を構成することができる．

定理 2 より，任意の i, j に対して，

$$b_{ij} \geqq g_{T_{AM}}(v_i, v_j)$$

が成り立つことを示せばよい．今，

$$b_{ij} < g_{T_{AM}}(v_i, v_j)$$

なる i, j が存在したとする．$b_{ij} \geqq 0$ より，$g_{T_A}(v_i, v_j) > 0$ である．つまり，T_{A_M} における v_i から v_j への初等的な道を $(v_{k_1}(=v_i), v_{k_2}, \ldots, v_{k_h}(=v_j))$ とすると，T_{A_M} における辺 $(v_{k_t}, v_{k_{t+1}})$ の重み $w_{T_{AM}}(v_{k_t}, v_{k_{t+1}})$ は $m_{k_t k_{t+1}} - c_M$ となっている．

T_M と T_{A_M} は辺集合が等しいので，

$$\begin{aligned} g_{T_M}(v_i, v_j) &= \min\{m_{k_1 k_2}, \ldots, m_{k_{h-1} k_h}\} \\ &= \min\{w_{T_{AM}}(v_{k_1}, v_{k_2}), \ldots, \\ &\qquad w_{T_{AM}}(v_{k_{h-1}}, v_{k_h})\} + c_M \\ &= g_{T_{AM}}(v_i, v_j) + c_M \end{aligned}$$

である．

また，B_M の定義から

$$m_{ij} = b_{ij} - c_M$$

であるので，

$$\begin{aligned} g_{T_M}(v_i, v_j) - m_{ij} &= g_{T_{AM}}(v_i, v_j) + c_M \\ &\qquad - (b_{ij} - c_M) \\ &= 2c_M + g_{T_{AM}}(v_i, v_j) - b_{ij} \end{aligned}$$

となる．$g_{T_{AM}}(v_i, v_j) > b_{ij}$ の仮定より

$$g_{T_M}(v_i, v_j) - m_{ij} > 2c_M$$

であるので，

$$c_M < \frac{g_{T_M}(v_i, v_j) - m_{ij}}{2}$$

となるが，これは，c_M の最大性に矛盾する．よって，任意の i, j に対して

$$b_{ij} \geqq g_{T_{AM}}(v_i, v_j)$$

であり，$[A_M, B_M]$ は区間実現可能で，T_{A_M} がその区間実現である． □

［定理 5］ $[A_M, B_M]$ の区間実現となる無向フローネットワーク N は，M の minimax 実現である．

（証明）N を $[A_M, B_M]$ の区間実現とする．v_i, v_j を N の任意の 2 点とすると，N が区間実現であることから，$a_{ij} \leqq g_N(v_i, v_j) \leqq b_{ij}$ である．A_M, B_M の定義から

$$\begin{aligned} b_{ij} - m_{ij} &= m_{ij} + c_M - m_{ij} = c_M \\ m_{ij} - a_{ij} &= m_{ij} - \max\{m_{ij} - c_M,\ 0\} \\ &\leqq m_{ij} - (m_{ij} - c_M) \\ &= c_M \end{aligned}$$

であるので，

$$\begin{aligned} |g_N(v_i, v_j) - m_{ij}| &\leqq \max\{b_{ij} - m_{ij}, m_{ij} - a_{ij}\} \\ &\leqq c_M \end{aligned}$$

となり，補題 2 より，N は行列 M の minimax 実現である． □

定理 4,5 より，$n \times n$ 行列 M が与えられたとき，その minimax 実現は，

1）T_M を構成する．

2）c_M を算出する．

3）T_M の各辺の重みを c_M だけ減ずる（負になるときは 0 とする）．

ことにより構成できる．1）は例えば Prim のアルゴリズム [6] を用いれば $O(n^2)$ で可能である．明らかに，2）は $O(n^3)$，3）は $O(n)$ で可能であるので，全体では，$O(n^3)$ で可能である．したがって，M の minimax 実現は多項式時間で求めることができる．

また定理 5 より，行列 M と minimax 実現 N の最大差は，必ず c_M となることがわかる．

次の補題も容易に導ける．

［補題 3］ 行列 M が与えられたとき，無向フローネットワーク N が M の minimax 実現となるための必要十分条件は，N が $[A_M, B_M]$ の区間実現であることである．

（証明）十分性は，定理 5 より．

N を行列 M の minimax 実現とする．M と N の最大差は c_M であるので，任意の i, j に対して，

$$|g_N(v_i, v_j) - m_{ij}| \leqq c_M$$

となっている．ここで次の二つの場合に分ける．

（1） $g_N(v_i, v_j) - m_{ij} \geqq 0$

$g_N(v_i, v_j) - m_{ij} \leqq c_M$ より，$g_N(v_i, v_j) \leqq m_{ij} + c_M = b_{ij}$ であり，$a_{ij} \leqq m_{ij} \leqq g_N(v_i, v_j) \leqq b_{ij}$ となるので，N は，$[A_M, B_M]$ の区間実現である．

