

# Cyclic densification モデルに基づく 3次元弾塑性有限要素法を用いた バラスト材の繰返し変形解析

紅露一寛<sup>1</sup>・山田啓太<sup>2</sup>

<sup>1</sup>正会員 博士(工学) 新潟大学准教授 大学院自然科学研究科(〒950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)  
E-mail: kouro@eng.niigata-u.ac.jp

<sup>2</sup>非会員 新潟大学大学院自然科学研究科 博士前期課程(研究当時)

繰返し荷重を受けるバラスト道床の残留変形量を高効率に評価することを目的に, Suiker らが提案した cyclic densification モデルを 3 次元弾塑性有限要素法に実装した. 大型繰返し三軸試験結果との比較を通し, 解析結果の妥当性を検討し, わが国で使用されているバラスト材の繰返し変形挙動解析における当該構成モデルの有効性を検討した. その結果, 繰返しせん断の作用による残留ひずみの発現・累積挙動は定性的に表現可能であるものの, 応力経路によっては定量的に評価することが難しい場合があることがわかった.

**Key Words :** railway ballast, cyclic loading, track deterioration, cyclic densification model, 3-D FE analysis

## 1. はじめに

わが国の鉄道では, 輪重衝撃の分散化と騒音・振動低減を目的として, 碎石粒子の集合体であるバラスト道床が敷設されるのが一般的である. バラストは施工が容易で費用対効果に優れている半面, 列車の走行荷重が繰返し作用することで道床内部のバラスト粒子の接触状態が変化し, 結果としてバラスト上面に残留変位が生じることとなる. 特に, 鉛直方向に残留変位が発生・進展する現象は道床沈下と呼ばれ, 軌道保守上の重要監視項目となっている.

これまで, バラスト道床の繰返し変形メカニズムの解明や沈下量予測手法の開発など, バラスト道床沈下に関する研究が, 国内外で精力的に進められてきた. 特に, 石川らはバラスト道床を有する実物大軌道において繰返し載荷試験<sup>1)</sup>, および大型繰返し三軸試験<sup>2)</sup>を行い, バラスト道床およびバラスト材の繰返し変形特性を実験的に考察している. また, 名村らは最小上載荷重とまくらぎ形状<sup>3)</sup>, および荷重振幅<sup>4)</sup>に着目し, 有道床軌道の繰返し鉛直載荷試験を実施し, 道床部の変形特性について検討している. Al Shaer ら<sup>5)</sup>は, 高速走行時におけるバラスト道床部の動的特性および沈下挙動を実験的に考察している. なお, バラスト材の力学挙動および試験法については, Indraratna らの成書<sup>6)</sup>にもまとめられている.

一方, 沈下量および道床沈下現象の定量的な評価, お

よび数値予測については, 実務において長らく, 簡単な経験式を用いた道床沈下量予測手法が適用されてきた<sup>7)</sup>. 経験式は簡易な形で定義されており, 道床上面の沈下量を予測するには適用が容易である利点を有している半面, 沈下量以外の残留変形挙動を把握するには不十分なものと言わざるを得ない. 道床上面で観測される残留変位は, 道床部内部の単粒度碎石の配置および接触状態の変化によって生じることは明らかであり, 経験式の妥当性を追認する意味でも, 道床内部の運動状態を正確に把握し, 予測することが必要である. しかし, 道床内部のバラスト粒子の運動状態の観測は非常に困難であり, 相川ら<sup>8)</sup>がバラスト粒子の 3 次元計測に取り組んでいるが, まだ端緒についたところである. そのため, 離散化解析手法を用いて道床部の運動状態の把握・考察がなされてきた.

石川らは, 不連続変形法 (DDA) により, 大型繰返し三軸試験<sup>9)</sup>および有道床軌道の繰返し載荷試験<sup>10)</sup>のシミュレーションを行っている. また, 文献<sup>11)</sup>では, DDA 解析結果における粒子特性の影響について検討している. DDA 解析は, 粒子自身の変形を考慮できる粒状要素を用いて粒子集合体の運動を解析している. 粒子の変形を考慮することは解析の数値安定性に寄与することは間違いないが, 道床部の変形挙動は粒子の回転や平行移動により粒子配置が変化することに起因することは明らかであり, 粒子の変形を考慮することの必要性には疑問が残る. そのため, バラスト粒子を剛体とみな

