## 論　文

# 無向フローネットワークのminimax実現問題のある一般化について

田村　裕[†a)]　仙石　正和[††]　篠田　庄司[†††]　阿部　武雄[†]

# On a Generalization of the Minimax Realization Problem on Undirected Flow Networks

Hiroshi TAMURA[†a)], Masakazu SENGOKU[††], Shoji SHINODA[†††], and Takeo ABE[†]

**あらまし**　与えれられた行列を，行列の各成分と２点間の最大流量が等しくなるように無向フローネットワーク上へ実現する問題は，従来より研究されてきており，様々な結果が得られている．しかしながらこれらの結果は，２点間の最大流量と行列の値がすべて一致するように実現できるための必要十分条件であったり，その実現法である場合がほとんどである．実際には，一致しなくとも近い値をとればよい場合もあるであろう．筆者らは以前に，各２点間に，フローネットワーク上に実現できるとは限らない値（要求値）を与えた場合に，その実現となる無向フローネットワークにおける最大流量との差を最小とする問題について考察し，その実現法について述べた．本論文ではこの「差」の概念を一般化した実現問題の解法について考察する．

**キーワード**　グラフ理論，フローネットワーク，端子容量行列，実現問題

## 1. まえがき

ネットワーク上で定式化される対象物の中で，特に輸送網のように流れという現象が工学上しばしば問題になる．フローネットワークは，この流れという現象をモデル化したものである．各２点間の最大流量は，その２点間の関係を表す基本的な量である．最大流量を行列の形で表現したものを端子容量行列と呼ぶ．先に行列を与えた場合，それが端子容量行列となるようフローネットワーク上に実現する問題は，古くから研究されており，無向フローネットワークの場合，実現できるための必要十分条件やその実現法等多くの成果が得られている [1], [2]．しかしながら実際には，与えられる行列が，端子容量行列とはならない場合もあるであろう．筆者らは以前に，行列の一部が与えられた場合のフローネットワーク上への実現問題 [3] や各２点間に最大流量の上限，下限を与え，その範囲内に実現する問題 [4] について考察した．また，与えられた値（要求値）と実現値との差を最小とする問題について考察し，その実現法についても考察した [5], [6]．本論文では，要求値と実現値との差を表す関数を定義し，[5], [6] での結果を拡張する．

† 新潟工科大学情報電子工学科，柏崎市
Dept. of Information and Electronics Engineering, Niigata Institute of Technology, Kashiwazaki-shi, 945–1195 Japan
†† 新潟大学工学部情報工学科，新潟市
Dept. of Information Engineering, Niigata University, Niigata-shi, 950–2181 Japan
††† 中央大学理工学部電気電子情報通信工学科，東京都
Dept. of Electrical, Electronic and Communication Engineering, Chuo University, Tokyo, 112–8551 Japan
a) E-mail: tamura@iee.niit.ac.jp

## 2. 準　　備

本論文では，無向フローネットワークについて考察する．$N = (V, E, w_N)$ を無向フローネットワークとし，$V, E, w_N$ をそれぞれ，点集合，辺集合，非負の値をとる辺重みとする．$v_i$ と $v_j$ を $N$ の点としたとき，$g_N(v_i, v_j)$ を２点間の最大流量（以降では容量と呼ぶ）を表すものとする．特に，$g_N(v_i, v_i) = \infty$ と定める．$ij$ 成分が $g_N(v_i, v_j)$ であるような $n \times n$ 行列（$n$ は $N$ の点数）を $N$ の端子容量行列と呼ぶ．また，そのような $N$ が存在するような行列を単に端子容量行列と呼ぶ．

対称行列が端子容量行列となるための必要十分条件は古くから知られている．

［定理 1］[1]

対角成分が $\infty$ であり，ほかが非負である対称行列 $A = [a_{ij}]$（$a_{ij}$ は $A$ の $ij$ 成分を表す）が端子容量行列であるための必要十分条件は，すべての相異なる $i$, $j$, $k$ において，

$$a_{ij} \geqq \min\{a_{ik}, a_{kj}\}$$

が成り立つことである. □

ここではまず，二つの実数値間の「差」を表す関数を定義する.

[定義 1]

関数 $f$ を $R \times R$ から $R$ への関数であるとし，以下の性質をもつとする. このとき，$f$ を **D-関数**という. なお，$R$ は実数の集合を表すものとする.

1) $f(a,b) = f(b,a)$

2) $a \leqq b \leqq c \leqq d$ ならば, $f(a,d) \geqq f(b,c)$ □

以降では，行列 $M$ の無向フローネットワーク $N$ 上への実現を考える場合，$M$ は $n \times n$ の各成分が非負の対称行列で，対角成分は $\infty$ であるとする. $N$ の点集合は $v_1, v_2, \ldots, v_n$ とし，行列の $i$，$j$ 成分と $N$ の $v_i$，$v_j$ 間の容量を対応させるものとする. また，行列 $A$ に対して，$\boldsymbol{T_A}$は，辺 $(v_i, v_j)$ の重みが $a_{ij}$ である $n$ 点からなる完全グラフの最大木を表すものとする.

ここで，本論文で取り上げる問題を定義する.

[定義 2]

行列 $M$，D-関数 $f$，無向フローネットワーク $N$ に対して，

$$\max\{f(m_{ij}, g_N(v_i, v_j)) | 1 \leqq i, j \leqq n\}$$

の値を，$M$ と $N$ の ***f*-最大差** という. 行列 $M$ に対して，$f$-最大差 が最小となる無向フローネットワークを $M$ の ***f*-minimax 実現** という.

行列 $M$，D-関数 $f$ を入力とし，$M$ の $f$-minimax 実現を求める問題を ***f*-minimax 実現問題**という.