（2） $g_N(v_i, v_j) - m_{ij} < 0$

$m_{ij} - g_N(v_i, v_j) \leqq c_M$ であるので，$m_{ij} - c_M \geqq 0$ のときは，

$$a_{ij} = m_{ij} - c_M \leqq g_N(v_i, v_j)$$

であり，$m_{ij} - c_M < 0$ のときは，

$$a_{ij} = 0 \leqq g_N(v_i, v_j)$$

である．いずれにせよ，

$$a_{ij} \leqq g_N(v_i, v_j)$$

であり，$a_{ij} \leqq g_N(v_i, v_j) < m_{ij} \leqq b_{ij}$ となるので，N は，$[A_M, B_M]$ の区間実現である． □

定理3と補題3より次の定理が得られる．

［定理6］ 行列 M に対して，無向フローネットワーク N を行列 M の minimax 実現とする．ここで，N の任意の点対 (v_i, v_j) に対して，次の不等式が成り立つ．

$$g_{T_{A_M}}(v_i, v_j) \leqq g_N(v_i, v_j)$$
$$\leqq \min\{b_{i'j'} | g_{T_{A_M}}(v_{i'}, v_i), g_{T_{A_M}}(v_j, v_{j'}) > b_{i'j'}\}$$

逆に，上式の上限，下限を満足する任意の値 s に対して，

$$g_{N'}(v_i, v_j) = s$$

となる M の minimax 実現である無向フローネットワーク N' が存在する． □

例：M として次の行列を考える．

$$M = \begin{bmatrix} \infty & 20 & 12 & 20 \\ 20 & \infty & 7 & 12 \\ 12 & 7 & \infty & 12 \\ 20 & 12 & 12 & \infty \end{bmatrix}.$$

すると，T_M は，図1のようになる．

$$c_M = \max\left\{ \frac{g_{T_M}(v_i, v_j) - m_{ij}}{2} | 1 \leqq i, j \leqq 4 \right\}$$
$$= \frac{g_{T_M}(v_2, v_4) - m_{24}}{2} = (20 - 12)/2 = 4$$

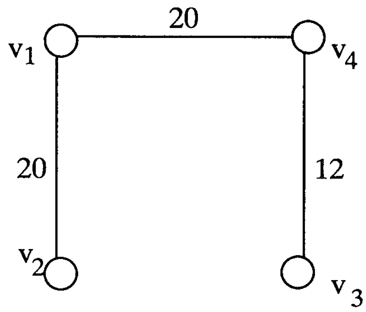


図1 無向フローネットワーク T_M
Fig. 1 An undirected flow network T_M.

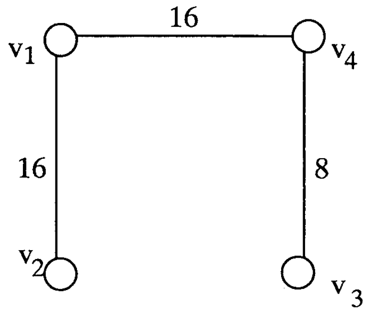


図2 M の minimax 実現 T_{A_M}
Fig. 2 A minimax realization T_{A_M} of M.

であるので，行列 A_M，B_M は以下のようになる．

$$A_M = \begin{bmatrix} \infty & 16 & 8 & 16 \\ 16 & \infty & 3 & 8 \\ 8 & 3 & \infty & 8 \\ 16 & 8 & 8 & \infty \end{bmatrix},$$

$$B_M = \begin{bmatrix} \infty & 24 & 16 & 24 \\ 24 & \infty & 11 & 16 \\ 16 & 11 & \infty & 16 \\ 24 & 16 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

よって，図2の T_{A_M} が M の minimax 実現となる無向フローネットワークである．

さて，ここで v_3，v_4 間の容量に関して定理6を適用すると，

$$g_{T_{A_M}}(v_3, v_4) = 8$$

であり，また，

$$g_{T_{A_M}}(v_3, v_3) = \infty, g_{T_{A_M}}(v_4, v_2) = 16 > b_{32} = 11$$

であるので，

$$\min\{b_{i'j'} | g_{T_{A_M}}(v_{i'}, v_3), g_{T_{A_M}}(v_4, v_{j'}) > b_{i'j'}\}$$
$$= b_{32} = 11$$

となる．よって，M の minimax 実現となる無向フローネットワークにおける v_3，v_4 間の容量は，8 以上 11 以下で，この間の任意の値をとる実現が存在する．