してその集合体の運動を表現する個別要素法 (DEM) により、バラスト道床の繰返し変形挙動の解析を行った事例も国内外で多数報告されている。Saussine<sup>12)</sup>らは、バラスト粒子を剛な多角形として表現した2次元個別要素解析を行っている。同様の解析は著者ら<sup>13)</sup>や Karrech<sup>14)</sup>らによっても行われている。浦川ら<sup>15)</sup>は、動的挙動の把握のために3次元DEM解析を実施している。近年では、複雑な形状を有するバラスト粒子の形状表現の問題を軽減するために、1個のバラスト粒子を小さな球形剛体要素の結合体としてモデル化し、そのDEM解析手法が McDowell らにより提案されている<sup>16)</sup>。また、粒子の破碎を考慮した個別要素解析手法<sup>17)</sup>も提案されている。

DDA や DEM による解析は、バラスト道床の粒状体としての性質を評価するためには非常に有効であり、モデルの簡易さも長所である。しかし、特に DEM では動的解析を基本としていることもあり、安定に解析を進めるためには膨大な計算時間を要する。そのため、これらの手法は、碎石粒子の運動において動的効果が卓越する現象の解析には適しているが、道床沈下のように、数万～数十万回以上の載荷・除荷の繰返しにより生じる残留変位の予測・評価には、解析負荷の大きさから適しているとは言い難い。DEM のこの問題点を克服するために、載荷各サイクルでの残留変位のみを DEM 解析結果から予測する手法が提案されている<sup>18)</sup>が、その力学的根拠が不明確なままである。

上述の経緯から、著者らは、バラスト道床を弾塑性連続体としてモデル化し、有道床軌道の残留変形を有限要素法 (FEM) により評価・予測することに取り組んできた。弾塑性構成則には hypoplastic モデルと拡張下負荷面モデルを考え、その適用可能性について検討した<sup>19)</sup>。特に下負荷面モデルについては、実物大有道床軌道の繰返し変形解析に適用している<sup>20)</sup>。なお、弾塑性連続体モデルを採用した場合でも、応力履歴をもれなく追跡して解析を進める必要があることから、その計算負荷の軽減を目的として時間域均質化法を援用した沈下量予測手法の構成を試みている<sup>21)</sup>が、解析精度の面で問題点があり、現在その解決に取り組んでいる。また、Suiker らは、バラスト道床の繰返し載荷を対象に、載荷・除荷1サイクルで発生する残留変形の増加量を塑性ひずみ増分として評価する、cyclic densification モデル<sup>22)</sup>を提案している。文献<sup>22)</sup>では、繰返し三軸試験のシミュレーションのみならず、軌道縦断方向の残留変形量を2次元有限要素解析によって評価している。軌道構造およびその力学状態を考えた場合、3次元モデルを用いてバラスト道床の沈下量を評価・解析することが望ましいものの、当該構成モデルの3次元FEMへ

の実装は未着手の状況にある。

そこで本研究では、Suiker らの cyclic densification モデル<sup>22)</sup>を3次元有限要素法に実装し、解析手法の妥当性の検証を兼ねて、バラスト材の繰返し三軸試験の有限要素シミュレーションを行なう。解析結果は、石川らにより過去に実施された大型繰返し三軸試験<sup>2)</sup>の結果と比較することで、わが国で用いられるバラスト材の繰返し変形挙動のモデル化における当該モデルの妥当性を検討する。

## 2. Cyclic densification モデル

### (1) 構成モデルの概要

本研究では、バラスト材を対象に文献<sup>22)</sup>で示されている cyclic densification モデルを用いて、バラスト材の3次元な繰返し変形挙動をモデル化する。cyclic densification model では、計算負荷の軽減のために、一般的な弾塑性モデルのように応力履歴をもれなく追跡することはせず、所定の繰返しサイクル数の増加に対して新たに発生する残留ひずみの総量を直接評価する。残留ひずみの変化は、載荷・除荷過程における最大作用荷重(または最大強制変位)に釣り合うように物体内部に生じる応力(ピーク時応力)が破壊規準を超過した場合にのみ生じるものとし、破壊規準自体は弾塑性論のひずみ硬化モデルと同様、残留ひずみの総量に依存して変化するものとする。単位サイクル数増分あたりの残留ひずみの変化量は、この破壊規準に対する応力超過量に比例するように定義される。これは、所定の拘束圧・最大主応力比の下で行なわれた繰返し三軸試験において、ある程度の繰返し載荷の後には残留ひずみの増加がサイクル数の増加に対して概ね一定となる挙動(例えば文献<sup>2),23)</sup>)を簡易なモデルで表現するためであると考えられる。