□

筆者らは，以前に $f$ が次のような関数の場合の $f$-minimax 実現問題を考察している.

$$f(a,b) = |a-b| \quad \text{（文献 [5]）}$$

$$f(a,b) = \max\{a/b, b/a\}$$

（ただし $a, b > 0$，文献 [6]）

これらの関数は，明らかに D-関数であることがわかる.

## 3. *f*-minimax 問題に関する主要な結果

まず，D-関数に関する次の補題を示す.

[補題 1]

$a, b$ を $a \leqq b$ なる実数とし，$f$ を D-関数とする. このとき，

$$\max\{f(a,r), f(r,b)\}$$

が最小となる実数値 $r$ で，$a \leqq r \leqq b$ となるものが存在する.

（証明）

最小値をとる $r$ は，$a$ 以上 $b$ 以下の範囲にはなく，$r < a$ であるか，$b < r$ であったとする. ここで，$r < a$ であったとする.

$$r < a \leqq b \leqq b$$

であるので，D-関数の定義の 2）から

$f(r,b) \geqq f(a,b)$ である. また，

$$r < a \leqq a \leqq a$$

であるので，やはり D-関数の定義の 2）から，$f(a,r) \geqq f(a,a)$ である.

よって，

$$\max\{f(a,r), f(r,b)\} \geqq \max\{f(a,a), f(a,b)\}$$

となるので，$r$ が最小値をとることより，

$$\max\{f(a,r), f(r,b)\} = \max\{f(a,a), f(a,b)\}$$

であり，$r$ として $a$ を選ぶことが可能である. よって，$r$ は，$a$ 以上 $b$ 以下の範囲にはないという仮定に矛盾する.

$b < r$ の場合も同様に矛盾するので，$a \leqq r \leqq b$ となる $r$ が存在する. □

次の補題は，$M$ の $f$-minimax 実現を求めるための，本質的な結果である.

[補題 2]

$M$ を任意の（端子容量行列とは限らない）行列，$N$ を任意の無向フローネットワーク，$f$ を D-関数としたとき，$M$ と $N$ の $f$-最大差は，

$$\max\{\min\{\max\{f(m_{ij}, r), f(r, g_{T_M}(v_i, v_j))\} | r \in R\} | 1 \leqq i, j \leqq n\}$$

以上となる.

（証明）

上式の値を $c_M$ とする. 今，

$$c_M = \min\{\max\{f(m_{1k}, r), f(r, g_{T_M}(v_1, v_k))\} | r \in R\} \quad (1)$$

であったとしてよい. $T_M$ が最大木であることから，

$$m_{1k} \leqq g_{T_M}(v_1, v_k) \quad (2)$$

である．

$T_M$ における $v_1$ から $v_k$ への初等的な道を $P=(v_1,v_2,\dots,v_{k-1},v_k)$ とし，$P$ 上の重み最小の辺を $(v_i,v_{i+1})$ としても一般性を失わない．これより，

$$g_{T_M}(v_1,v_k)=m_{ii+1} \tag{3}$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned}&f(m_{1k},m_{1k})\leqq f(m_{1k},m_{ii+1}) \text{ であるので，}\\ &c_M=\min\{\max\{f(m_{1k},r),f(r,m_{ii+1})\}|r\in R\}\\ &\quad\leqq \max\{f(m_{1k},m_{1k}),f(m_{1k},m_{ii+1})\}\\ &\quad= f(m_{1k},m_{ii+1})\end{aligned} \tag{4}$$

である．

また，各 $m_{jj+1}(j=1,\dots,k-1)$ は，$g_{T_M}(v_1,v_k)=m_{ii+1}$ であったことから，

$$m_{jj+1}\geqq m_{ii+1} \tag{5}$$

である．

さて，$f$-最大差が $c_M$ 未満となる実現が可能であると仮定する．$N_0$ をその実現とし，$N_0$ における $v_i$，$v_j$ 間の容量を $g_{ij}$ とおく．つまり $g_{ij}=g_{N_0}(v_i,v_j)$ である．$N_0$ は $f$-最大差が $c_M$ 未満の実現であるので，任意の $i$，$j$ に対して，

$$f(m_{ij},g_{ij})<c_M \tag{6}$$

が成り立つ．

ここで，$N_0$ において定理 1 の不等式を繰り返し用いることにより，

$$g_{1k}\geqq \min\{g_{jj+1}|j=1,\dots,k-1\} \tag{7}$$

が成り立つ．今，

$$g_{hh+1}=\min\{g_{jj+1}|j=1,\dots,k-1\}$$

と定める．ここで，$g_{hh+1}$ と $m_{hh+1}$ に関して次の二つの場合を考える．

**(I)** $\boldsymbol{g_{hh+1}\geqq m_{hh+1}}$

$$\begin{aligned}g_{1k}&\geqq g_{hh+1} && \text{(式 (7) より)}\\ &\geqq m_{hh+1} && \text{((I) の仮定より)}\\ &\geqq m_{ii+1} && \text{(式 (5) より)}\\ &\geqq m_{1k} && \text{(式 (2), (3) より)}\end{aligned}$$

であるので，

$$g_{1k}\geqq m_{ii+1}\geqq m_{1k} \tag{8}$$

となる．

したがって，

$$\begin{aligned}&f(m_{1k},g_{1k})\\ &\quad\geqq f(m_{1k},m_{ii+1}) && \text{(式 (8) と D-関数より)}\\ &\quad\geqq c_M && \text{(式 (4) より)}\end{aligned}$$

