3次元はり要素を用いた軸力を受ける軌道系の波動伝播解析

清水 紗希[1]・阿部 和久[2]・相川 明[3]・紅露 一寛[4]

[1]学生員　新潟大学大学院　博士前期課程 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)
[2]正会員　新潟大学教授　工学部建設学科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地) E-mail:abe@eng.niigata-u.ac.jp
[3]正会員　(財) 鉄道総合技術研究所　鉄道力学研究部 (〒 185-8540 東京都国分寺市光町 2-8-38)
[4]正会員　新潟大学准教授　大学院自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

レールが軸力を受けている無限軌道を対象に波動分散解析を行った．解析では，レールとまくらぎを 3 次元 Timoshenko はり要素により離散化し，水平・鉛直たわみと捩り振動の影響を再現した．まくらぎ 1 区間で与えられる軌きょう 1 ユニットの運動方程式に Floquet 原理を適用し，無限軌道内を伝播する波動モードの分散特性を求めた．解析結果に基づき，軸力に鋭敏な振動モードや，締結装置の剛性などが共振周波数に及ぼす影響などについて考察した．

Key Words : *axial load, infinite rail, temprature stress, dispersion analysis*

1. はじめに

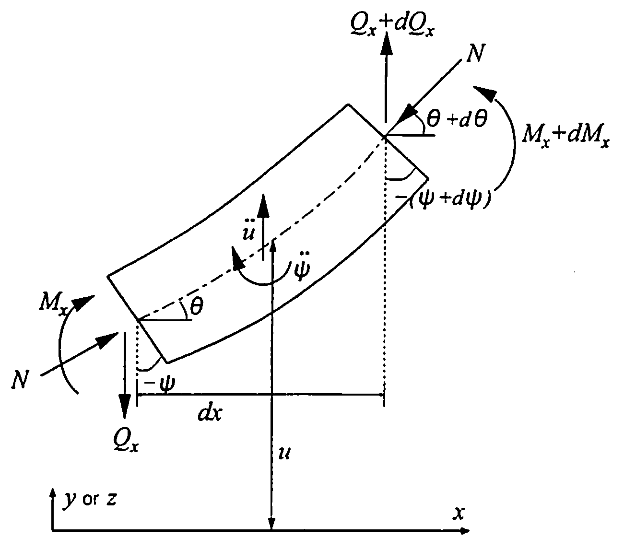
鉄道軌道のロングレール化は，乗り心地向上や道床沈下など軌道破壊の抑制に有効であり，そのため多くの在来線区においてもその導入が進められている．なお，本来レールは温度変化によって膨張・収縮を受ける．しかし，まくらぎに締結されているため，自由な伸縮がある程度拘束される．特にロングレールの場合，その両端部付近を除く中間域では伸縮がほぼ完全に抑制される．その結果，レールには長手方向に大きな圧縮または引張の軸力が作用することとなる．日照によるレールの温度上昇は，軌道座屈の原因となる．一方，寒冷地の冬季間に発生するレールの温度低下は引張軸力を発生させ，ひいてはレール破断を惹き起こす恐れがある．

以上に述べた様なことから，ロングレールの軸力管理は軌道保守上非常に重要となる．なお，まくらぎは列車走行によって軌道長手方向に変位 (ふく進) し得る．そのため，レール軸力は一般に温度変化以外の影響も受け，軌道に沿って均一とはならない．したがって，敷設時からのレール温度変化だけによる軸力管理は不可能であり，また限られた箇所のみの測定では十分とは言えない．

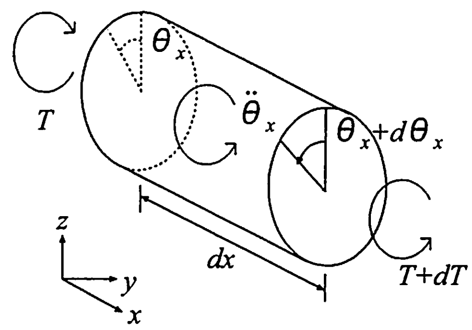
ひずみゲージ法[1)]や，音響弾性測定法[1)]，透磁率測定法[1)2)]など，これまでに考案されている軸力測定法に共通した問題点として，軸力のない状態での初期値の測定を必要とする点が挙げられる．一方，初期値を必要としない測定法としては，レールたわみ法[1)]や，向上法[3)4)]が挙げられる．向上法は，レールを一定区間まくらぎから解放し，その中央部を吊り上げて反力を測定し，それを軸力に換算する方法である．しかし，この方法は引張軸力が作用しているときにしか測定できず，圧縮軸力の測定には適用できない．

レールたわみ法は，レールに振動を加え，その応答を測定し軸力に換算する方法である．この方法の利点としては，軸力の絶対量を求めることができるため初期値を必要としない点，圧縮・引張軸力共に測定できる点が挙げられる．なお，当該法については，実験による検討が先行研究としてなされており，その適用可能性が示唆されている[5)]．しかし，その理論的背景については議論がなされておらず，十分な理解には至っていない．また，軸力下での離散支持ばりの振動解析が，有限長モデル[6)]や，無限長モデル[7)]を対象になされている．特に文献[7)]では，強制加振による卓越応答が解析対象とされている．しかし，解析例は必ずしも鉄道軌道を対象としてはおらず，そのためまくらぎの影響なども考慮されていない．

