解説

ネットワークにおけるロケーション問題

仙石正和

電子情報通信学会誌 Vol. 71 No. 6 pp. 568-572 1988年6月

仙石正和：正員 新潟大学工学部情報工学科
Location Problems on Networks. By Masakazu SENGOKU, Member (Faculty of Engineering, Niigata University, Niigata-shi).

1. まえがき

都市の膨張または人々の流動に伴い，種々の施設例えば学校，郵便局，消防署や通信交換局を新たに建てたいとする．このとき，どこに建てれば良いかその位置を決める問題はロケーション問題といわれている．考える対象をネットワーク構造に限った場合，ネットワークのロケーション問題といわれ，そのための理論はロケーション理論といわれる(1)~(3)．ネットワークの例としては道路網，輸送網，通信網等が考えられ，計算機ネットワークのファイル（資源）の配置にもこの理論が使われ(4)，その他種々の応用分野の広がりに伴い，最近この方面の研究も活発化している．このため，ここではこのネットワークのロケーション問題を紹介しながら，その最近の動向にも触れることにする．

2. ネットワークのロケーション理論

ある定まった地域において，ショッピングセンター，消防署，学校，通信交換局等の施設をどこに置いたら良いか，最適の位置を決めよ，という問題を扱う分野がロケーション理論とよばれている．地域や施設の性質によって膨大な種類の問題が考えられる．地域の形状および施設の置かれる位置をネットワーク上に限定した場合，この問題はネットワークのロケーション問題とよばれる．施設の位置が最適であるかどうかを判定する場合，施設の性格によって最適度を測る関数（目的関数または評価関数）が異なる．この関数も種々雑多である．まず，ロケーション問題を理解して頂くために代表的なものを二つ挙げる．

2.1 p-センタ問題

例として，消防署の配置の問題を考える．図1のようなネットワークで辺（または枝）の集合 $E=\{e_1,\cdots\cdots,e_{12}\}$ は長さを持つ道路を表し，頂点 $V=\{v_1,\cdots\cdots,v_{11}\}$ は町を表しているとする．消防署は町でも道路上でもどこに配置させても良いとして，最適な場所を決めよ，という問題を考える．頂点と辺上の点も含めた点集合を，$Z=\{x_1, x_2,\cdots\cdots\}$ とする．消防署の数を1としてみよう．消防署はどの町で火事が発生しても最も早く出動できる場所に位置するのが良い．2点 x_i, x_j の最短路長を $d(x_i, x_j)$ とし，これを2点 x_i, x_j の間の距離とする．いかなる

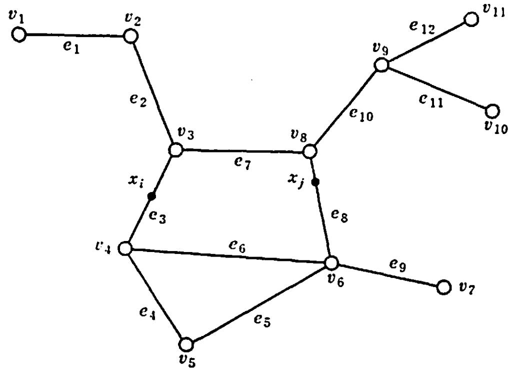

図1 ネットワーク（頂点は町，辺は道路を示し，x_i, x_j は施設を示す）

町で火事が発生しても最も早く駆付けられる位置，すなわち消防署の最適位置は最も遠い町までの距離が最小の点である．式で示すと，点 x_i に対して，

$$\varepsilon(x_i)=\max_{v_j\in V} d(x_i, v_j) \quad (1)$$

としたとき，

$$r_1 \triangleq \min_{x_i\in Z} \varepsilon(x_i) \quad (2)$$

となる点 x_i を求める問題である．$\varepsilon(x_i)$ は x_i の離心数 (eccentricity)，式 (2) を満足する点 x_i は中心点またはセンタ点 (central point)，その集合は中心またはセンタ (center) とよばれる．r_1 はネットワークの半径とよばれている．消防署の数が p 個の場合は，どの町の火事の発生に対しても p 個の中のいずれかの消防署から最も早く駆付けられることが必要である．このような p 個の消防署の配置を定める問題が p-センタ問題である．式で示すと