なお、cyclic densification model を用いる場合、最大作用荷重との釣り合い状態を保持しつつ、繰返しサイクル数を変化させたときの物体内部の変形状態をモニタリングすることとなる。そのため、実際の解析では、系の釣り合い状態を保持しつつ、無荷重状態から所定の最大荷重が作用する状態まで、釣り合い状態を移行する必要がある。本研究では、Suiker らと同様、古典的弾塑性論に基づく弾塑性モデルでその力学挙動を評価する。

次小節では、繰返し過程、最大荷重作用時の釣り合い状態を再現するまでの単調載荷過程の各々において用いられる構成モデルの詳細について説明する。なお、本研究では、cyclic densification model の繰返し変形挙動の定性的な再現性を確認する目的で、単調載荷過程・繰返し載荷過程ともに文献<sup>22)</sup>に示されたモ

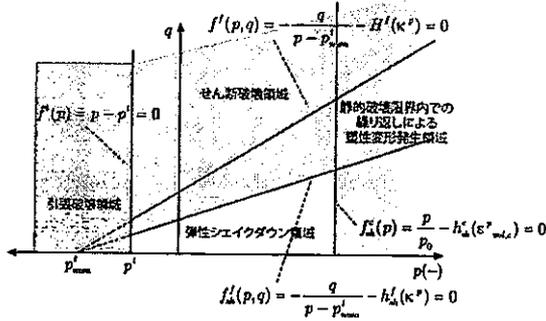


図-1 繰り返し載荷時の構成モデルにおける破壊基準面。

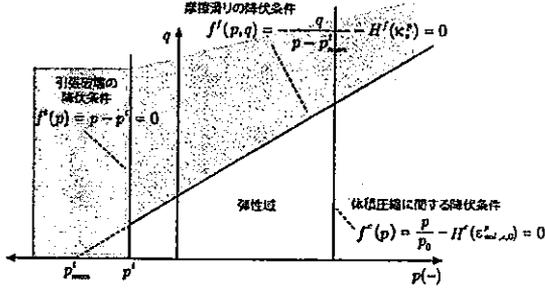


図-2 単調載荷時の構成モデルにおける降伏曲面。

デルをそのまま用いることとする。

## (2) 繰り返し載荷時の弾塑性挙動のモデル化

繰り返し載荷時の残留変形の発生・累積現象をモデル化するに当たり、応力  $\sigma_{ij}$  は繰り返し載荷回数  $N$  の履歴依存性を有するものと仮定し、応力の変化速度は次の亜弾性構成式で与える。

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dN} = D_{ijkl} \frac{d\epsilon_{kl}^e}{dN} = D_{ijkl} \left( \frac{d\epsilon_{kl}}{dN} - \frac{d\epsilon_{kl}^p}{dN} \right), \quad (1)$$

ここで、 $\epsilon_{kl}^e$  は全ひずみ  $\epsilon_{kl}$  の弾性成分、 $\epsilon_{kl}^p$  は塑性成分である。また、弾性定数  $D_{ijkl}$  は圧力依存性を考慮して、

$$D_{ijkl} = \frac{3K_t}{2(1+\nu)} \left[ (1-2\nu)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + 2\nu\delta_{ij}\delta_{kl} \right], \quad (2)$$

$$K_t = K_{ref} \left( \frac{p}{p_{ref}} \right)^{1-n^e}, \quad p < 0,$$

で与える。なお、 $p = \sigma_{kk}/3$  は静水圧応力であり、 $\nu$  はポアソン比、 $p_{ref} (< 0)$  は参照応力、 $K_{ref}$ 、 $n^e$  は材料定数である。

塑性ひずみ  $\epsilon_{ij}^p$  は、摩擦滑り、体積圧縮、引張破壊の3つのメカニズムにより発生・蓄積するものとし、その発生量は超過応力の概念に基づき与えるものとする。 $\kappa^p$ 、 $\epsilon_{vol,c}^p$ 、 $\epsilon_{vol,t}^p$  をそれぞれ摩擦滑り、体積変化、引張破壊に関する塑性乗数として、塑性ひずみ速度  $d\epsilon_{ij}^p/dN$