4. 最大差をとる点対数の最小化

ここまでは，minimax 実現という概念を導入し，行列 M の成分とその実現となる無向フローネットワークの容量との差の最大値が最小となるような無向フローネットワークを構成した．ところで，行列 M の成分と無向フローネットワークの容量との差が最大となる，つまり最大差をとる無向フローネットワークの点対は，要求した値と最も離れた状態であるので，この点対の数が少ない方がよりよい実現とも考えられる．前章で用いた M の minimax 実現の構成法では，T_M の各辺の重みを最大差 c_M 減じているので，この意味では，あまりよい実現法とはいえない．よってここでは，この点対の数を最小化する問題について考察する．なお，ここでの点対は非順序対とする．

最初に，次のように問題を定式化する．

Problem MINIMAX

Instance:行列 M, 自然数 k

Question: M の minimax 実現で，最大差をとる点対が k 個以下のものが存在するか？

Problem MINIMAX はクラス NP に属することは容易にわかる．

この章では，行列 M としてある特別な族を考える．行列 M の要素は，対角成分以外は，三つの値 c_1，c_2，c_3 のみをとるものとし，$0 < c_1 < c_2, c_3 = (c_1+3c_2)/4$ と定める（例えば，$c_1 = 2$，$c_2 = 10$，$c_3 = 8$）．明らかに，$c_1 < c_3 < c_2$ である．

この行列から，辺 (v_i, v_j) の重みが m_{ij} であるような，n 点からなる完全グラフ K_M を考える．$m_{ij} = c_1$ である点対 (v_i, v_j) に関して v_i から v_j への重み c_2 の辺からなる初等的な道が存在する場合，点対 (v_i, v_j) は性質 α をもつという．以降では，K_M において性質 α をもつ点対が存在するような M を考える．なお，V_M を K_M における性質 α をもつ点対の集合と定める．

定義より，点対 (v_i, v_j) は性質 α をもつことと，$m_{ij} = c_1$ で $g_{T_M}(v_i, v_j) = c_2$ であることは同値であることは明らかである．これにより，点対 (v_i, v_j) が性質 α をもつかどうかは多項式時間で決定できる．

［補題 4］ K_M において，(v_1, v_2) は性質 α をもつ点対とすると，M の任意の minimax 実現 N に対して，$c_M = (c_2 - c_1)/2$ であり，(v_1, v_2) は最大差をとる点対である．

（証明）辺の重みが 3 種類 c_1，c_3，c_2 で $c_1 < c_3 < c_2$ であることから，

$$c_M = \max\left\{\frac{g_{T_M}(v_i, v_j) - m_{ij}}{2} | 1 \leqq i, j \leqq n\right\} \leqq (c_2 - c_1)/2$$

である．点対 (v_1, v_2) が性質 α をもつとすると，性質 α の定義より，

$$\frac{g_{T_M}(v_1, v_2) - m_{12}}{2} = (c_2 - c_1)/2$$

であるので，$c_M = (c_2 - c_1)/2$ であり，(v_1, v_2) は最大差をとる点対である． □

補題 4 より，性質 α をもつ点対は，どんな minimax 実現においても必ず最大差をとる点対となるので，最大差をとる点対の数は $|V_M|$ 以上となる．

［補題 5］ K_M において，点対 (v_i, v_j) は性質 α をもつとし，P を K_M における v_i と v_j を結ぶ重み c_2 からなる初等的な道とする．N を M の任意の minimax 実現とするとき，P 上のある辺 (v_{h_1}, v_{h_2}) で，N の端子容量行列の h_1h_2 成分が $(c_1 + c_2)/2$ となるものが存在し，その点対 (v_{h_1}, v_{h_2}) は M と N の最大差をとる点対となる．

（証明）まず補題 4 より，$c_M = (c_2 - c_1)/2$ であることがわかる．今，P 上の各辺に対応する N の端子容量行列 D の成分が $(c_1 + c_2)/2$ より大きいと仮定する．すると，定理 1 の不等式を繰り返し用いることで，点対 (v_i, v_j) において，v_i, v_j 間の容量と $m_{ij}(= c_1)$ との差が $c_M = (c_2 - c_1)/2$ より大きくなり，N は M の minimax 実現とはならない．また，$(c_1 + c_2)/2$ 未満の D の成分 $d_{k_1k_2}$ が存在すると，点対 (v_{k_1}, v_{k_2}) において，v_{k_1}, v_{k_2} 間の容量と $m_{k_1k_2}(= c_2)$ との差が $c_M = (c_2 - c_1)/2$ より大きくなり，やはり minimax 実現とはならない．