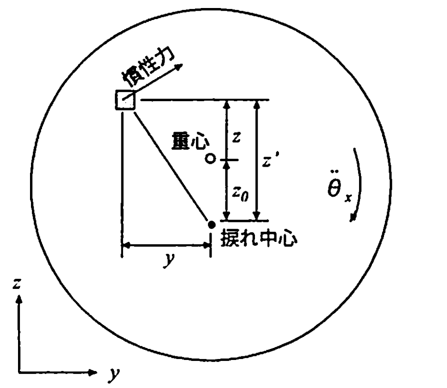
一方，著者らは，軸力を受けるレールの波動伝播モード解析に基づき，当該測定手法の可能性について検討した[8)]．そこでは，レールを 1 次元 Timoshenko ばりで，まくらぎは質点でモデル化し，鉛直たわみと水平たわみに関する振動モードについて各々波動分散解析を行った．しかしこの場合，水平振動における捩り振動の影響や，まくらぎ振動モードの影響，左右レールの相関などを評価することができない．



図–1 たわみ振動をしているはり要素の作用力



図–2 捩れ振動をしているはり要素と作用モーメント



図–3 捩れ振動をしているはり断面

そこで本論文では，より現実に即した 3 次元はり要素を用い，左右レール・まくらぎから構成される軌道系を対象に，軸力下での波動分散解析を行う．以下ではまず，離散支持された無限長軌道を解析する際必要となる軸力を受けるはりのたわみ振動，捩り振動，軸方向振動の運動方程式を記述する．次に軌道系を構成する周期構造の最小単位であるユニットセルを離散化した後，Floquet 原理[9]を適用し，円振動数 ω と Floquet 波数 κ および軸力 N に関する固有値問題を導出する．この固有値問題を解くことで，周波数 $f(\omega)$ と Floquet 波数 κ および軸力 N との関係 (分散曲面) を求めていく．そして，1 次元はりモデルとの比較，まくらぎ振動モードの影響等について考察し，軸力測定に適する振動モードについて検討する．

2. 軸力を受けるはりの運動方程式

本研究では，レール，まくらぎを Timoshenko ばりでモデル化する．以下では，その際に必要となる鉛直・水平たわみ振動，捩り振動および軸方向振動に関する運動方程式を各々示す．さらに，水平たわみ振動と捩り振動の連成作用のモデル化についても述べる．

(1) はりの鉛直・水平たわみ振動

図–1 のように，一様な軸力 N(圧縮を正) の作用の下で円振動数 ω で振動しているはり (レール又はまくらぎ) を考える．なお，まくらぎを対象とする場合は図において $N=0$ とする．また，座標軸および断面力の正の向きは**図–1** のとおりとし，図中鉛直方向は水平 (y) または鉛直 (z) たわみ方向のいずれかを示しているものとする．

微小部分 dx におけるたわみ方向のつり合い式，およびモーメントのつりあい式から次の運動方程式を得る．

$$GAK\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\psi\right)-N\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\rho A\omega^2 u=0 \qquad (1)$$

$$EI\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+GAK\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\psi\right)+\rho I\omega^2\psi=0 \qquad (2)$$

ここで，G ははりのせん断弾性係数，K は断面のせん断係数である．A は断面積，ρ は密度，E はヤング係数，I は断面二次モーメント，u ははりのたわみ，ψ は断面の回転角である．

(2) はりの捩り振動

図–2 のような捩れモーメント T を受けて円振動数 ω の下で振動しているはりの微小部分を考える．ただし，θ_x は捩れ角であり，座標軸および断面力の向きは**図–2** のようにとるものとする．

微小部分 dx における捩れモーメントのつり合い式から，次式を得る．

$$dT-\omega^2\rho(I_y+I_z+z_0^2A)\theta_x dx=0 \qquad (3)$$

ここで，I_y，I_z は断面の水平軸および鉛直軸回りの断面二次モーメント，z_0 は**図–3** に示す様に断面重心から捩れ中心までの距離であり，レールにおいて z 軸方向にのみ存在しているものとする．また，捩れモーメント T は，捩れ角の変化率により次式のように表すことが

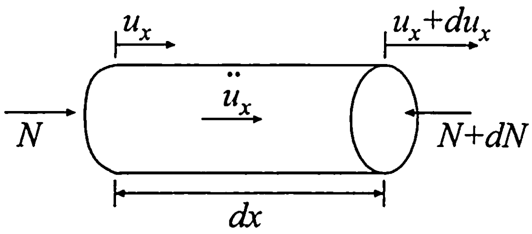


図-4 軸方向振動をしているはり要素の作用力

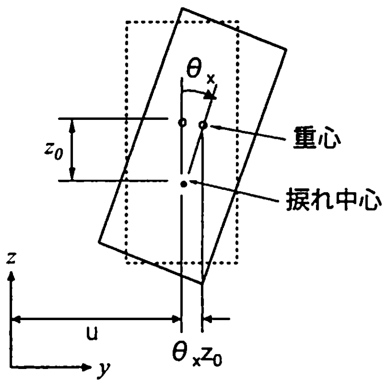


図-5 捩れによる水平たわみ振動の重心移動

できる．

$$T = GJ\frac{d\theta_x}{dx}$$

ここで，J は St.Venant の捩れ定数である．

よって，運動方程式は次式のようになる．

$$GJ\frac{d^2\theta_x}{dx^2} - \omega^2\rho(I_y + I_z + z_0^2 A)\theta_x = 0 \qquad (4)$$