となり，$N_0$ において，

$$f(m_{1k},g_{1k})\geqq c_M$$

となるので，式 (6) に矛盾する．

**(II)** $\boldsymbol{g_{hh+1}<m_{hh+1}}$

式 (6) より

$$\begin{aligned}f(g_{hh+1},m_{hh+1})&<c_M\\ &\leqq f(m_{1k},m_{ii+1})\\ &\qquad\text{(式 (4) より)}\end{aligned} \tag{9}$$

である．また，式 (2)，(3) と (5) より，

$$m_{1k}\leqq m_{ii+1}\leqq m_{hh+1} \tag{10}$$

となる．したがって，式 (9) と **(II)** の仮定より，$f$ は D-関数であるので，$m_{1k}<g_{hh+1}$ となる．ここで，$g_{1k}\geqq m_{ii+1}$ であると，

$$\begin{aligned}f(m_{1k},g_{1k})&\geqq f(m_{1k},m_{ii+1})\\ &\qquad\text{(式 (10) と D-関数より)}\\ &\geqq c_M \quad\text{(式 (4) より)}\end{aligned}$$

となるので，式 (6) に矛盾する．よって，$g_{1k}<m_{ii+1}$ となる．$g_{hh+1}\leqq g_{1k}$ であるので，結局，

$$m_{1k}<g_{hh+1}\leqq g_{1k}<m_{ii+1}\leqq m_{hh+1} \tag{11}$$

となる．

式 (6) より，

$$f(g_{hh+1},m_{hh+1})<c_M \tag{12}$$

である．式 (11) と D-関数より，

$$f(g_{hh+1},m_{ii+1})\leqq f(g_{hh+1},m_{hh+1}) \tag{13}$$

である．

ここで，$f(m_{1k},g_{hh+1})\leqq f(g_{hh+1},m_{hh+1})$ と仮定すると，式 (13) より，

$$\begin{aligned}&\max\{f(m_{1k},g_{hh+1}),f(g_{hh+1},m_{ii+1})\}\\ &\qquad\leqq f(g_{hh+1},m_{hh+1})\end{aligned}$$

となるが，式 (12) より，

$$\begin{aligned} c_M &> f(g_{hh+1}, m_{hh+1}) \\ &\geqq \max\{f(m_{1k}, g_{hh+1}), f(g_{hh+1}, m_{ii+1})\} \\ &\geqq \min\{\max\{f(m_{1k}, r), f(r, m_{ii+1})\} | r \in R\} \\ &= \min\{\max\{f(m_{1k}, r), \\ &\qquad f(r, g_{T_M}(v_1, v_k))\} | r \in R\} \quad (\text{式 (3) より}) \end{aligned}$$

となり，式 (1) に矛盾する．したがって，

$$f(m_{1k}, g_{hh+1}) > f(g_{hh+1}, m_{hh+1}) \tag{14}$$

である．

ところで，$c_M = \min\{\max\{f(m_{1k}, r), f(r, m_{ii+1})\} | r \in R\}$ を考えると，補題 1 より，$c_M = \max\{f(m_{1k}, a), f(a, m_{ii+1})\}$ で，$m_{1k} \leqq a \leqq m_{ii+1}$ なる $a$ が存在する．$a$ は，この中で最大なものをとる．ここで，$g_{hh+1}$ と $a$ に関して，二つの場合に分ける．

**(II-i)** $g_{hh+1} \leqq a$

D-関数であることと式 (11) より，

$$f(m_{1k}, g_{hh+1}) \leqq f(m_{1k}, a) \tag{15}$$

である．よって，

$$\begin{aligned} f(m_{1k}, a) &\geqq f(m_{1k}, g_{hh+1}) && (\text{式 (15) より}) \\ &> f(g_{hh+1}, m_{hh+1}) && (\text{式 (14) より}) \\ &\geqq f(g_{hh+1}, m_{ii+1}) \\ &&& (\text{式 (11) と D-関数より}) \\ &\geqq f(a, m_{ii+1}) \\ &&& (\text{(II-i) の仮定と D-関数より}) \end{aligned}$$

となるので，

$$f(m_{1k}, a) > f(a, m_{ii+1}) \tag{16}$$

となる．ここで，式 (15) の等号が成り立たない，つまり

$$f(m_{1k}, a) > f(m_{1k}, g_{hh+1}) \tag{17}$$

と仮定すると，

$$\begin{aligned} &\max\{f(m_{1k}, a), f(a, m_{ii+1})\} \\ &\quad = f(m_{1k}, a) && (\text{式 (16) より}) \\ &\quad > f(m_{1k}, g_{hh+1}) && (\text{式 (17) より}) \\ &\quad > f(g_{hh+1}, m_{hh+1}) && (\text{式 (14) より}) \\ &\quad \geqq f(g_{hh+1}, m_{ii+1}) && (\text{式 (11) と D-関数より}) \end{aligned}$$

となるので，

$$\max\{f(m_{1k}, a), f(a, m_{ii+1})\} > \max\{f(m_{1k}, g_{hh+1}), f(g_{hh+1}, m_{ii+1})\}$$

となる．しかしながら，$a$ の定義より

$$\min\{\max\{f(m_{1k}, r), f(r, m_{ii+1})\} | r \in R\} = \max\{f(m_{1k}, a), f(a, m_{ii+1})\}$$

であることに矛盾する．したがって，式 (15) より，

$$f(m_{1k}, a) = f(m_{1k}, g_{hh+1}) \tag{18}$$

である．また，式 (16)，(18) より，

$$c_M = f(m_{1k}, a) = f(m_{1k}, g_{hh+1}) \tag{19}$$

である．よって，

$$\begin{aligned} &f(m_{1k}, g_{1k}) \\ &\quad \geqq f(m_{1k}, g_{hh+1}) && (\text{式 (11) と D-関数より}) \\ &\quad = c_M && (\text{式 (19) より}) \end{aligned}$$