を与える流動則は次式で定義する。

$$\frac{d\epsilon_{ij}^p}{dN} = \frac{d\kappa^p}{dN} N_{ij}^f + \frac{d\epsilon_{vol,c}^p}{dN} N_{ij}^c + \frac{d\epsilon_{vol,t}^p}{dN} N_{ij}^t, \quad (3)$$

ここで、 $N_{ij}$  は流動方向を規定するテンソルであり、上添字  $f$ 、 $c$ 、 $t$  はそれぞれ摩擦滑り、体積圧縮、引張破壊に関する量であることを示す。

まず、摩擦滑りに起因する塑性ひずみ速度の発現モデルについて考える。図-1に示すように、摩擦滑りにおいては静水圧応力  $p$  に比例してその強度が発現するように、Drucker-Pragerモデルで用いられる円錐曲面により破壊基準面を与える。

$$\frac{d\kappa^p}{dN} = \alpha^f \left\langle -\frac{q}{p - p_{num}^t} - h_{sh}^f(\kappa^p) \right\rangle^{\gamma^f}, \quad (4)$$

$$q = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij},$$

ここで、 $\langle \cdot \rangle$  はMacauley bracket、 $\alpha^f$ 、 $\gamma^f$  は材料定数であり、応力超過量評価の基準値となる材料関数  $h_{sh}^f$  は次式で与える。

$$h_{sh}^f(\kappa^p) = h_0 + (h_m - h_0)[1 - e^{-\eta^f(\kappa^p - \kappa_0^p)}], \quad (5)$$

なお、 $h_0$ 、 $h_m$ 、 $\eta^f$  は材料定数である。また、流動方向を規定するテンソル  $N_{ij}^f$  は、塑性ポテンシャル  $g^f$  を用いて与える。

$$N_{ij}^f = \frac{\partial g^f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial g^f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3s_{ij}}{2q} + \frac{1}{3} d^f \delta_{ij}, \quad (6)$$

$$g^f(q, p, \kappa^p) = q + d^f(\kappa^p)p,$$

$$d^f(\kappa^p) = d_0 + (d_m - d_0)[1 - e^{-\zeta^f(\kappa^p - \kappa_0^p)}].$$

なお、 $d_0$ 、 $d_m$ 、 $\zeta^f$  は材料定数であり、 $\kappa_0^p$  は  $\kappa^p$  の基準値である。

次に、体積圧縮に起因する塑性ひずみ速度の発現モデルについて考える。図-1に示すように、当該の塑性ひずみ速度成分は、 $p$  軸と直交する平面で定義された破壊面を規準とし、静水圧応力の超過量に基づき与えるものとする。

$$\frac{d\epsilon_{vol,c}^p}{dN} = \alpha^c \left\langle \left( \frac{p}{p_0} \right) - h_{sh}^c(\epsilon_{vol,c}^p) \right\rangle^{\gamma^c}, \quad (7)$$

ここで、 $\alpha^c$ 、 $\gamma^c$  は材料定数であり、応力超過量評価の基準値となる材料関数  $h_{sh}^c$  は次式で与える。

$$h_{sh}^c(\epsilon_{vol,c}^p) = 1 + \eta^c(\epsilon_{vol,c}^p - \epsilon_{vol,c,0}^p). \quad (8)$$

なお、 $\eta^c$  は材料定数であり、 $\epsilon_{vol,c,0}^p$  は  $\epsilon_{vol,c}^p$  の基準値である。また、流動方向を規定するテンソル  $N_{ij}^c$  は、塑性ポテンシャル  $g^c$  を用いて次式で与える。

$$N_{ij}^c = \frac{\partial g^c}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} = -\frac{1}{3} \delta_{ij}, \quad (9)$$

$$g^c(p, \epsilon_{vol,c}^p) = -p + h_{sh}^c(\epsilon_{vol,c}^p)p_0,$$

最後に、引張破壊の基準および発生する塑性ひずみ速度成分について考える。図-1に示すように、引張破壊の場合には降伏条件  $f^t = p - p^t = 0$  を破壊基準とし、塑性ひずみ速度成分  $d\varepsilon_{vol,t}^p/dN$  は適応の条件  $df^t/dN = 0$  から決定できる。なお、流動方向を規定するテンソル  $N_{ij}^t$  は次式で規定される。

$$N_{ij}^t = \frac{\partial f^t}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{3} \delta_{ij}, \quad (10)$$