(3) レール軸方向の振動

図-4 のような軸力 N(圧縮を正) の下，円振動数 ω で振動しているはりの微小部分を考える．ただし，u_x は x 軸方向の変位である．座標軸および断面力の正の向きは**図-4** のとおりとする．

ここで，微小部分 dx における x 軸方向の力のつりあい式から，次式を得る．

$$dN + \omega^2\rho A u_x dx = 0 \qquad (5)$$

また，伸縮により発生する軸力成分 N_u は次のように表すことができる．

$$N_u = -EA\frac{du_x}{dx}$$

よって，$dN = dN_u$ より運動方程式は次式のようになる．

$$-EA\frac{d^2u_x}{dx^2} + \omega^2\rho A u_x = 0 \qquad (6)$$

(4) 水平たわみ振動と捩れ振動の相互作用

a) 捩れが水平たわみ振動に及ぼす影響

水平方向振動の場合，**図-5** のように捩れによって重心の位置が移動する．よって，式 (1) における水平方向振動の運動方程式にはこの影響 $(\rho A\omega^2\theta_x z_0)$ がさらに加わり，次式のように修正される．

$$GAK\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \psi\right) - N\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho A\omega^2(u + \theta_x z_0) = 0 \qquad (7)$$

b) 水平たわみ振動が捩れ振動に及ぼす影響

捩れ振動の際，捩れ中心と重心の位置がずれている場合，水平方向慣性力により捩れモーメントが作用する (**図-6**)．式 (3) に慣性モーメントの影響 $(-\omega^2\rho A z_0 u)$ を追加すると，次の運動方程式を得る．

$$GJ\frac{d^2\theta_x}{dx^2} - \omega^2\{\rho(I_y + I_z + z_0^2 A)\theta_x + \rho A z_0 u\} = 0 \quad (8)$$

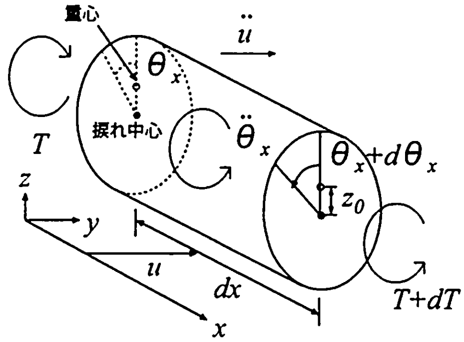


図-6 水平たわみ振動によって捩れ振動に作用する慣性力

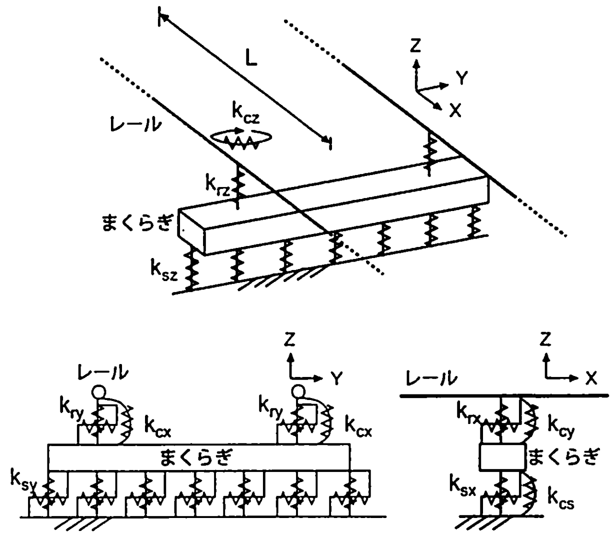


図-7 軌道モデル

3. 軸力を受けるレールの分散特性の解析

(1) 弱定式化

軌道系をまくらぎにより離散支持された無限周期構造としてモデル化する．**図-7** は，無限軌道のまくらぎ 1 区間 (1 ユニット) を表したものである．以下ではレール軸方向を x，それに直交する水平方向を y，鉛直方向を z として，全体座標系を改めて定義する．当該ユニッ

トのレール・まくらぎについて，重み付き残差式に基づき式(2)，(6)，(7)，(8)の弱定式化を行う．レール，まくらぎ共に，鉛直・水平たわみを3次Hermite，断面回転角を2次Lagrange多項式で補間するTIM7要素[10]で近似する．また，捩れ角θ_x，軸方向変位u_xは1次補間で近似する．このとき，式(2)，(6)，(7)，(8)の重み関数はそれぞれ，断面回転角，軸方向変位，たわみ，捩れ角で与えられる．これらにより1ユニットについて離散化の後，次の運動方程式を得る．

$$[\bar{W}]^T[K - NC - \omega^2 M]\{U\} = [\bar{W}]^T\{F\} \quad (9)$$

ここで$\{W\}$は任意の仮想節点変位ベクトル，$\{\bar{W}\}$はその共役である．$[K]$は剛性行列，$[M]$は質量行列，$\{U\}$は節点変位ベクトル，$\{F\}$は節点力ベクトルである．なお，$[K]$を例に，その成分を示すと次のようである．

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{00} & K_{0M} & K_{0L} \\ K_{M0} & K_{MM} & K_{ML} \\ K_{L0} & K_{LM} & K_{LL} \end{bmatrix} \quad (10)$$

ここで，K_{ij}はユニットセル手前端節点成分$\{U_0\}$，中間節点$\{U_M\}$および後方端節点成分$\{U_L\}$に対応する部分行列である．また，行列$[C]$は軸力がたわみ振動に及ぼす影響を表しており，一要素当りの行列は次の様に与えられる．

$$[C] = \begin{bmatrix} -\int_0^l \frac{dN_i}{dx}\frac{dN_j}{dx}dx & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ここで，$[C]$におけるN_i，N_jは鉛直・水平たわみの補間関数であり，lは要素長である．