なので，$N_0$ は，$f$-最大差 $c_M$ 以上の実現となり矛盾する．

**(II-ii)** $a < g_{hh+1}$

このとき，

$$m_{1k} \leqq a < g_{hh+1} \leqq g_{1k} \leqq m_{ii+1} \tag{20}$$

となっている．ここで，次の二つの場合に分ける．

**(II-ii-a)** $(c_M =) f(m_{1k}, a) \geqq f(a, m_{ii+1})$

$$\begin{aligned} f(m_{1k}, g_{1k}) &\geqq f(m_{1k}, a) \quad (\text{式 (20) と D-関数より}) \\ &= c_M \end{aligned}$$

となり，$N_0$ が，$f$-最大差 $c_M$ 以上の実現となり矛盾する．

**(II-ii-b)** $f(m_{1k}, a) < f(a, m_{ii+1}) \quad (= c_M)$

$$\begin{aligned} f(m_{1k}, g_{1k}) &< c_M \quad (\text{式 (6) より}) \\ &= f(a, m_{ii+1}) \end{aligned} \tag{21}$$

である．ここで，

$$f(m_{1k}, g_{hh+1}) \leqq f(a, m_{ii+1}) \tag{22}$$

と仮定すると，

$$f(g_{hh+1}, m_{ii+1}) \leqq f(a, m_{ii+1}) \quad (\text{式 (20) と D-関数}) \tag{23}$$

であるので，

$$c_M = f(a, m_{ii+1})$$
$$\geqq \max\{f(m_{1k}, g_{hh+1}), f(g_{hh+1}, m_{ii+1})\}$$
（式 (22) と (23) より）

となる．$c_M = \min\{\max\{f(m_{1k}, r), f(r, m_{ii+1})\}|r \in R\}$ であるので，等号が成り立つが，**(II-ii)** の仮定から $a < g_{hh+1}$ であるので，$a$ の最大性に矛盾する．

よって，

$$f(m_{1k}, g_{hh+1}) > f(a, m_{ii+1}) \tag{24}$$

となる．式 (21) と (24) より

$$f(m_{1k}, g_{hh+1}) > f(a, m_{ii+1}) > f(m_{1k}, g_{1k})$$

となるが，これは，式 (20) より D-関数であることに矛盾する．

以上より，すべての場合に矛盾が導けたので，そのような $N_0$ は存在せず，$f$-最大差は常に $c_M$ 以上となることがわかる． □

文献 [5] では，D-関数 $f(a,b)$ を $|a-b|$ で定義していたため，

$$\min\{\max\{f(a,r), f(r,b)\}|r \in R\}$$

なる $r$ は $a$ と $b$ の平均，つまり

$$r = (b+a)/2$$

であり，

$$\min\{\max\{f(a,r), f(r,b)\}|r \in R\}$$
$$= |b - r|$$
$$= (b-a)/2$$

である．実際 [5] では，以下の補題が成り立っているので，補題 2 は，以前の結果を一般化したものであることがわかる．

［補題 3］[5]

$M$ を任意の（端子容量行列とは限らない）行列，$N$ を任意の無向フローネットワークとしたとき，$M$ と $N$ の $f$-最大差は，

$$\max\left\{\frac{g_{T_M}(v_i, v_j) - m_{ij}}{2} | 1 \leqq i, j \leqq n\right\}$$

以上となる． □

## 4. *f*-minimax 実現を求めるアルゴリズム

この章では，$f$-minimax 実現を求めるアルゴリズム MINIMAX$(M, f)$ を提案する．

**アルゴリズム MINIMAX$(M, f)$**

入力：行列 $M$，D-関数 $f$

出力：$M$ の $f$-minimax 実現

Step1）$T_M$ を構成する．

Step2）$T_M$ の各辺 $(v_i, v_j)$ に実数値を対応させる関数 $s(v_i, v_j)$，$d(v_i, v_j)$ を定義し，初期値として $s(v_i, v_j)$ には $w_{T_M}(v_i, v_j)$，$d(v_i, v_j)$ には $f(w_{T_M}(v_i, v_j), w_{T_M}(v_i, v_j))^*$ を与える．

Step3）$T_M$ の辺ではない，各点対 $(v_i, v_j)$ に対して，重みが $g_{T_M}(v_i, v_j)$ となる $v_i$ から $v_j$ への道上の辺 $(v_h, v_k)$ すべてについて以下の操作を行う．

$$\min\{\max\{f(m_{ij}, r), f(r, g_{T_M}(v_i, v_j))\}|r \in R\}$$

を算出し，$d(v_h, v_k)$ より大きければ，$d(v_h, v_k)$ をその値に更新し，$s(v_h, v_k)$ を $r$（ただし，$m_{ij} \leqq r \leqq g_{T_M}(v_i, v_j)$ なる $r$ で最小なもの，これは補題 1 より存在する）とする．

Step4）$T_M$ の各辺 $e$ の重みを $s(e)$ に変更した $T'_M$ を出力し，終了する．

（$^*(v_i, v_j)$ が $T_M$ の辺であることより，$g_{T_M}(v_i, v_j) = w_{T_M}(v_i, v_j)$ であるので，$f(w_{T_M}(v_i, v_j), w_{T_M}(v_i, v_j)) = \min\{\max\{f(m_{ij}, r), f(r, g_{T_M}(v_i, v_j))\}|r \in R\}$ となることに注意.）

例：$M$ として次の行列を考える．

$$M = \begin{bmatrix} \infty & 20 & 12 & 20 \\ 20 & \infty & 7 & 12 \\ 12 & 7 & \infty & 12 \\ 20 & 12 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