### (3) 単調載荷時の弾塑性挙動のモデル化

前小節で示した構成モデルは、載荷・除荷1サイクルにおいて発生する塑性ひずみの総量を評価するものであり、繰り返し各サイクルにおける最大荷重（応力）あるいは最大強制変位の作用下で残留ひずみ・変位の進展解析を進めることとなる。その際、無変形状態など基準となる力学状態から、系全体の釣り合い状態を保持しつつ、繰り返し変形解析の力学状態である最大荷重・変位が生じる状態まで移行する必要がある。この過程（以下、単調載荷過程）は、通常の弾塑性問題として設定し、解析を進めることで評価可能である。以下では、単調載荷過程で用いる弾塑性構成モデルについて説明する。

単調載荷過程の構成モデルでは、応力・ひずみ関係は  $t$  を時刻として次式の亜弾性構成式で与える。

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^e = D_{ijkl} (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p), \quad (11)$$

ここで、 $\dot{\cdot}$  は時間微分を表わす。

塑性ひずみ速度  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$  は、繰り返し載荷過程と同様、摩擦滑り、体積圧縮、引張破壊の3種類のメカニズムにより発生するものと仮定し、複数の降伏条件を用いた弾塑性モデルにより与える。 $\kappa_0^p$ 、 $\varepsilon_{vol,c,0}^p$ 、 $\varepsilon_{vol,t,0}^p$  をそれぞれ摩擦滑り、体積圧縮、引張破壊に関する塑性乗数として、流動則は次式で与えられる。

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \kappa_0^p m_{ij}^f + \dot{\varepsilon}_{vol,c,0}^p m_{ij}^c + \dot{\varepsilon}_{vol,t,0}^p m_{ij}^t, \quad (12)$$

ここで、 $m_{ij}$  は流動方向を規定するテンソルである。

まず、摩擦滑りに起因する塑性ひずみ速度成分について考える。図-2に示すように、摩擦滑りに対しては非関連流動則に基づく Drucker-Prager モデルを採用する。このとき、降伏条件は次式で与えられる。

$$f^f(q, p, \kappa_0^p) = -\frac{q}{p - p_{num}^t} - H^f(\kappa_0^p) = 0, \quad (13)$$

ここで、等方硬化関数  $H$  は次式で定義する。

$$H^f(\kappa_0^p) = H_0 + (H_m - H_0) \left\{ 1 - \exp(-\tilde{\zeta}^f \cdot \kappa_0^p) \right\}, \quad (14)$$

なお、 $H_0$ 、 $H_m$ 、 $\tilde{\zeta}^f$  は材料定数である。また、流動方向を規定するテンソル  $m_{ij}^f$  は、 $G^f$  を塑性ポテンシャル

として、

$$m_{ij}^f = \frac{\partial G^f(q, p, \kappa_0^p)}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial G^f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial G^f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}},$$

$$G^f = G^f(q, p, \kappa_0^p) = q + p \cdot b^f(\kappa_0^p), \quad (15)$$

$$b^f(\kappa_0^p) = b_0 + (b_m - b_0) \left\{ 1 - \exp(-\tilde{\zeta}^f \cdot \kappa_0^p) \right\},$$

のように定義する。ここで、 $b_0$ 、 $b_m$  は材料定数である。

次に、体積圧縮に起因する塑性ひずみ速度について考える。図-2に示すように、体積圧縮に関する降伏条件は  $p$  軸と直交する平面で定義された平面で与える。

$$f^c(p, \varepsilon_{vol,c,0}^p) = \frac{p}{\tilde{p}_0} - H^c(\varepsilon_{vol,c,0}^p) = 0, \quad (16)$$

ここで、 $H^c$  は次式で定義する。

$$H^c(\varepsilon_{vol,c,0}^p) = 1 + \tilde{\zeta}^c \cdot \varepsilon_{vol,c,0}^p. \quad (17)$$

なお、 $\tilde{\zeta}^c$ 、 $\tilde{p}_0$  は材料定数である。また、流動方向を規定するテンソル  $m_{ij}^c$  は、関連流動則により次式で与える。

$$m_{ij}^c = \frac{\partial G^c(p, \varepsilon_{vol,c,0}^p)}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial G^c}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (18)$$

$$G^c = G^c(p, \varepsilon_{vol,c,0}^p) = -p + \tilde{p}_0 \cdot H^c(\varepsilon_{vol,c,0}^p).$$