(2) 分散解析

Floquet原理[9]より，無限周期構造における定常応答解は次の周期性をもつ．

$$U_L = U_0 e^{-i\kappa L}, \quad F_L = F_0 e^{-i\kappa L}, \quad \bar{W}_L = \bar{W}_0 e^{i\kappa L} \quad (11)$$

ここで，Lは周期長(まくらぎ間隔)，U_0, U_L, F_0, F_Lは当該周期構造を与える1ユニット(図-7)の手前と後方レール端における節点変位，節点力ベクトル，$\bar{W}_0, \bar{W}_L$は1ユニットのレール端の仮想節点変位ベクトルの共役，κはFloquet波数と呼ばれ，通常の波数に相当するパラメータである．

式(11)を式(9)に適用し，$U_L, \bar{W}_L$を消去すると，自由振動場に対して次式を得る．

$$[K' - NC' - \omega^2 M']\{U'\} = \{0\} \quad (12)$$

ここで，(′)は式(11)の条件を課して行列を縮約したため，もとの行列とは一致しないことを表している．剛性行列を例に示すと次のようになる．

$$[K'] = \begin{bmatrix} K_{00} + K_{LL} + K_{0L}e^{-i\kappa L} + K_{L0}e^{i\kappa L} & K_{0M} + K_{ML}e^{i\kappa L} \\ K_{M0} + K_{ML}e^{-i\kappa L} & K_{MM} \end{bmatrix} \quad (13)$$

式(9)における行列$[K]$，$[C]$，$[M]$は実対称行列であるので，式(12)の係数行列はHermite行列となる．この固有値問題を解くことで，円振動数ωとFloquet波数κおよび軸力Nとの関係(分散曲面)を求める．以下の解析では，Floquet波数κと軸力Nを所定の範囲内で順次変化させながら，円振動数ωについての固有値問題を解き，その結果より分散曲面を求める方法を用いる．

表-1 50kgN レールの各種設定条件

質量密度 (kg/m³)	$\rho = 7880$
断面積 (m²)	$A = 64.05 \times 10^{-4}$
ヤング率 (GPa)	$E = 206$
ポアソン比	$\nu = 0.33$
断面二次モーメント (水平軸)(m⁴)	$I_x = 1960 \times 10^{-8}$
断面二次モーメント (鉛直軸)(m⁴)	$I_y = 322 \times 10^{-8}$
せん断係数 (水平軸)	$K_x = 0.394$
せん断係数 (鉛直軸)	$K_y = 1.382$
St.Venant 捩れ係数 (m⁴)	$J = 1.64 \times 10^{-6}$
断面の重心から底面までの距離 (m)	$h = 0.071$
断面の重心から捩れ中心までの距離 (m)	$z_0 = -0.028$

表-2 PC まくらぎの各種設定条件

質量密度 (kg/m³)	$\rho_s = 2677$
断面積 (m²)	A_s=0.0333
長さ (m)	L_s=2.3
左右締結装置間の距離 (m)	l_s=1.15
ヤング率 (GPa)	$E_s = 78$
ポアソン比	$\nu_s = 0.17$
断面二次モーメント (水平軸)(m⁴)	$I_{xs} = 6.24 \times 10^{-5}$
断面二次モーメント (鉛直軸)(m⁴)	$I_{ys} = 1.37 \times 10^{-5}$
せん断係数 (水平軸)	$K_{xs} = 0.67$
せん断係数 (鉛直軸)	$K_{ys} = 0.67$
St.Venant 捩れ係数 (m⁴)	$J_s = 2 \times 10^{-4}$

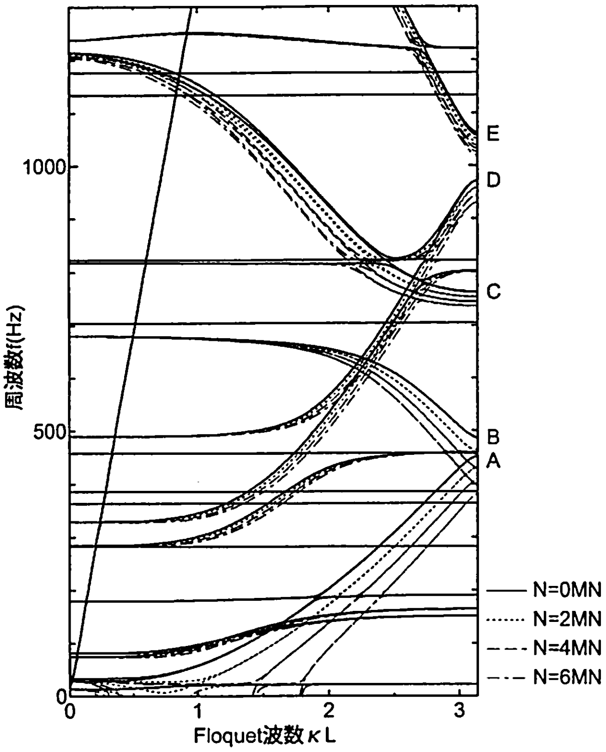
4. 周波数fとFloquet波数κと軸力Nとの関係

(1) 解析条件

図-7に示したように，まくらぎで離散支持された無限長レールを軌道モデルとして設定する．レールは50kgNレール，まくらぎはPCまくらぎを想定し，各種物性値を表-1，表-2のように設定した．まくらぎ間隔はL=0.6mとする．なお，レールの離散化は1ユニットを10要素，まくらぎは16要素で一様分割して与えた．締結装置およびまくらぎ底面の各バネ定数を表-3に示す．なお，$k_{rx}, k_{ry}, k_{cx}, k_{sy}$については文献[11]を参考に設定した．