$$\varepsilon(X)=\max_{v_j\in V} d(X, v_j) \quad (3)$$

但し，$X\subset Z$ に対して，

$$d(X, v_j)=\min_{x_i\in X} d(x_i, v_j) \quad (4)$$

としたとき

$$r_p \triangleq \min_{X\subset Z}[\varepsilon(X) \| X|=p] \quad (5)$$

r_p は p-半径とよばれるが，r_p となる点の集合 X を求めることが絶対 p-センタ問題 (absolute p-center problem) とよばれている[5]．消防署の位置を頂点のみに限定した問題は頂点 p-センタ問題とよばれるが，式 (5) は特に消防署の位置を頂点に限定せずに辺上の点も含めているため "絶対" と Hakimi[5] によってよばれた．式 (3)～(5) は火事の発生場所 (demand 点) を頂点と限定しているが，そうせずに辺上も含めた場合，一般絶対 p-センタ問題 (general absolute p-center problem) または連続 p-センタ問題 (continuous p-center problem) 等とよばれている[7]．また，式 (3) の $d(X, v_j)$ は一般化して $f_j(d(X, v_j))$ とする場合もある．関数 $f_j(\cdot)$ は $w_j d(X, v_j)+c_j$ (但し，w_j は重み，c_i は付加定数) の形式が多い．

1-センタを求める計算量について，一般のネットワークでは $O(|E||V|)$[8]，$O(|V|^3)$[10] である．ネットワークが木状の場合は，$O(|V|)$[11] である．また，式 (3) の $d(X, v_j)$ を一般化して，距離の非線形関数とした場合も考察されている[12]．p-センタを求める計算量は NP ハードである[7]．ネットワークが木状に限定された場合は，$O(|V|^2 \log |V|)$[7]，$O(|V| \log |V|^2)$[13] 等が知られており，更にこれに関する種々の改善がなされている．

p-センタ問題は，要するに，ネットワークの中から p 個の点を選んで，そのいずれかの点から他の点への最も遠い点の距離を最小にせよという問題である．これに類似または関係した問題や双対の問題がいくつか研究されている．点集合 X から最も遠い点までの距離つまり $\varepsilon(X)$ は X の要素数が大きくなれば一般に小さくなる．$\varepsilon(X)$ の上限値が与えられたとき，その上限値を満足する X で最小要素数のものを求めよという問題は被覆問題 (covering problem) といわれる．点集合 U が与えられたとき，U 内の 2 点間の距離で最小の値を $\gamma(U)$ とする．$\gamma(U)$ の下限値が与えられたとき，それを満足する最大要素数の U を求めよという問題は (双対) 発散問題 (dual divergence problem) (被覆問題の双対) といわれる．また，選ぶ点数が与えられたとき，例えば q 個以上の点を選んで，その点の集合を U としたとき，$\gamma(U)$ を最大にする U を求めよ，という問題は (双対) 脅迫問題 (dual threat problem) (p-センタ問題の双対) といわれる．これらの問題の相互のかかわりと解法アルゴリズムが木状ネットワークの場合について与えられている[14]．

2.2 p-メディアン問題

図 1 の道路網で，ある施設 (例えば，郵便局) の配置問題を考えよう．まず簡単のために，施設の個数は 1 とする．施設の仕事の種類にもよるが，郵便等の荷物を頂点に対応する各町に輸送する場合，各町への総距離を最小にするような位置に施設を設置したいとする．

$$t(x_i)=\sum_{v_j\in V} d(x_i, v_j) \quad (6)$$

としたとき，

$$s_1 \triangleq \min_{x_i\in Z} t(x_i) \quad (7)$$

となる x_i を求める問題である. $t(x_i)$ は点 x_i の伝送数 (transmission number) とよばれる. 式 (7) を満足する点は中央点またはメディアン点, その集合は中央またはメディアン (median) といわれる. 施設が p 個の場合は

$$t(X)=\sum_{v_j\in V}d(X, v_j) \qquad (8)$$

としたとき

$$s_p \triangleq \min_{X\subset Z}[t(X)\| X|=p] \qquad (9)$$

となる点の集合 X を求める問題が絶対 p-メディアン問題といわれる. "絶対" の意味は p-センタ問題の場合と同様である. 施設の位置を頂点に限定した場合, 頂点 p-メディアン問題といわれる. ところが, 絶対 p-メディアン問題において, 解 X として頂点のみから成るものが常に存在することが示されたため(5),(6), 頂点 p-メディアン問題と絶対 p-メディアン問題は区別しなくても良い. この結果は, 式 (6), (8) において, 距離の総和ではなく距離の凹関数の総和に一般化した場合にも成立することが示されている(15).