以上より，P 上の辺 (v_{h_1}, v_{h_2}) で，対応する N の端子容量行列の成分 $d_{h_1h_2}$ が $(c_1+c_2)/2$ となるものが存在する．$m_{h_1h_2} = c_2$ であるので，点対 (v_{h_1}, v_{h_2}) において，v_{h_1}, v_{h_2} 間の容量と $m_{h_1h_2}$ との差は $(c_2-c_1)/2$ となり，(v_{h_1}, v_{h_2}) は M と N の最大差をとる点対である． □

補題 5 の (v_{h_1}, v_{h_2}) のような，$m_{ij} = c_2$ で N における容量が $(c_1 + c_2)/2$ と変更された点対の集合を

V_N とすると，補題 4，5 より最大差をとる点対の数は，少なくとも

$$|V_M| + |V_N|$$

以上となる．

次に，これら以外には最大差をとる点対の存在しない minimax 実現が存在することを示す．

［補題 6］ N を M の minimax 実現とすると，最大差をとる点対の数が，

$$|V_M| + |V_N|$$

以下である minimax 実現が存在する．

（証明）N の端子容量行列を D とし，辺 (v_i, v_j) の重みが d_{ij} であるような，n 点からなる完全グラフを K_D とすると，K_D には定理 1 の不等式より性質 α をもつような点対が存在しない．$(v_i, v_j) \in V_N$ であるとき，K_M における (v_i, v_j) の辺重みは c_2 で，K_D においては $(c_1 + c_2)/2$ となっている．ここで，次のように K_M の辺 (v_i, v_j) の重みを変更する．

K_Mにおける重み		変更された重み
c_1	$\rightarrow$	c_1
c_2	$\rightarrow$	$(c_1 + c_2)/2$
ただし，点対 (v_i, v_j) が V_Nに属す場合		
c_2	$\rightarrow$	c_2
ただし，点対 (v_i, v_j) が V_Nに属さない場合		
c_3	$\rightarrow$	$(5c_1 + 3c_2)/8$

このように修正された完全グラフを K'_M とすると，K'_M にも性質α をもつ点対が存在しないことは容易にわかる．K'_M の辺重みは，たかだか c_1，c_2，$(c_1 + c_2)/2$，$(5c_1 + 3c_2)/8$ の 4 種類である．ここで K'_M の最大木 T をとることで，M の minimax 実現となる．理由は以下のとおりである．

各点対 (v_i, v_j) を，以下の 6 通りに場合分けする．

（1） (v_i, v_j) が T の辺で $m_{ij} = c_1$

T における重みも c_1 なので，$|g_T(v_i, v_j) - m_{ij}| = c_1 - m_{ij} = 0$

（2） (v_i, v_j) が T の辺で $m_{ij} = c_2$

T における重みは，c_2 または $(c_1 + c_2)/2$ である．重みが $(c_1 + c_2)/2$ のときに，

$$|g_T(v_i, v_j) - m_{ij}| = (c_2 - c_1)/2$$

となるので，(v_i, v_j) は T において最大差をとる点対となる．このとき K'_M における重みが $(c_1 + c_2)/2$ であることから，$(v_i, v_j) \in V_N$ である．

（3） (v_i, v_j) が T の辺で $m_{ij} = c_3$

T における重みは，$(5c_1 + 3c_2)/8$ であるので，

$$\begin{aligned} |g_T(v_i, v_j) - m_{ij}| &= |(5c_1 + 3c_2)/8 - m_{ij}| \\ &= (c_1 + 3c_2)/4 - (5c_1 + 3c_2)/8 \\ &= (3c_2 - 3c_1)/8 \\ &< (c_2 - c_1)/2 \end{aligned}$$

（4） (v_i, v_j) が T の辺ではなく，$m_{ij} = c_1$

K'_M には性質 α をもつ点対が存在しないので，T における v_i, v_j 間の容量は，c_1，$(c_1 + c_2)/2$，$(5c_1 + 3c_2)/8$ のいずれかである．よって，いずれの場合も，v_i, v_j 間の容量と m_{ij} との差は $(c_2 - c_1)/2$ 以下である．ここで $(c_1 + c_2)/2$ のときは，T において最大差をとる点対となる．この場合，

$$c_1 < (c_1 + c_2)/2, (5c_1 + 3c_2)/8 < (c_1 + c_2)/2$$

であることより，T における v_i から v_j への初等的な道の辺重みは，$(c_1 + c_2)/2$ または c_2 である．K'_M の構成法より，この初等的な道上の辺の K_M における辺重みは c_2 である．つまり，点対 (v_i, v_j) は K_M において性質 α をもつので，$(v_i, v_j) \in V_M$ である．