最後に、引張破壊に起因する塑性ひずみ速度について考える。この場合、降伏条件  $f^t = p - p^t = 0$  を降伏条件とし、塑性ひずみ速度成分  $\dot{\varepsilon}_{vol,t,0}^p$  は適応の条件  $f^t = 0$  から決定される。なお、流動方向を規定するテンソル  $m_{ij}^t$  は次式で規定される。

$$m_{ij}^t = \frac{\partial G^t(p)}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial G^t}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (19)$$

$$G^t = G^t(p) = p - p^t.$$

### 3. 準静的釣り合い問題の定式化

本研究では、前節で示した cyclic densification モデルを用い、バラスト材を弾塑性連続体としてモデル化し、各載荷・除荷サイクルでの残留変形（変位）量を静的条件下での釣り合い問題を解くことで評価する。そこで本節では、当該モデルにおける釣り合い問題の定式化、およびその離散化について説明する。なお、以下に示す定式化は、繰り返し載荷過程・単調載荷過程とも同様の概念で構成可能である。そのため、以下では繰り返し載荷過程の定式化のみを示すこととする。

載荷・除荷の一連の繰り返し過程において、繰り返し  $N + \Delta N$  回目において静的釣り合い式を満足する状態を考える。このとき、物体領域  $\Omega$  においては次の仮想仕事式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma_{ij(N+\Delta N)} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega \\ & = \int_{\Omega} b_{i(N+\Delta N)} \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_{i(N+\Delta N)} \delta u_i d\Gamma_t, \end{aligned} \quad (20)$$

ここで、 $b_i$  は体積力、 $t_i$  は表面力であり、各サイクルでの最大作用力を与える。また、 $\delta u_i, \delta \varepsilon_{ij}$  はそれぞれ仮想変位、仮想ひずみ、 $\Omega$  は領域、 $\Gamma_t$  は表面力規定境界であり、部分境界  $\Gamma_u$  では変位は  $u_i = \bar{u}_i(N+\Delta N)$  (既知) であるものとする。

式(20)において、応力  $\sigma_{ij(N+\Delta N)}$  が、 $N + \Delta N$  サイクルにおける全ひずみ  $\varepsilon_{(N+\Delta N)}$ 、および9種類の応力不変量・内部状態変数の関数として、次式で定義されているものとする。

$$\sigma_{ij(N+\Delta N)} = \sigma_{ij(N+\Delta N)}(\mathbf{a}(\varepsilon_{(N+\Delta N)}), \varepsilon_{(N+\Delta N)}). \quad (21)$$

ここで、 $\mathbf{a}(\varepsilon_{N+\Delta N})$  は応力不変量と内部状態変数を収納したベクトルであり、次式で定義する。

$$\mathbf{a}(\varepsilon_{(N+\Delta N)}) = \{p_{(N+\Delta N)}, q_{(N+\Delta N)}, \mu_{t(N+\Delta N)}, h_{sh(N+\Delta N)}^f, h_{sh(N+\Delta N)}^c, \Delta \kappa^p, \Delta \varepsilon_{vol,c}^p, d_{(N+\Delta N)}^f, \Delta \varepsilon_{vol,t}^p\}^T, \quad (22)$$

ここで、下添え字  $(N + \Delta N)$  は、繰り返し载荷  $N + \Delta N$  サイクルでの諸量であることを表しており、

$$\begin{aligned} \mu_{t,N+\Delta N} &= \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} K_{t,N+\Delta N}, \\ K_{t,N+\Delta N} &= \left( \frac{-p_{N+\Delta N} + p_{num}^t}{-p_{ref}} \right)^{1-n^e}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Delta \kappa^p &= \kappa_{N+\Delta N}^p - \kappa_N^p, \\ \Delta \varepsilon_{vol,c}^p &= \varepsilon_{vol,c,N+\Delta N}^p - \varepsilon_{vol,c,N}^p, \\ \Delta \varepsilon_{vol,t}^p &= \varepsilon_{vol,t,N+\Delta N}^p - \varepsilon_{vol,t,N}^p, \end{aligned}$$

である。

式(21)において、応力  $\sigma_{ij,N+\Delta N}$  は内部状態変数および全ひずみに対して非線形となる。そのため、 $\sigma_{ij,N+\Delta N}$  を次式のように線形化する。