1-メディアンを求める計算量は, 一般のネットワークでは $O(|V|^3)$ で, ネットワークが木状のときは $O(|V|)$ である(5),(16). p-メディアンを求める計算量は, 一般のネットワークでは p-センタの場合と同じく NP ハードで, ネットワークが木状の場合は $O(|V|^2p^2)$ である(9). ネットワークの構造を一般と木状のもののみを述べてきたが, このほかにも, 特殊な構造にネットワークを限定した場合平面上に限ったり等の研究もされている (例えば文献 (17)). センタ問題, メディアン問題の分散アルゴリズムに関しても研究がなされている (例えば文献 (18)).

3. その他のロケーション問題

前章で述べたセンタ問題, メディアン問題の目的関数はそれぞれ最大値最小化 (minimax) と総和最小化 (minisum) である. そのため, それぞれミニマックス問題, ミニサム問題ともいわれる. 前節のミニマックス問題, ミニサム問題のほかにロケーション問題には種々のものがある(19),(20). それを四つに大別すると次の ①～④ である. ①:p-センタ, p-メディアン問題の目的関数を一般化または制限を加えたもの. ②: 目的関数はミニマックス, ミニサム形式であるが p-センタ, p-メディアンとは目的関数がやや異なるもの. ③: 目的関数がミニマックス, ミニサム両方を含む (多目的関数) もの. ④: ①～③では目的関数を最小 (最大) にする点集合を求めるものであった. すなわち, 点のロケーション問題であるのに対し, 点集合を求めるのではなく, 目的関数を最小 (最大) にするある形の部分グラフまたは部分ネットワークを求めるもの.

① は前述したように式 (3) や式 (8) を一般化し, 単に距離の最大値や総和でなく, 距離の関数としたり, 重みを加えた形式としたものである. ② に属するものにもいくつかあるが, 例えば相互通信のある p 個の施設のミニマックス, ミニサム問題 (The p-Facility Minimax (or Minisum) Problem with Mutual Communication) が知られている(21). ミニマックス問題は次のようである. 最大距離を最小にする p 個の点を選ぶことは p-センタ問題と同一である. p-センタ問題では選ばれる p 個の点の間には特に何の制約もなかった. ここでは, p 個の点 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_p$ の間にも通信が行われており, また各頂点からもすべての点 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_p$ へ通信が行われている. そのため, $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_p$ の相互間の距離と, 各頂点と $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_p$ の間の距離の最大値が最小になるように $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_p$ を選ぶことになる. ミニサム問題は, $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_p$ 相互間の距離および各頂点と $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_p$ の距離の総和を最小にする点を選ぶ問題である. これらの問題の計算量は一般のネットワークでは NP ハードであり, ネットワークが木状の場合は多項式時間である. このようにロケーション問題の多くは一般のネットワークでは計算量が多く手におえない. しかし, ネットワーク構造を木に限ると比較的簡単に求まる. この理由には, 木が距離に関して凸性を有し(19), 目的関数の局所的最小 (最大) が全体の最小 (最大) と一致することがあげられる. ③ は例えば, 式 (5) と式 (9) 両方を

満足する p 個の点を求める問題であり，センタディアン(Center-Dian)またはメディセンタ(Medi-Center)問題などとよばれている（例えば文献（1），（22）参照）．④ある条件を満足する点 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_p$ を求めるのでなく，部分グラフを求めようとする問題である．例えば，他のすべての頂点への距離の総和が最小となる部分グラフでパス（path）状のものを求める問題はパスロケーション問題（path location problem）といわれている[(23),(24)]．

4. 最近のロケーション問題に関連した研究

ネットワークの枝の長さ，点の重みが確定的または決定論的（deterministic）な場合と確率的（stochastic or probabilitic）な場合がある．前章までは暗黙の内に確定的と仮定してきたが，枝の長さ，点の重みが確率変数の場合も調べられており，更に，最近施設のサービスが待ち行列モデルの場合についても研究されてきている[(25),(26)]．