（5） (v_i, v_j) が T の辺ではなく，$m_{ij} = c_2$

K'_M において，辺 (v_i, v_j) の重みは，c_2 または $(c_1 + c_2)/2$ である．よって，T における v_i, v_j 間の容量は，c_2 または $(c_1 + c_2)/2$ であり，v_i, v_j 間の容量と m_{ij} との差は $(c_2 - c_1)/2$ 以下である．ここで，T における v_i, v_j 間の容量が $(c_1 + c_2)/2$ のとき，(v_i, v_j) は T において最大差をとる点対となっている．このとき，K'_M における辺重みも $(c_1 + c_2)/2$ であるので，$(v_i, v_j) \in V_N$ である．

（6） (v_i, v_j) が T の辺ではなく，$m_{ij} = c_3$

K'_M において，辺 (v_i, v_j) の重みは，$(5c_1 + 3c_2)/8$ である．よって，T における容量は，c_2，$(c_1 + c_2)/2$，$(5c_1 + 3c_2)/8$ のいずれかであり，いずれの場合も，v_i, v_j 間の容量と $m_{ij} (= (c_1 + 3c_2)/4)$ との差は $(c_2 - c_1)/2$ 未満である．

以上，すべての場合で $|g_T(v_i, v_j) - m_{ij}| \leqq c_M$ であったので，T は M の minimax 実現である．そして上記の構成法では，T における最大差をとる点対は，N において V_M に属するか（(4)），V_N に属するか

((2), (5)) のどちらかである．よって，T において最大差をとる点対の数は $|V_M|+|V_N|$ 以下である． □

次に，K_M においていくつかの c_2 の辺重みを $(c_1+c_2)/2$ と変更することで，性質 α をもつ点対が存在しないようにすると次の補題が成り立つ．

［補題 7］ K_M において，いくつかの c_2 の辺重みを $(c_1+c_2)/2$ と変更し，性質 α をもつ点対が存在しないようにする．このように重みを変更した点対の集合を V_K とすると，M の minimax 実現で，最大差をとる点対の数が，

$$|V_M|+|V_K|$$

以下のものが存在する．

（証明）補題 6 の証明と同様に，K_M における c_3 の辺重みを $(5c_1+3c_2)/8$ とし，最大木 T^* を構成すると，T^* は最大差をとる点対の数が $|V_M|+|V_K|$ 以下となる minimax 実現となる（詳細は付録参照）． □

さて今，M の minimax 実現 $N_{\min}$ を，最大差をとる点対の数が最小なものとする．補題 6 と $N_{\min}$ の最小性より，最大差をとる点対の数は $|V_M|+|V_{N_{\min}}|$ である．$N_{\min}$ の端子容量行列 D をとり，補題 6 の証明における K'_M を構成する．K'_M は，K_M において $V_{N_{\min}}$ に属する点対の辺重みを $(c_1+c_2)/2$ と変更したものであり，かつ K'_M には性質 α をもつ点対は存在しない．よって補題 7 の証明における構成法により，最大差をとる点対の数が $|V_M|+|V_{N_{\min}}|$ の minimax 実現が構成できる．以上より，V_K の要素数を最小化することで，最大差をとる点対の数が最小となる minimax 実現を構成できる．

以下で例をあげて説明する．

今，$c_1=2$，$c_2=10$ とすると，$c_3=8$ となり，$(c_2-c_1)/2=4$ である．ここで，次の M を考えると，K_M は図 3 となる．

$$M=\begin{bmatrix} \infty & 10 & 2 & 2 & 8 \\ 10 & \infty & 10 & 10 & 2 \\ 2 & 10 & \infty & 8 & 8 \\ 2 & 10 & 8 & \infty & 8 \\ 8 & 2 & 8 & 8 & \infty \end{bmatrix}$$

性質 α をもつ点対は，(v_1,v_3)，(v_1,v_4) の二つである．性質 α をもたないようにするには，例えば，(v_2,v_3)，(v_2,v_4) の重みを c_2 から $(c_1+c_2)/2(=6)$ に変更する．ここで，重み c_3 の辺の重みを $(5c_1+3c_2)/8(=5)$ とし，最大木 T^* を考えると図 4 のようになる．T^* において最大差をとる点対は，(v_1,v_3)，(v_1,v_4) と (v_2,v_3)，(v_2,v_4) の合計四つである．

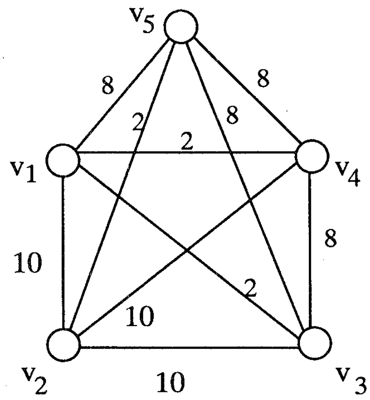


図 3　完全グラフ K_M
Fig. 3　A complete graph K_M.