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,N+\Delta N} &= \sigma_{ij,N+\Delta N}^{(m+1)} \\ &= \sigma_{ij}(\mathbf{a}(\varepsilon_{N+\Delta N}^{(m)}), \varepsilon_{N+\Delta N}^{(m)}) \\ &\quad + \frac{d\sigma_{ij}}{d\varepsilon_{kl}}(\mathbf{a}(\varepsilon_{N+\Delta N}^{(m)}), \varepsilon_{N+\Delta N}^{(m)}) d\varepsilon_{kl,N+\Delta N}^{(m)} \\ &= \sigma_{ij,N+\Delta N}^{(m)} + C_{ijkl,N+\Delta N}^{ep(m)} d\varepsilon_{kl,N+\Delta N}^{(m)}, \end{aligned} \quad (24)$$

なお、上添え字  $(m)$ 、 $(m + 1)$  は Newton-Raphson 法計算の反復ステップ数を表している。また、 $\varepsilon_{kl(N+\Delta N)}^{(m)} = (u_{k,l(N+\Delta N)}^{(m)} + u_{l,k(N+\Delta N)}^{(m)})/2$ 、 $d\varepsilon_{kl(N+\Delta N)}^{(m)} = (du_{k,l(N+\Delta N)}^{(m)} + du_{l,k(N+\Delta N)}^{(m)})/2$  と定義し、 $u_{k,l(N+\Delta N)}$ 、 $du_{k,l(N+\Delta N)}$  は  $N + \Delta N$  サイクルでの変位、変位増分である。

式(24)を(20)に代入すると、

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} C_{ijkl(N+\Delta N)}^{ep(m)} d\varepsilon_{kl(N+\Delta N)}^{(m)} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} b_{i(N+\Delta N)} \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_{i(N+\Delta N)} \delta u_i d\Gamma_t \\ &\quad - \int_{\Omega} \sigma_{ij(N+\Delta N)}^{(m)} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega, \end{aligned} \quad (25)$$

を得る。本研究では、式(25)を有限要素法により離散化し、解くこととする。

本手法では後退 Euler 法により応力積分を処理しているので、式(25)における接線係数テンソルは、応力が全ひずみだけでなく内部状態変数にも依存し、内部状態変数も応力と同様に全ひずみの関数とみなせる。そのため、式(25)の Newton-Raphson 法反復計算が反復回数に対して理論通り2次で収束するように、次式で定義する consistent 接線係数で与える。

$$\begin{aligned} C_{ijkl(N+\Delta N)}^{ep(m)} &= \frac{d\sigma_{ij}}{d\varepsilon_{kl}}(\mathbf{a}(\varepsilon_{(N+\Delta N)}^{(m)}), \varepsilon_{(N+\Delta N)}^{(m)}) \\ &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}(\varepsilon_{(N+\Delta N)}^{(m)}) \\ &\quad + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial a_n}(\mathbf{a}(\varepsilon_{(N+\Delta N)}^{(m)})) \frac{\partial a_n}{\partial \varepsilon_{kl}}(\varepsilon_{(N+\Delta N)}^{(m)}) \\ &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}(\varepsilon_{(N+\Delta N)}^{(m)}) - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial a_n}(\mathbf{a}(\varepsilon_{(N+\Delta N)}^{(m)})) \\ &\quad \cdot \left[ \frac{\partial r_\alpha}{\partial a_n} \right]^{-1}(\mathbf{a}(\varepsilon_{(N+\Delta N)}^{(m)})) \frac{\partial r_\alpha}{\partial \varepsilon_{kl}}(\varepsilon_{(N+\Delta N)}^{(m)}). \end{aligned} \quad (26)$$

ただし、 $r_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, 9$ ) は、応力評価各点において応力不変量・内部状態変数を求める際に用いる残差式であり、詳細は文献<sup>22)</sup>を参照されたい。

#### 4. バラスト材の大型三軸試験を対象とした残留ひずみ進展解析

道床用バラスト材のせん断挙動を定量評価する観点から、当該モデルを用いた有限要素解析を行ない、石川らにより実施・報告された大型三軸試験<sup>2)</sup>結果と解析結果との比較を通して、cyclic densification モデルの有効性について検討する。なお、三軸試験の応力条件の下では、有限要素法により解析を行なう必然性はないが、本研究で取り組んだ cyclic densification モデルを実装した3次元有限要素解析法の妥当性を確認するために、あえて有限要素解析を実施したことを申し添えておく。解析モデルは辺長1の立方体を27節点・40要素(定ひずみ要素)で分割したものを考え、直交座標各軸に関する対称条件を表面の3面に課した上で、残りの3つの面には所定の拘束圧と軸差応力が作用するように表面力を作用させた。なお、解析は荷重制御で実行した。