また，D-関数は $f(a,b) = |a-b|$ とする．

Step1) $T_M$ として，図 1 のネットワークが構成されたとする．ここで

$$c_M = \max\{\min\{\max\{f(m_{ij}, r), f(r, g_{T_M}(v_i, v_j))\}|r \in R\}|1 \leqq i, j \leqq 4\}$$
$$= \min\{\max\{f(m_{24}, r), f(r, g_{T_M}(v_2, v_4))\}|r \in R\}$$
$$= \min\{\max\{f(12, r), f(r, 20)\}|r \in R\}$$
$$= f(16, 20) = 4$$

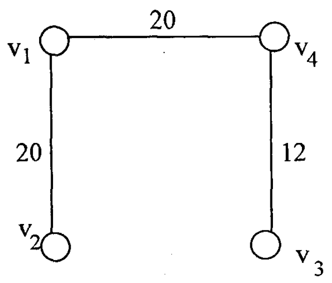



図1　無向フローネットワーク $T_M$
Fig. 1　An undirected flow network $T_M$.

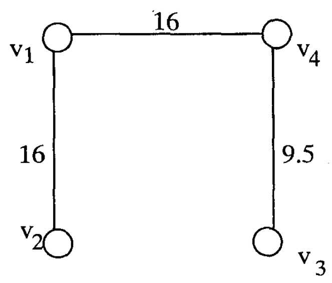



図2　$M$ の $f$-minimax 実現 $T'_M$
Fig. 2　An $f$-minimax realization $T'_M$ of $M$.

となるので，補題 2 より $M$ の $f$-minimax 実現においては，$f$-最大差 が 4 以上となる．

Step2)

$d(v_1,v_2)=0,\quad s(v_1,v_2)=20,$
$d(v_1,v_4)=0,\quad s(v_1,v_4)=20,$
$d(v_3,v_4)=0,\quad s(v_3,v_4)=12$

Step3)-1　点対 $(v_1,v_3)$ に対して，

$$g_{T_M}(v_1,v_3)=w_{T_M}(v_3,v_4)=12$$

であるので，

$$\begin{aligned}&\min\{\max\{f(m_{13},r),f(r,g_{T_M}(v_1,v_3))\}|r\in R\}\\&=\min\{\max\{f(12,r),f(r,12)\}|r\in R\}\\&=\max\{f(12,12),f(12,12)\}\\&=0=d(v_3,v_4)\end{aligned}$$

よって，$s(v_3,v_4)=12$ は更新しない．

Step3)-2　点対 $(v_2,v_3)$ に対して，

$$g_{T_M}(v_2,v_3)=w_{T_M}(v_3,v_4)=12$$

であるので，

$$\begin{aligned}&\min\{\max\{f(m_{23},r),f(r,g_{T_M}(v_2,v_3))\}|r\in R\}\\&=\min\{\max\{f(7,r),f(r,12)\}|r\in R\}\\&=\max\{f(7,9.5),f(9.5,12)\}\\&=2.5>0=d(v_3,v_4)\end{aligned}$$

よって，

$$d(v_3,v_4)=2.5,\quad s(v_3,v_4)=9.5$$

と更新する．

Step3)-3　点対 $(v_2,v_4)$ に対して，

$$g_{T_M}(v_2,v_4)=w_{T_M}(v_1,v_2)=w_{T_M}(v_1,v_4)=20$$

であるので，

$$\begin{aligned}&\min\{\max\{f(m_{24},r),f(r,g_{T_M}(v_2,v_4))\}|r\in R\}\\&=\min\{\max\{f(12,r),f(r,20)\}|r\in R\}\\&=\max\{f(12,16),f(16,20)\}\\&=4>0=d(v_1,v_2)=d(v_1,v_4)\end{aligned}$$

よって，

$$d(v_1,v_2)=4,\quad s(v_1,v_2)=16$$
$$d(v_1,v_4)=4,\quad s(v_1,v_4)=16$$

と更新する．

Step4)　出力 $T'_M$ は図 2 のようになる．

実際，$M$ と $T'_M$ の $f$-最大差 は，

$$\begin{aligned}&\max\{f(m_{ij},g_{T'_M}(v_i,v_j))|1\leqq i,j\leqq 4\}\\&=f(m_{12},g_{T'_M}(v_1,v_2))\\&=4\end{aligned}$$

となるので，補題 2 より $f$-minimax 実現 となっている．

なお，D-関数が $f(a,b)=|a-b|$ である場合，文献 [5] で提案した $f$-minimax 実現 を求めるアルゴリズムは，

1）$T_M$ を構成する．

2）$c_M$ を算出する．

3）$T_M$ の各辺の重みを $c_M$ だけ減ずる（負になるときは 0 とする）．

というものである．このアルゴリズムでは，3) で，各辺の重みをすべて $c_M$ だけ小さくしているので，アルゴリズム MINIMAX$(M,f)$ とは異なった出力となる．実際文献 [5] のアルゴリズムによる $M$ の $f$-minimax 実現 は，図 3 のようになる．

[アルゴリズム MINIMAX$(M,f)$ の正当性の証明]

$M$ と $T'_M$ との $f$-最大差 $c_x$ をとる点対を $(u,u')$ とする．ここで，以下の二つの場合に分ける．

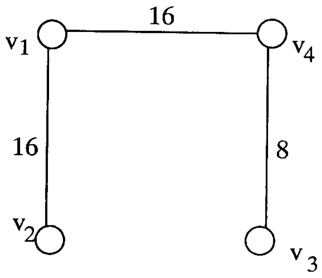



図 3 文献 [5] のアルゴリズムによる minimax 実現
Fig. 3 Another $f$-minimax realization of $M$.