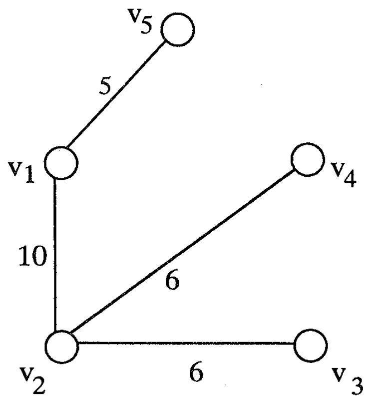


図 4　M の minimax 実現 T^*
Fig. 4　A minimax realization T^* of M.

なお，各点対が性質 α をもたないようにするためには，K_M において辺 (v_1,v_2) の重みを 6 に変更するだけでもよい．この場合その最大木をとると，最大差をとる点対は (v_1,v_3),(v_1,v_4) と (v_1,v_2) の三つとなる minimax 実現となり，この例ではこれが最小である．

今，この問題をグラフ理論における言葉でいい替える．

K_M において c_3 の重みをもつ辺は，最大差をとる点対数を最小化する際には無視できるので，K_M から除去して考える．このときに，性質 α をもたないように重み c_2 の辺の重みを $(c_1+c_2)/2$ に変更することになるので，次のような問題となる．

問題 A

Instance:重み c_1，c_2 の 2 種類が辺に付けられた無向グラフ G，自然数 t

Question:重み c_2 からなる辺の集合 E_0 で，$G-E_0$

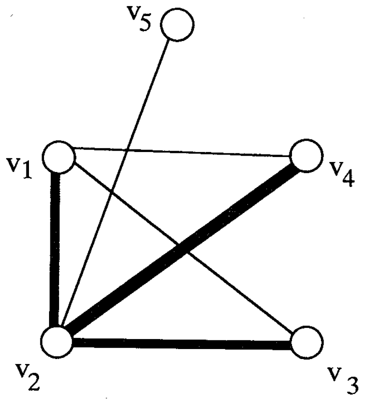


図5 グラフ G
Fig. 5 A graph G.

においては性質 α をもつ点対が存在しないとする．要素数が t 以下の E_0 が存在するか？

図3の例で，重み c_1 と c_2 の辺のみ抜き出して，c_2 を太い辺で表すと図5のグラフ G となる．先の操作で，辺 (v_2, v_3)，(v_2, v_4) の重みを c_2 から $(c_1 + c_2)/2$ に変更したのは，問題Aでは，図5の G において $E_0 = \{(v_2, v_3), (v_2, v_4)\}$ とすることに対応する．

問題AがNPに属することは容易にわかる．また，点対 (v_i, v_j) が G の重み c_1, c_2 の辺であれば，行列 M の i, j 成分をそれぞれ c_1, c_2 とし，辺でなければ c_3 とすることで M を構成する．また，$k = t + |V_M|$（点対が性質 α をもつかどうかは多項式時間で決定できるので，$|V_M|$ は多項式時間で算出可能）とすれば，問題AはMINIMAX問題に多項式変換できる．

ここで，次の頂点被覆問題を考える．

[頂点被覆問題]

無向グラフ G において，任意の辺に対して，そのいずれかの端点が点集合 S の要素であるとき，S を G の頂点被覆という．G の頂点被覆で要素数 t 以下のものが存在するか？

この頂点被覆問題はNP-完全であることが知られている [7]．

今，G からグラフ G' を次のように構成する．

G の点集合を $\{v_1, \ldots, v_n\}$ とすると，G に点 v_0 を加え，各点 v_i と v_0 を辺で結ぶ．G の各辺に重み c_1 を付け，v_0 から結んだ各辺に重み c_2 を付ける．すると，G' に問題Aを適用したとき，辺 (v_0, v_i) を E_0 の要素とすることは，G に頂点被覆問題を適用したときの v_i を S の要素とすることに対応する．よって，G において $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_t}\}$ が頂点被覆であることと，

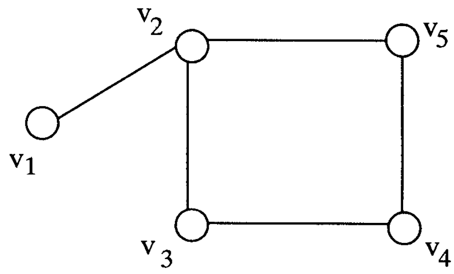


図6 グラフ G
Fig. 6 A graph G.

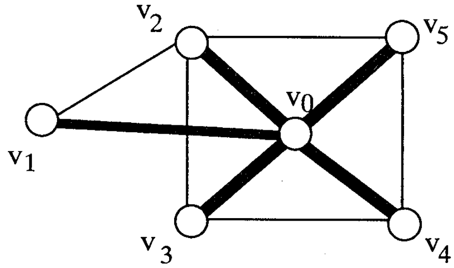


図7 グラフ G'
Fig. 7 A graph G'.