表–3 各種ばね定数 (単位は MN/m, 回転ばねは MN・m/rad)

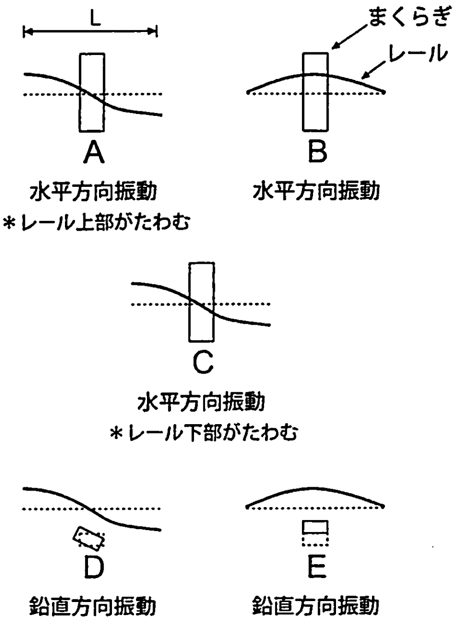
締結装置	
レール方向バネ定数	$k_{rx} = 0.4$
まくらぎ軸方向バネ定数	$k_{ry} = 0.96$
軌道パッドバネ定数	$k_{rz} = 110$
レール軸方向回りの回転バネ定数	$k_{cx} = 3.852 \times 10^5$
まくらぎ軸方向回りの回転バネ定数	$k_{cy} = 0.29$
鉛直軸回りの回転バネ定数	$k_{cz} = 6 \times 10^{-3}$
まくらぎ下 (全節点合計)	
レール軸方向バネ定数	$k_{sx} = 1100$
まくらぎ軸方向バネ定数	$k_{sy} = 2$
鉛直方向バネ定数	$k_{sz} = 60$
まくらぎ軸方向回りの回転バネ定数	$k_{cs} = 3.3$



図–8 周波数 f と Floquet 波数 κ と軸力 N との関係

(2) 解析結果

周波数 f と Floquet 波数 κ および軸力 N との関係は 3 次元空間中の曲面として与えられる．そこで，軸力を 0 から 2MN 毎に 6MN まで変化させたときの，周波数 f と無次元化した Floquet 波数 κL との関係を図–8 に示す．なお，実際のレールではこれ程大きな軸力が作用することはないが，軸力の影響を確認する目的で 6MN まで図示した．図中水平線で与えられている分散曲線は，Floquet 波数 κL や軸力 N の影響を受けていないが，これらは主にまくらぎが振動するモードに対応している．



図–9 振動モード

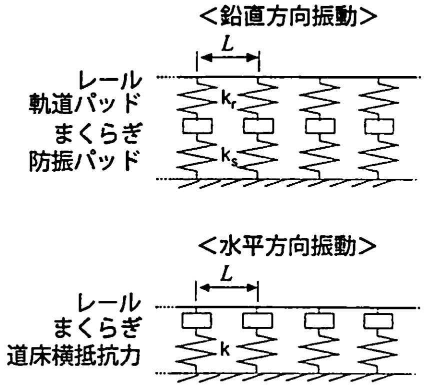
図–8 で，$\kappa L = \pi$ における分散曲線の傾きが 0 となるモードの内，軸力の影響が認められるものを A, B, C, D, E で分類する．これらの箇所は，定在波モードに対応しており，レールを加振した際に卓越して現れるため，測定しやすいモードを与える．そのため，軸力測定にはこれらの振動モードを利用するのがよいと考えられる．

各振動モードを図–9 に示す．A, C, D はともに波長 $2L$ の下，まくらぎ位置を節として振動するモードである．なお，D は pinned-pinned resonance に相当しているが，まくらぎの回転振動を伴っていることがわかる．また，A はレール断面の上部が水平方向に大きくたわむことで捩り変形を伴うモードであるのに対し，C は逆に下部が大きくたわむ捩り変形モードとなっている．B, E の波長は $2L$ であり，他のモードと同一波長を与えるが，まくらぎ位置を腹として振動するモードとなっている．軸力 0MN の近傍で軸力に対する周波数の感度を調べると，A〜E の振動モードはそれぞれ 1MN 当り 10Hz, 13Hz, 5Hz, 7Hz, 6Hz ほどとなっており，A, B のモードが比較的高い鋭敏性を有していることがわかる．