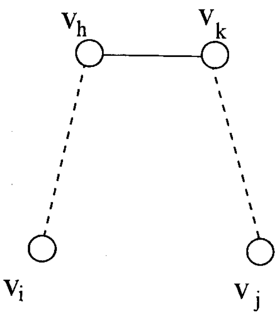



図 4 場合 (I) の証明のための図
Fig. 4 Explanation for the proof of case (I).

**(I) 点対 $(u, u')$ が $T'_M$ の辺である**

ここで $(u, u') = (v_h, v_k)$ であるとする．辺であることから，$c_x = f(m_{hk}, w_{T'_M}(v_h, v_k))$ である．ここで，アルゴリズムの Step3) で，$s(v_h, v_k)$ が一度も更新されなかったとすると，

$$\begin{aligned}c_x &= f(m_{hk}, m_{hk})\\ &= \min\{\max\{f(m_{hk}, r), f(r, w_{T_M}(v_h, v_k))\} | r \in R\}\\ &\leqq \max\{\min\{\max\{f(m_{ij}, r), f(r, g_{T_M}(v_i, v_j))\}\\ &\qquad |r \in R\} | 1 \leqq i, j \leqq n\} = c_M\end{aligned}$$

となり，$f$-最大差 が $c_M$ 以下の実現となる．

次に，アルゴリズムの Step3) で点対 $(v_i, v_j)$ に関する操作より，最終的に $s(v_h, v_k)$ を更新し，$T'_M$ の辺重み $w_{T'_M}(v_h, v_k)$ となったとすると（図 4 参照，なお同図において，点線は道を表すものとする），

$$\begin{aligned}d(v_h, v_k) &= \min\{\max\{f(m_{ij}, r),\\ &\qquad f(r, g_{T_M}(v_i, v_j))\} | r \in R\}\\ &= \max\{f(m_{ij}, s(v_h, v_k)),\\ &\qquad f(s(v_h, v_k), g_{T_M}(v_i, v_j))\}\end{aligned}$$

となる．

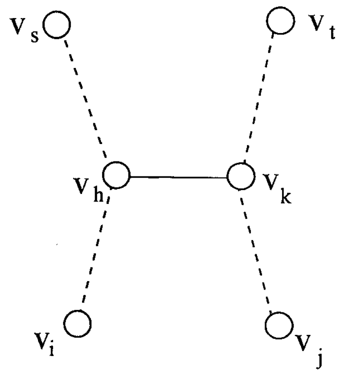



図 5 場合 (II) の証明のための図
Fig. 5 Explanation for the proof of case (II).

$g_{T_M}(v_i, v_j) = m_{hk}$，$s(v_h, v_k) = w_{T'_M}(v_h, v_k)$ であるので，$f(s(v_h, v_k), g_{T_M}(v_i, v_j)) = c_x$ である．したがって，$d(v_h, v_k) = \max\{f(m_{ij}, s(v_h, v_k)), c_x\}$ より，$d(v_h, v_k) \geqq c_x$ である．

また，$c_M = \max\{\min\{\max\{f(g_{T_M}(v_i, v_j), r), f(r, m_{ij})\} | r \in R\} | 1 \leqq i, j \leqq n\}$ であるので，$c_M \geqq d(v_h, v_k) \geqq c_x$ となり，$f$-最大差 が $c_M$ 以下の実現となる．

**(II) 点対 $(u, u')$ が $T'_M$ の辺ではない**

ここで $(u, u') = (v_i, v_j)$ であるとする．辺でないことから，$c_x = f(m_{ij}, g_{T'_M}(v_i, v_j))$ である．$T_M$ における点対 $(v_i, v_j)$ において，アルゴリズムの Step3) で辺 $(v_h, v_k)$ に対する関数 $s$ と $d$ が更新されたとする．つまり，

$$g_{T_M}(v_i, v_j) = w_{T_M}(v_h, v_k) \tag{25}$$

となっている．このとき，更新された $d(v_h, v_k)$ と $s(v_h, v_k)$ の値をそれぞれ，$d_0$，$s_0$ とする．

まず，

$$s_0 \geqq w_{T'_M}(v_h, v_k)$$

となることを，以下で示す．

$$s_0 < w_{T'_M}(v_h, v_k) \tag{26}$$

であったとする．ここで，Step3) において，点対 $(v_s, v_t)$ に関する操作により，最終的に $s(v_h, v_k)$ を更新し，$T'_M$ の辺重み $w_{T'_M}(v_h, v_k)$ となったとする（図 5）．今，$s_0 \leqq m_{st}$ とすると，

$$s_0 \leqq m_{st} \leqq w_{T'_M}(v_h, v_k) \leqq w_{T_M}(v_h, v_k)$$

であるので，$f$ が D-関数であることより，

$$f(s_0, w_{T_M}(v_h, v_k)) \geqq \max\{f(m_{st}, w_{T'_M}(v_h, v_k)),$$

$$f(w_{T'_M}(v_h, v_k), w_{T_M}(v_h, v_k))\}$$

となるが，$d_0$ の定義から

$$f(s_0, w_{T_M}(v_h, v_k)) \leqq d_0 \tag{27}$$

であるので，$d(v_h, v_k)$ の値が $d_0$ より更新されたことに矛盾する．よって，

$$m_{st} < s_0 \tag{28}$$

である．ここで，式 (26) と D-関数より

$$f(w_{T'_M}(v_h, v_k), w_{T_M}(v_h, v_k)) \leqq f(s_0, w_{T_M}(v_h, v_k)) \tag{29}$$