G' において $\{(v_0, v_{i_j}) | j = 1, \ldots, t\}$ が条件を満たすような辺集合であることは同等であることが容易にわかる．

例えば，図6の G から構成されたグラフ G' が図7である．図7において太い辺が重み c_2，細い辺が重み c_1 が付けられていることを表している．ここで $\{v_2, v_4\}$ は，図6の G における頂点被覆であるが，これは，問題Aを図7の G' に適用させた場合に，辺集合 $\{(v_0, v_2), (v_0, v_4)\}$ が条件を満たすことに対応している．

以上より，次の結果を得る．

［定理7］ 頂点被覆問題は，MINIMAX問題に多項式変換できる．よって，MINIMAX問題はNP-完全である． □

5. むすび

本論文では，端子容量行列とは限らない行列を与えた場合に，無向フローネットワーク上へ実現する問題について考察した．結果として，各2点間の容量の上限と下限が与えられた場合に，それらが無向フローネットワーク上へ実現できるための必要十分条件を与えた．また，実現可能な場合に2点間の容量の真の上限，下限を与えた．次に，2点間の容量と行列の成分との差の最大値を最小とする問題について考察し，そ

の実現法を示した．最後に，2点間の容量と行列の成分との差が最大となる点対の数を最小化する問題については，NP-完全問題であることを示した．ここでの議論は，無向フローネットワーク固有の性質を使っているため，直接有向フローネットワークへ応用することはできない．これについては，今後の課題である．

文　献

[1] R.E. Gomory and T.C. Hu, "Multi-terminal network flows," J. Soc. Indust. Appl. Math., vol.9, no.4, pp.551–570, 1961.

[2] L.R. Ford, Jr. and D.R. Fulkerson, Flow in networks, Princeton University Press, 1962.

[3] 田村　裕，仙石正和，篠田庄司，阿部武雄，"一部の最大流量からの無向フローネットワークの実現，" 信学論（A），vol.J72-A, no.8, pp.1316–1326, Aug. 1989.

[4] H. Tamura, M. Sengoku, S. Shinoda, and T. Abe, "Realization of a network from the upper and lower bounds of the distances (or capacities) between vertices," Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems(ISCAS'93), vol.4, pp.2545–2548, May 1993.

[5] 伊理正夫，白川　功，梶谷洋司，篠田庄司他，演習グラフ理論–基礎と応用，コロナ社，1983.

[6] R.C. Prim, "Shortest connection networks and some generalizations," Bell Syst. Tech. J., vol.36, pp.1389–1401, 1957.

[7] A.V. Aho, J.E. Hopcroft, and J.D. Ullman, The Design and Analysis of Computer Algorithms, Addison-Wesley, 1974.

付　　録

補題7の証明

K_M において，V_K の各要素に対応する辺の重みを $(c_1+c_2)/2$ と変更し，c_3 の重みのついた辺を $(5c_1+3c_2)/8$ と変更した完全グラフを K''_M とする．この構成法から，K''_M には性質 α をもつ点対は存在しない．K''_M の辺重みはたかだか c_1，c_2，$(c_1+c_2)/2$，$(5c_1+3c_2)/8$ の4種類である．ここで K''_M の最大木 T^* をとることで，M の minimax 実現となる．理由は以下のとおりである．

各点対 (v_i, v_j) を，以下の6通りに場合分けする．

（1） (v_i, v_j) が T^* の辺で $m_{ij}=c_1$

T^* における重みも c_1 なので，$|g_{T^*}(v_i,v_j)-m_{ij}| = c_1-m_{ij}=0$

（2） (v_i, v_j) が T^* の辺で $m_{ij}=c_2$

T^* における重みは，c_2 または $(c_1+c_2)/2$ である．重みが $(c_1+c_2)/2$ のときに，

$$|g_{T^*}(v_i,v_j)-m_{ij}| = (c_2-c_1)/2$$

となるので，(v_i, v_j) は T^* において最大差をとる点対となる．このとき K''_M における重みは $(c_1+c_2)/2$ であることから，$(v_i, v_j)\in V_k$ である．

（3） (v_i, v_j) が T^* の辺で $m_{ij}=c_3$

T^* における重みは，$(5c_1+3c_2)/8$ であるので，

$$\begin{aligned}|g_{T^*}(v_i,v_j)-m_{ij}| &= |(5c_1+3c_2)/8-m_{ij}|\\ &= (c_1+3c_2)/4-(5c_1+3c_2)/8\\ &= (3c_2-3c_1)/8\\ &< (c_2-c_1)/2\end{aligned}$$