今まで述べてきたように，ロケーション問題では点の位置を決めるためにミニマックス，ミニサム形等多くの目的関数がある．この目的関数はいずれも点の中心（中央）らしさを測る関数である．この中心らしさを測る関数（centrality function）の共通点が指摘され，その性質について調べられている[(27)~(30)]．これらのネットワークはいずれも枝に長さの重みを持っているが，重みとして容量（capacity）を持った場合のネットワークについても同様の議論ができる[(31),(32)]．また，枝に長さまたは容量を持つネットワークの点の中心らしさを表す関数が，空間のある種の変形という概念を用いて統一的に特徴付けられることが知られている[(33)]．この基本原理を用いた応用も研究されている[(34)]．

少し変った新しい問題として，ロケーション問題に関係した故障診断の研究も行われてきた[(35)]．

最近，VLSI の設計，地理情報処理への応用のために，計算幾何学（Computational Geometry）が発展している[(36),(37)]．この分野では対象をネットワークに限定せずに主にユークリッド平面上での点の位置決め問題が扱われている．平面上でもネットワーク上と同様に点，直線（パス状）等のロケーション問題があり，上記のような応用の拡大に伴い多くの研究成果が期待される[(38)~(40)]．ネットワークが大規模化した場合，計算量は増大する．このとき，離散的構造を有するネットワークを連続構造で近似し，計算量を減少させようとする手法も有用であろう[(41),(42)]．

5. むすび

ネットワークのロケーション問題に関する研究は年々増加している．最近のネットワークやグラフ理論の成書にはロケーション問題の解説で一章をさくものもいくつかある程である．このため限られたスペースでこの方面の全般的な解説は困難である．本稿はロケーション問題の基本的部分のみで，一面からの解説である．詳しくは文献等を参照されたい．文献等を含めて有益な御助言を頂いた，イリノイ大学（シカゴ）の Minieka 教授，Murata 教授，Chen 教授，中央大学の篠田教授，九州大学の今井助教授，および御指導頂く新潟大学の阿部教授に感謝の意を表する．

文　献

(1) G.Y. Handler and P.B. Mirchandani : "Location on Networks", Theory and Algorithms, MIT Press (1979).

(2) E. Minieka : "Optimization Algorithms for Networks and Graphs", Marcel Dekker Inc. (1978).

(3) N. Christofides : "Graph Theory", An Algorithmic Approach, Academic Press (1975).

(4) R.L. McEntire, J.G. O'Reilly and R.E. Larson Ed. : "Distributed Computing-Concepts and Implementations", IEEE Press (1984).

(5) S.L. Hakimi : "Optimal locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph", Oper. Res., 12, pp. 450-459 (1964).

(6) S.L. Hakami : "Optimum distribution of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problems", Oper. Res., 13, pp. 462-475 (1965).

(7) G.Y. Handler and M. Rozman : "The continuous m-center problem on a network", Networks, 15, pp. 191-204 (1985).

(8) O. Kariv and S.L. Hakimi : "An algorithmic

approach to network location problems part 1, the p-centers", SIAM, J. Appl. Math., **37**, pp. 513-538 (1979).

(9) O. Kariv and S.L. Hakimi : "An algorithmic aproach to network location ploblems, part 2, p-medians", SIAM, J. Appl Math., **37**, pp. 539-560 (1979).

(10) E. Minieka : "A polynomial time algorithm for finding the absolute center of a network", Networks, **11**, pp. 351-355 (1981).

(11) G.Y. Handler : "Minimax location of a facility in an undirected tree graph", Transp. Sci., **7**, pp. 287-293 (1973).

(12) P.M. Dearing : "Minimax location problems with nonlinear costs", J. Res. Natl. Bur. Stand., **82**, pp. 65-72 (1977).

(13) N. Megiddo, A. Tanir, E. Zemel and R. Chandrasekaran : "An O ($n \log^2 n$) algorithm for the kth longest path in a tree with applications to location problems", SIAM J. Comput., **10**, pp. 328-337 (1981).

(14) B.C. Tansel, R.L. Francis, T.J. Lowe and M.L. Chen : "Duality and distance constraints for the nonlinear p-center problem and covening problem on a tree network", Oper. Res., **30**, pp. 725-743 (1982).

(15) J. Levy : "An lxtended theorem for location in a network", Oper. Res. Q., **18**, pp. 433-442 (1967).

(16) A. Rosenthal, M. Hersey, J. Pino and M. Coulter: "A Generalized Algorithm for Centrality Problems on Trees", Proc. Allerton Conf. on Communication, Control and Computing, pp. 616-625 (1978).