となる．$\min\{\max\{f(m_{st}, r), f(r, w_{T_M}(v_h, v_k))\}|r \in R\}$ の値を $d_1$ とおくと，

$$\begin{aligned} d_1 &= \max\{f(m_{st}, w_{T'_M}(v_h, v_k)), \\ &\qquad f(w_{T'_M}(v_h, v_k), w_{T_M}(v_h, v_k))\} \\ &= f(m_{st}, w_{T'_M}(v_h, v_k)) \\ &\qquad \text{（式 (27), (29) と } d_1 > d_0 \text{より）} \\ &> d_0 = \max\{f(m_{hk}, s_0), f(s_0, w_{T_M}(v_h, v_k))\} \end{aligned} \tag{30}$$

である．

$$\begin{aligned} d_1 &= f(m_{st}, w_{T'_M}(v_h, v_k)) \\ &\geqq f(m_{st}, s_0) \quad \text{（式 (26), (28) と D-関数より）} \end{aligned}$$

であり，

$$d_1 > f(s_0, w_{T_M}(v_h, v_k)) \quad \text{（式 (30) より）}$$

であるので，

$$\begin{aligned} d_1 &= \max\{f(m_{st}, w_{T'_M}(v_h, v_k)), \\ &\qquad f(w_{T'_M}(v_h, v_k), w_{T_M}(v_h, v_k))\} \\ &= \max\{f(m_{st}, s_0), f(s_0, w_{T_M}(v_h, v_k))\} \end{aligned}$$

となる．しかし，$s_0 < w_{T'_M}(v_h, v_k)$ であるので，アルゴリズムの Step3) において，点対 $(v_s, v_t)$ に関する操作で，最小な値 $w_{T'_M}(v_h, v_k)$ を選んだことに矛盾する．

以上より，$s_0 \geqq w_{T'_M}(v_h, v_k)$ となるが，ここで二つの場合に分ける．

**(II-i)** $m_{ij} \leqq g_{T'_M}(v_i, v_j)$

$$\begin{aligned} m_{ij} &\leqq g_{T'_M}(v_i, v_j) \leqq w_{T'_M}(v_h, v_k) \leqq s_0 \\ &\leqq w_{T_M}(v_h, v_k) \quad (= m_{hk}) \end{aligned} \tag{31}$$

である．

$$\begin{aligned} f(m_{ij}, s_0) &\geqq f(m_{ij}, g_{T'_M}(v_i, v_j)) \\ &\qquad \text{（式 (31) と D-関数より）} \\ &\geqq f(w_{T'_M}(v_h, v_k), w_{T_M}(v_h, v_k)) \\ &\qquad \text{（点対 } (v_i, v_j) \text{ が } f\text{-最大差をとることより）} \\ &\geqq f(s_0, w_{T_M}(v_h, v_k)) \\ &\qquad \text{（式 (31) と D-関数より）} \end{aligned} \tag{32}$$

より，

$$\begin{aligned} &\max\{f(m_{ij}, s_0), f(s_0, g_{T_M}(v_i, v_j))\} \\ &\quad = \max\{f(m_{ij}, s_0), f(s_0, w_{T_M}(v_h, v_k))\} \\ &\qquad \text{（式 (25) より）} \\ &\quad = f(m_{ij}, s_0) \quad \text{（式 (32) より）} \end{aligned} \tag{33}$$

である．

したがって，

$$\begin{aligned} c_x &= f(m_{ij}, g_{T'_M}(v_i, v_j)) \leqq f(m_{ij}, s_0) \\ &\qquad \text{（式 (31) と D-関数より）} \\ &= \max\{f(m_{ij}, s_0), f(s_0, g_{T_M}(v_i, v_j))\} \\ &\qquad \text{（式 (33) より）} \\ &= \min\{\max\{f(m_{ij}, r), \\ &\qquad f(r, g_{T_M}(v_i, v_j))\}|r \in R\} \quad \text{（} s_0 \text{の定義より）} \\ &\leqq c_M \end{aligned}$$

となり，$c_M$ 以下の実現となる．

**(II-ii)** $m_{ij} > g_{T'_M}(v_i, v_j)$

$T'_M$ における $v_i$ から $v_j$ への道上で重み最小の辺を $(v_{i'}, v_{j'})$ とする（図 6）．つまり，

$$g_{T'_M}(v_i, v_j) = w_{T'_M}(v_{i'}, v_{j'}) \tag{34}$$

である．

$$\begin{aligned} g_{T'_M}(v_{i'}, v_{j'}) &= w_{T'_M}(v_{i'}, v_{j'}) \\ &\qquad \text{（} (v_{i'}, v_{j'}) \text{ は } T'_M \text{の辺より）} \\ &= g_{T'_M}(v_i, v_j) \qquad \text{（式 (34) より）} \\ &< m_{ij} \qquad \text{（(II-ii) の仮定より）} \end{aligned}$$

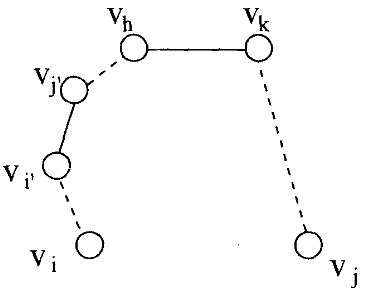



図 6　場合 (II-ii) の証明のための図
Fig. 6　Explanation for the proof of case (II-ii).