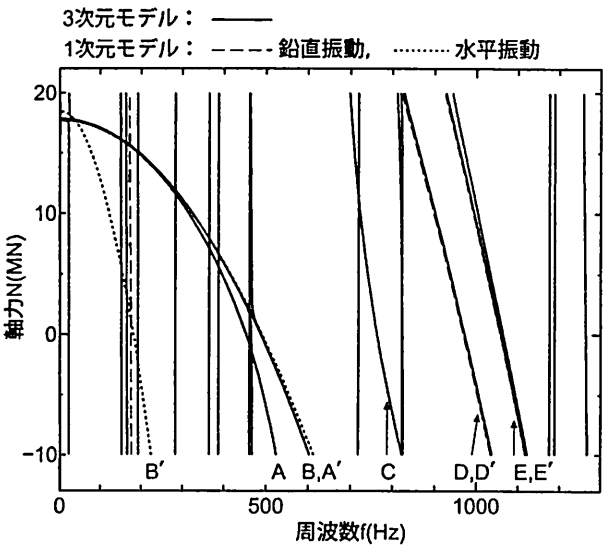
5. 考察

(1) 一次元モデルとの比較

著者らはこれまでの研究[8]から，軸力の測定に適する振動モードは水平たわみで A，鉛直たわみでは D の振動モードであるとの結論を得た．その理由としては，まくらぎ位置を節とするため締結装置のバネ定数やまくらぎの影響が少ないことがあげられる．ここではより



図–10 1次元モデル



図–11 $\kappa L = \pi$ における周波数 f と軸力 N との関係 (1次元モデルとの比較)

現実に近い3次元モデルでの解析を通し，このモードについて1次元モデルとの違いを確認する．

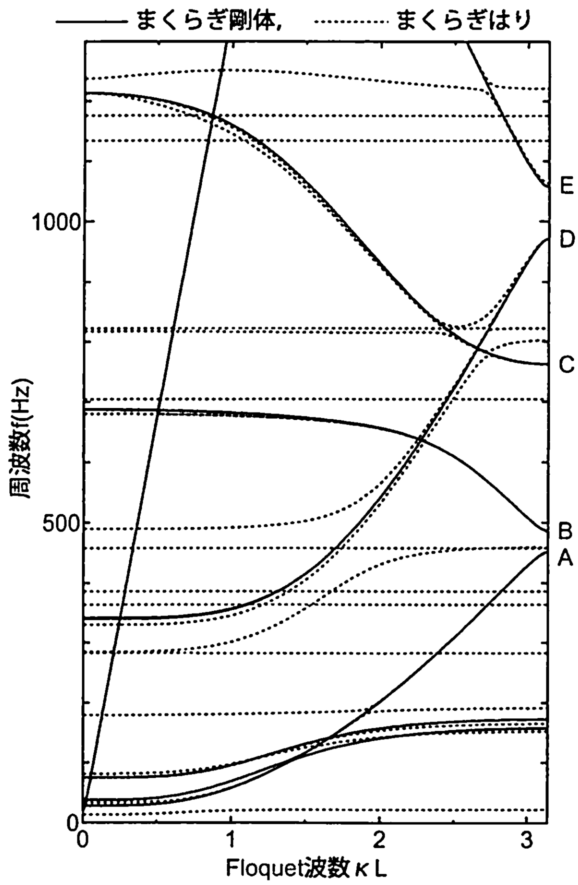
1次元モデル (図–10) と，今回の3次元モデルとで求めた結果を図–11に示す．図–11はFloquet波数 $\kappa L = \pi$ における (周波数 f)-(軸力 N) の断面でのA〜Eの振動モードの変化の様子を表している．なお，A', B', D', E' は1次元モデルにおいてA, B, D, Eに相当するモードである．

水平方向振動のモードをみると，捩れの影響を受けて，Aの振動モードは1次元のものより低周波数側に移動していることがわかる．

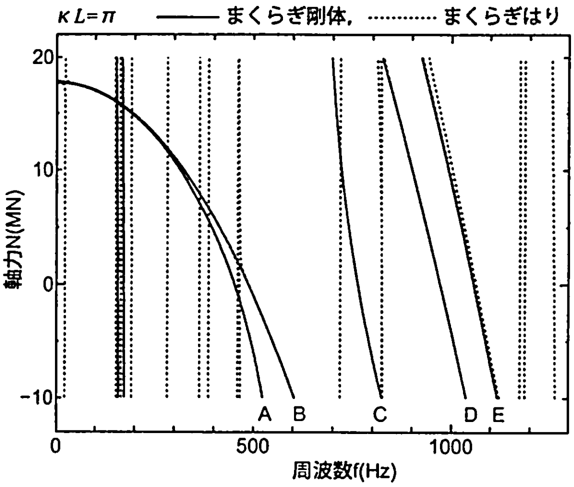
また，鉛直方向振動モード (D，E) はレールの捩り振動を伴わないため，1次元モデルと大差はない．なお次節に述べるように，若干認められる差異は，まくらぎ振動の影響によるものと考えられる．

(2) まくらぎ振動モードの影響

図–8の様に，まくらぎ振動モードは軸力の影響を受けない．また，D，Eのモードにおいて若干まくらぎ振動の影響が認められるものの，水平振動ではほとんどその影響を受けないものと考えられる．そこで，まくらぎをTimoshenkoばりモデルから剛体モデルへ変更し解析を行った．