(17) 山口，加地："格子グラフに関するいくつかのロケーション問題"，信学論 (A)，J 69-A, 6, pp. 687-693 (昭 61-06).

(18) E. Korach, D. Rotem and N. Santoro : "Distributed algorithms for finding centers and medians in networks", ACM Trans. Program. Lang. & Syst. **6**, 3, pp. 380-401 (1984).

(19) B.C. Tansel, R.L. Francis and T.J. Lowe : "Location on Networks : A Survey. Part I, Part II", Manage. Sci., **29**, 4, pp. 482-511 (1983).

(20) J. Krarup and P.M. Pruzan : "Selected Families of Location Problems", Annals of Discrete Mathematics, 5, pp. 327-387 (1979).

(21) P.M. Dearing, R.L. Francis and T.J. Lowe : "Convex location problems on tree networks", Oper. Res., **24**, pp. 628-642 (1976).

(22) J. Halpern : "The location of a conter-median convex combination on an undirected tree", J. Regional Science, **16**, 2, pp. 237-245 (1976).

(23) P.J. Slater : "Locating central paths in a graph", Transp. Sci., **16**, 1, pp. 1-18 (1982).

(24) E. Minieka : "The optimal location of a path or tree in a tree network", Networks, **15**, pp. 309-321 (1985).

(25) P.B. Mirchandani : "Locational decisions on stochastic networks", Geographical Analysis, 12, 2, pp. 172-183 (1980).

(26) O. Berman and R.C. Larson : "The median problem with congestion", Comput. & Ops. Res., **9**, 2, pp. 119-126 (1982).

(27) G. Sabidussi : "The centrality index of a graph", Theorie des graphs, Rome, pp. 369-372 (1966).

(28) A. Adam : "The Centrality of Vertices in Trees", Studia Sci. Math. Hangar. 9, pp. 285-303 (1974).

(29) 梶谷，丸山："グラフにおける中心度関数表示―通信網の評価への応用―"，信学論 (A)，J 59-A, 7, pp. 531-538 (昭 51-07).

(30) 篠田，仙石："距離空間における点の中心らしさを表わす関数の公理論的基礎づけ"，信学論 (A)，J 66-A, 4, pp. 352-359 (昭 58-04).

(31) 篠田，仙石："ゲージの概念に基づくネットワークの点の中心らしさの評価"，信学技報，CAS 82-83 (1982).

(32) 岸，竹内，伊藤："2節点を分離するカットセットの最小枝数を用いた中心度関数"，信学技報，CAS 83-2 (1983).

(33) 篠田，仙石："空間の変形とネットワークの点の中心らしさを測る関数の理論"，信学論 (A)，J69-A, 1, pp. 42-53 (昭 61-01).

(34) M. Sengoku, S. Shinoda and R. Yatsuboshi : "On a function for the vulnerability of a directed flow network", Networks, **18**, pp. 73-83 (1988).

(35) M. Sengoku, S. Shinoda and W.K. Chen : "A fault diagnosis in a nonlinear location network", J. Franklin Inst., **323**, 3, pp. 397-405 (1987).

(36) F.P. Preparata and M.I. Shamos : "Computational Geometry", Springer-Verlag (1985).

(37) 伊理，ほか："計算幾何学と地理情報処理"，共立出版 (昭 61).

(38) N. Megiddo and K.J. Supowit:"On the complexity of some common geometric location problems", SIAM J. Compt., **13**, 1, pp. 182-196(1984).

(39) D.T. Lee and Y.F. Wu : "Geometric complexity of some location problems", Algorithmica, **1**, pp. 193-211 (1986).

(40) H. Imai : "Minimax line segment facility location ploblems", 信学技報，CAS 87-206 (1987).

(41) M. Iri : "Theory of Flows in Continua as Approximation to Flows in Networks", International Symposium on Mathematical Programing, pp. 1-21 (1976).

(42) A. Taguchi and M. Iri : "Continuum Approximation to Dense Networks and its Application to the Analysis of Urban Road Networks", Mathematical Programing Study 20, pp. 178-217 (1982).

仙石　正和 (正員)

昭 42 新潟大・工・電気卒．昭 47 北大大学院博士課程了．工博．同年北大・工・電子助手．現在，新潟大・工・情報助教授．回路網理論，グラフとネットワーク理論およびその応用，情報伝送，移動通信などの研究に従事．

著書「演習グラフ理論」(共著)．