$\leqq w_{T_M}(v_h, v_k)$　（$T_M$の定義より）

$\leqq w_{T_M}(v_{i'}, v_{j'})$　(Step3) で辺 $(v_h, v_k)$ に対して更新されたことから，$(v_h, v_k)$ は $T_M$ における $v_i$ から $v_j$ への道上で重み最小の辺となることより）

$= m_{i'j'}$　（$(v_{i'}, v_{j'})$ は $T_M$の辺より）

であるので，D-関数より

$$f(g_{T'_M}(v_{i'}, v_{j'}), m_{i'j'}) \geqq f(g_{T'_M}(v_i, v_j), m_{ij})$$

となる．$(v_{i'}, v_{j'})$ は $T_M$ の辺なので，(I) より左辺は $c_M$ 以下である．よって，右辺も $c_M$ 以下となる．

(I), (II) よりアルゴリズム MINIMAX$(M, f)$ の出力 $T'_M$ の $f$-最大差 は $c_M$ 以下となり，補題 2 より $T'_M$ は $f$-minimax 実現となる．　□

ここで，MINIMAX$(M, f)$ において，$\min\{\max\{f(m_{ij}, r), f(r, g_{T_M}(v_i, v_j))\} | r \in R\}$ の算出と $r$（ただし，$m_{ij} \leqq r \leqq g_{T_M}(v_i, v_j)$ なる $r$ で最小）の決定が，それぞれ定数時間で可能であるとすると，計算量は以下のとおりである．

Step1) では，例えば Prim 法 [7] を用いれば，$O(n^2)$ である．Step2), Step4) は，$O(n)$ である．Step3) では，点対数は $O(n^2)$ であり，点対間の道の長さは $O(n)$ であるので，$O(n^3)$ となる．したがって，全体では $O(n^3)$ となる．

以上をまとめると，次の定理が導かれる．

［定理 2］

行列 $M$, D-関数を $f$ としたとき，$\min\{\max\{f(m_{ij}, r), f(r, g_{T_M}(v_i, v_j))\} | r \in R\}$ の算出と $r$（ただし，$m_{ij} \leqq r \leqq g_{T_M}(v_i, v_j)$ なる $r$ で最小）の決定が，それぞれ定数時間であるならば，$M$ の $f$-minimax 実現問題 は，多項式時間で解くことが可能である．　□

## 5. むすび

本論文では，端子容量行列とは限らない行列を与えた場合に，無向フローネットワーク上へ実現する問題について考察した．二つの値の差を表す D-関数を定義し，2 点間の容量と行列の値との差（= D-関数の値）の最大値が最小となる無向フローネットワークの実現法を示した．ここでの議論は，無向フローネットワーク固有の性質を使っているため，直接有向フローネットワークへ適用することはできない．これについては，今後の課題である．

## 文　献

[1] R.E. Gomory and T.C. Hu, "Multi-terminal network flows," J. Soc. Indust. Appl. Math., vol.9, no.4, pp.551–570, 1961.

[2] L.R. Ford,Jr. and D.R. Fulkerson, Flow in networks, Princeton University Press, 1962.

[3] 田村　裕，仙石正和，篠田庄司，阿部武雄，"一部の最大流量からの無向フローネットワークの実現，" 信学論 (A), vol.J72-A, no.8, pp.1316–1326, Aug. 1989.

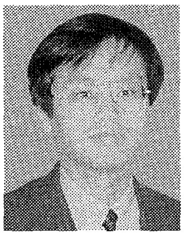
[4] H. Tamura, M. Sengoku, S. Shinoda, and T. Abe, "Realization of a network from the upper and lower bounds of the distances (or capacities) between vertices," Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems(ISCAS'93), vol.4, pp.2545–2548, May 1993.

[5] 田村　裕，仙石正和，篠田庄司，阿部武雄，"端子容量行列とは限らない行列からの無向フローネットワークの実現について，" 信学論 (A), vol.J82-A, no.11, pp.1719–1730, Nov. 1999.

[6] H. Tamura, M. Sengoku, S. Shinoda, and T. Abe, "On a minimax realization problem on flow networks," Proc. 1999 IEEE Region 10 Conference (Tencon'99), pp.801–804, Sept. 1999.

[7] R.C. Prim, "Shortest connection networks and some generalizations," Bell Syst. Tech. J., vol.36, pp.1389–1401, 1957.

（平成 12 年 6 月 19 日受付，10 月 13 日再受付）



**田村　裕**　（正員）

昭57新潟大・教育卒．平2同大大学院自然科学研究科博士課程了．学術博．同年同大大学院自然科学研究科助手．現在，新潟工科大学教授．グラフ理論とその応用の研究に従事．平3，7，9年度本会論文賞受賞．情報処理学会，IEEE各会員．

**仙石　正和**　（正員）

昭42新潟大・工・電気卒．昭47北大大学院博士課程了．工博．同年北大・工・電子助手．新潟大・工・情報助教授を経て，現在，同教授．回路網理論，グラフ・ネットワーク理論，情報伝送特に移動通信の研究に従事．平3，7，8，9年度本会論文賞，IEEE ICNNSP'95最優秀論文賞受賞．著書「演習グラフ理論」（共著）．IEEE Fellow，情報処理学会会員．

**篠田　庄司**　（フェロー）

昭39中大・理工・電気卒．昭48同大大学院理工学研究科電気工学専攻了．工博．現在，同大理工学部電気電子情報通信工学科教授．回路，ネットワーク，システムの解析，診断，制御の研究に従事．平3，8，9年度本会論文賞，IEEE ICNNSP'95最優秀論文賞受賞．著書「回路論入門（1）」ほか．IEEE Fellow.

**阿部　武雄**　（フェロー）

昭24東工大・工・電気卒．電気研究所，千葉工大，東工大工業教員養成所を経て，昭41新潟大・工・教授．平3千葉工大教授．現在，新潟工科大学学長．この間，高周波標準，レーザ光の降雪中の伝搬，マイクロ波素子，損失媒質中の伝搬，及び移動通信，ネットワークなどの研究に従事．平3，8年度本会論文賞，IEEE ICNNSP'95最優秀論文賞受賞．著書「電気・電子計測」（共著）など．