（4） (v_i, v_j) が T^* の辺ではなく，$m_{ij}=c_1$

K''_M には性質 α をもつ点対が存在しないので，T^* における v_i, v_j 間の容量は，c_1，$(c_1+c_2)/2$，$(5c_1+3c_2)/8$ のいずれかである．よって，いずれの場合も，v_i, v_j 間の容量と m_{ij} との差は $(c_2-c_1)/2$ 以下である．ここで $(c_1+c_2)/2$ のときは，T^* において最大差をとる点対となる．この場合，

$$c_1<(c_1+c_2)/2,\ (5c_1+3c_2)/8<(c_1+c_2)/2$$

であることより，T^* における v_i から v_j への初等的な道の辺重みは，$(c_1+c_2)/2$ または c_2 である．よって，この初等的な道上の辺の K_M における辺重みは c_2 である．つまり，点対 (v_i, v_j) は K_M において性質 α をもつので，$(v_i, v_j)\in V_M$ である．

（5） (v_i, v_j) が T^* の辺ではなく，$m_{ij}=c_2$

K''_M において，辺 (v_i, v_j) の重みは，c_2 または $(c_1+c_2)/2$ である．よって，T^* における v_i, v_j 間の容量は，c_2 または $(c_1+c_2)/2$ であり，v_i, v_j 間の容量と m_{ij} との差は $(c_2-c_1)/2$ 以下である．ここで，T^* における v_i, v_j 間の容量が $(c_1+c_2)/2$ のとき，(v_i, v_j) は T^* において最大差をとる点対となっている．このとき，K''_M における辺重みも $(c_1+c_2)/2$ であるので，$(v_i, v_j)\in V_K$ である．

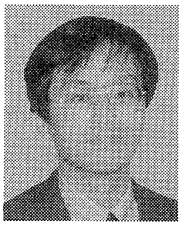
（6） (v_i, v_j) が T^* の辺ではなく，$m_{ij}=c_3$

K''_M において，辺 (v_i, v_j) の重みは，$(5c_1+3c_2)/8$ である．よって，T^* における容量は，c_2，$(c_1+c_2)/2$，$(5c_1+3c_2)/8$ のいずれかであり，いずれの場合も，v_i, v_j 間の容量と $m_{ij}(=(c_1+3c_2)/4)$ との差は $(c_2-c_1)/2$ 未満である．

以上，すべての場合で $|g_{T^*}(v_i,v_j)-m_{ij}|\leqq c_M$ であったので，T^* は M の minimax 実現である．そし

て上記の構成法では，T^* における最大差をとる点対は，V_M に属するか((4))，V_K に属するか((2)，(5))のどちらかである．よって，T^* において最大差をとる点対の数は $|V_M|+|V_K|$ 以下である． □

（平成 10 年 11 月 16 日受付，11 年 5 月 25 日再受付）



田村　裕　（正員）

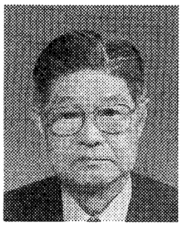
昭 57 新潟大・教育卒．平 2 同大大学院自然科学研究科博士課程了．学術博．同年同大大学院自然科学研究科助手．現在，新潟工科大学教授．グラフ理論とその応用の研究に従事．平 3，7，9 年度本会論文賞受賞．情報処理学会，IEEE 各会員．

仙石　正和　（正員）

昭 42 新潟大・工・電気卒．昭 47 北大大学院博士課程了．工博．同年北大・工・電子助手．新潟大・工・情報助教授を経て，現在，同教授．回路網理論，グラフ・ネットワーク理論，情報伝送特に移動通信の研究に従事．平 3，7，8，9 年度本会論文賞，IEEE ICNNSP'95 最優秀論文賞受賞．著書「演習グラフ理論」（共著）．情報処理学会，IEEE シニア各会員．

篠田　庄司　（正員）

昭 39 中大・理工・電気卒．昭 48 同大大学院理工学研究科電気工学専攻了．工博．現在，同大理工学部電気・電子工学科教授．回路，ネットワーク，システムの解析，診断，制御の研究に従事．平 3，8，9 年度本会論文賞，IEEE ICNNSP'95 最優秀論文賞受賞．著書「回路論入門（1）」ほか．



阿部　武雄　（正員）

昭 24 東工大・工・電気卒．電気研究所，千葉工大，東工大工業教員養成所を経て，昭 41 新潟大・工・教授．平 3 千葉工大教授．現在，新潟工科大学学長．工博．この間，高周波標準，レーザ光の降雪中の伝搬，マイクロ波素子，損失媒質中の伝搬，及び移動通信，ネットワークなどの研究に従事．平 3，8 年度本会論文賞，IEEE ICNNSP'95 最優秀論文賞受賞．著書「電気・電子計測」（共著）など．