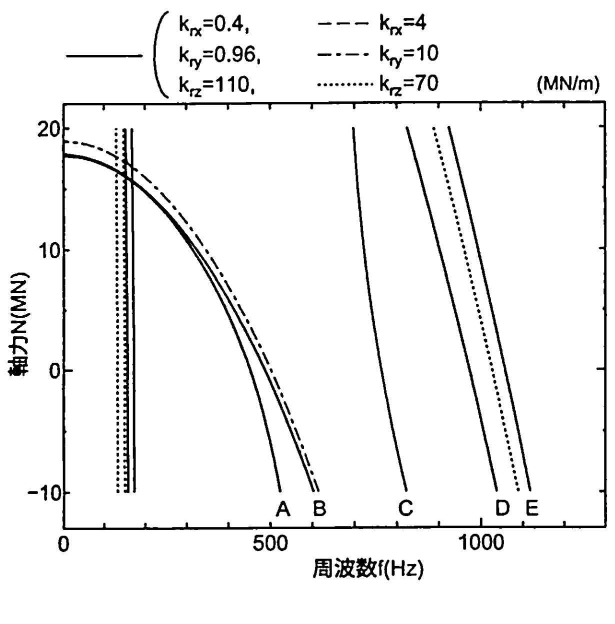


図–12 軸力 $N = 0$ における Floquet 波数 κL と周波数 f の関係 (まくらぎ剛体モデル)

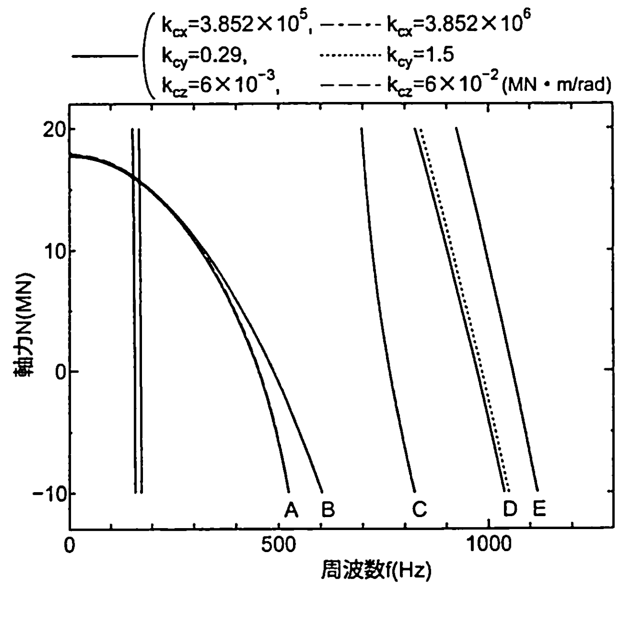


図–13 Floquet 波数 $\kappa L = \pi$ のときの周波数 f と軸力 N との関係 (まくらぎ剛体モデル)

分散曲線を図–12に示す．また，図–13にはFloquet



図–14 締結装置のバネ定数の影響



図–15 締結装置の回転バネ定数の影響

波数 $\kappa L = \pi$ における (周波数 f)-(軸力 N) の断面での振動モードを示した．なお，比較のため，まくらぎをはりモデルで与えた場合の結果を破線で示した．

図–12 より，まくらぎ振動モードに支配されている水平の分散曲線が消滅していることが確認できる．また，図–13 から，A, B, C の振動モードはまくらぎの変形振動を伴わないため，本モデル変更の影響を全く受けていないことがわかる．

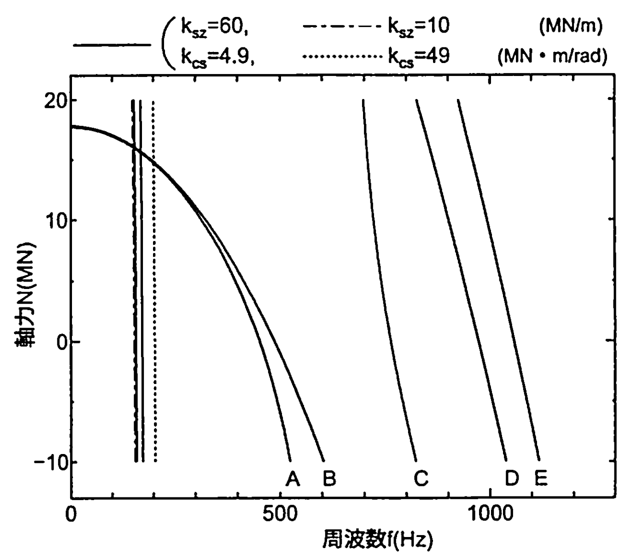
一方，D，E の振動モードについては若干の差が認められ，前述の一次元モデルとの差異が，変形を伴う様なまくらぎ振動モードの有無によるものであることが確認できる．

(3) 締結装置等のバネ定数の影響

実際の軌道において，締結装置やまくらぎ下パッドの剛性はある程度バラツキを有するものと考えられる．そこで，締結装置等に関するバネ定数の違いが結果に及ぼす影響について調べた．以下では，まくらぎを剛体モデルで与えた場合を例に示す．なお，前節に述べたとおり，D，E の振動モードにおいてまくらぎのモデル化による若干の差が認められるものの，傾向に本質的な違いはなかった．

a) 締結装置の x, y, z 方向のバネ定数の影響

解析結果を図–14 に示す．レール軸方向のバネ定数 (k_{rx}) は，ここに設定した変動幅の下では，どの振動モードにも全く影響を与えていないことがわかる．また，まくらぎ軸方向のバネ定数 (k_{ry}) は，当該方向変位が支配的となる B の振動モードに影響を与えることが確認できる．同じように，軌道パッド (鉛直方向) のバネ定数 (k_{rz}) は，まくらぎ位置を腹とする E の鉛直振動モードに影響を与えている．



図–16 まくらぎ底面のバネ定数の影響

b) 締結装置の x, y, z 方向の回転バネ定数の影響

解析結果を図–15 に示す．レール軸回りの回転バネ定数 (k_{cx}) は，本来レールの小返り振動に影響を及ぼすものと考えられるが，本設定条件に関する限りどの振動モードにも全く影響を与えていない．また，まくらぎ軸回りの回転バネ定数 (k_{cy}) は，その部分の回転量が大きくなる D の振動モードに影響を与えることが確認できる．同様に，鉛直軸回りの回転バネ定数 (k_{cz}) は水平振動が卓越する A の振動モードに影響を与えるが，その度合いは極わずかである．

c) まくらぎ底面の z 方向のバネ定数およびレール軸回りの回転ばね定数の影響

解析結果を図-16 に示す．どちらも A～E の振動モードには全く影響を与えていないことが確認できる．なお，変化が認められる 170Hz 付近の 2 つの振動モードは，まくらぎのレール軸周りの回転振動，および上下振動のモードである．

6. おわりに

本研究では，軌道振動特性に基づいたレール軸力測定手法の構築を目指し，そのための理論的検証を行った．具体的には，レールとまくらぎを 3 次元 Timoshenko ばりで離散化し，たわみと捩れの連成効果を考慮した無限軌道モデルを構築して，レール軸力が波動分散特性に及ぼす影響について検討した．

なおこれまで，レールを 1 次元 Timoshenko ばりで，まくらぎを質点で表現した数値モデルに基づく同様の検討を行ってきた．その結果，鉛直と水平たわみ振動の何れにおいても，まくらぎ位置を節とする振動モードが，軸力に対する共振周波数の感度が高く，レールがまくらぎと独立して振動するため各種物性値のバラツキの影響も受けないことから，軸力測定に適しているとの結論を得た．より現実に近い 3 次元モデルによる本解析でも，1 次元モデルによる検討結果と同様に，まくらぎ位置を節とするモードにおいて軌きょう剛性等の影響が最も小さい結果となった．特に，水平方向振動モード (A) は，1 次元モデルでは考慮されていない捩り振動を伴うものの，本解析に関する限り締結装置やまくらぎ下部の剛性の影響は殆ど認められず，軸力に対する共振周波数の感度も高いため，軸力測定に最適であると考えられる．

また，まくらぎの変形を伴う振動モードが軌道系の分散特性に及ぼす影響についても調べた．その結果，まくらぎの振動モードはレール軸力の影響を受けず，さらにまくらぎを節とするレール長手方向の定在波モードにおける軸力–固有振動数関係に殆ど影響を与えないことがわかった．したがって，実際のまくらぎには様々な振動モードが存在すると考えられるが，それらはレール振動に基づく軸力測定に影響を及ぼさないものと考えられる．

なお，現実の軌道系は，まくらぎ間隔等にもバラツキを有しており，完全な周期構造とはなっていない．今後は，その様な不均一性が振動特性に及ぼす影響についても検討する必要がある．

参考文献

1) 佐藤正男，山本陽一：軌道に敷設されたレールの軸力測定器の開発 (第一報)，鉄道技術研究所速報，No.82-12, 1982.1.
2) 柏谷賢治：磁気レール軸力計とその適用法，新線路, **49.3**, 23-25, 1995.
3) 佐藤吉彦：向上法によるスラブ軌道レール軸力の測定，平成 14 年鉄道技術連合シンポジウム講演論文集, 47-50, 2002.
4) 高井秀之：保線の常識！非常識？その 31:レールの軸力は測れない !?，新線路, **60.11**, 36, 2006.
5) 大宮孝夫　他：ロングレール内軸力に関する基礎的研究，土木学会第 60 回年次学術講演概要集，IV-134，267-268, 2005.
6) Kukla,S.:Free vibrations of axially loaded beams with concentrated masses and intermediate elastic supports, *J. Sound Vibr.*, **172**, 449-458, 1994.
7) Luo, Y.:Frequency analysis of infinite continuous beam under axial loads, *J. Sound Vibr.*, **213**, 791-800, 1998.
8) 清水紗希，阿部和久，相川明，紅露一寛:軸力を受けるレールの波動伝播解析，計算数理工学論文集，Vol.9, 67-72, 2009.
9) Delph, T.J., Herrmann, G. and Kaul, R.K.:Harmonic wave propagation in a periodically layered, infinite elastic body : Antiplane strain, *J.Appl. Mech.*, **45**, 343-349, 1978.
10) Nickel, R.E. and Secor, G.A. : Convergence of consistently derived Timoshenko beam finite elements, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **5**, 243-253, 1972.
11) 石田周二，吉田勝：曲線軌道における台車・軌道系振動の解析，機会学会論文集 C 編 63 巻 615 号，No.97-0165, 3809-3816，1997.

(2010. 4.16受付)

WAVE PROPAGATION ANALYSIS BY 3-D BEAM ELEMENTS FOR AN INFINITE TRACK HAVING AXIALLY LOADED RAILS

Saki SHIMIZU, Kazuhisa ABE, Akira AIKAWA and Kazuhiro KORO

Wave modes propagating in rails subjected to an axial load due to temperature stress are analyzed. An infinite track consisting of rails and sleepers is modeled by 3-D Timoshenko beams. The Floquet theorem is applied to the equation of motion of track sub-structure given by a repetitive unit. The wave dispersion analysis is then reduced to an eigenvalue problem in terms of the axial load, the wave number and the frequency. Sensitivity of axial loads to the wave number and frequency is investigated in the context of the dispersion analysis. Through those analyses, modes which are suitable for evaluation of axial load and the influence of uncertainties in track modeling on these modes are discussed.