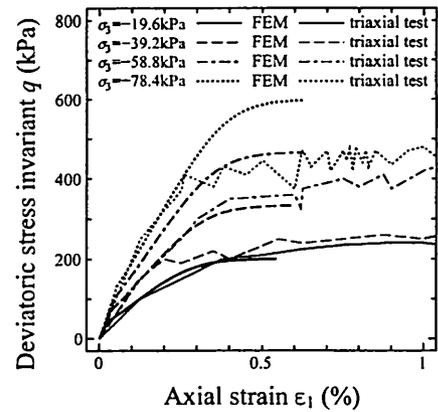
$K_{ref}$	150 MPa	$\alpha^f$	$1.0 \times 10^{-6}$
$n^c$	0.35	$\gamma^f$	4.0
$p_{ref}$	-100 kPa	$\alpha^c$	$2.0 \times 10^{-7}$
$p^t$	5 kPa	$\gamma^c$	3.0
$p_{num}^t$	10 kPa	$p_0$	-20 kPa
$\nu$	0.09	$h_0$	0.70
$p_0^{(init)}$	-25 kPa	$h_m$	2.08
$H_0$	1.0	$\eta^f$	1500
$H_m$	2.08	$\eta^c$	2500
$b_0$	0.20	$d_0 (= d_m)$	0.50
$b_m$	1.10		
$\zeta^f = \bar{\zeta}_f$	1000	$\bar{p}_0$	-25 kPa
$\zeta^c$	3000		

### (1) 単調荷重試験

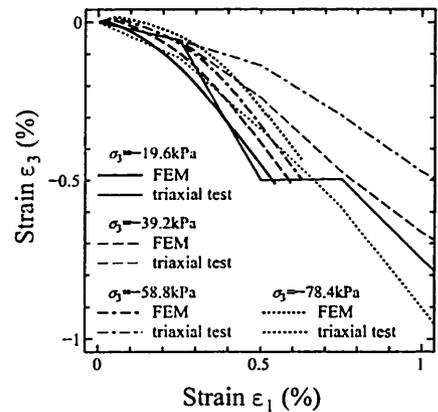
文献<sup>2)</sup>によれば、大型三軸試験機を用いた単調荷重試験は、均等係数  $U_c = 1.7$ 、有効径  $D_{10} = 27\text{mm}$  ( $D_{10}$  は文献<sup>2)</sup>の粒径加積曲線から読み取った)の安山岩碎石を使用して作成した直径30cm、高さ60cmの円筒供試体を用いて行なっている。試験では、供試体内部から負圧を作用させることにより所定の拘束圧 ( $\sigma_3 = -19.6, -39.2, -58.8, -78.4\text{kPa}$ ) まで等方圧密した上で、拘束圧一定条件下でひずみ制御 (0.1%/min.) で軸荷重を増加させている。なお、有限要素解析において用いた材料定数は、表-1に示す通りである。

まず、軸差応力と軸ひずみの解析結果と試験結果を図-3(a)に示す。図より、軸ひずみ0.3%以下の範囲では、いずれの拘束圧の下でも解析結果と試験結果は同様の値を示している。しかし、軸ひずみ0.3%以上の範囲での解析結果は、拘束圧が小さい場合では試験結果と概ね一致しているが、拘束圧を大きく設定するにつれて最大軸差応力の値に試験結果との差が生じる。ただし、文献<sup>2)</sup>の試験結果は、軸ひずみが1%を超える領域においても軸差応力の増加が続き、その最大値は軸ひずみが5~6%程度となった段階で約500kPa ( $\sigma_3 = -58.8\text{kPa}$ )、約700kPa ( $\sigma_3 = -78.4\text{kPa}$ ) となっている。大ひずみ領域での実験結果は軸差応力が50~100kPa程度変動していることから、実験での最大軸ひずみも同程度の変動を示すものと予想される。そのため、当該モデルは、せん断強度は概ね適切に評価できる半面、終局強度到達までの速さは試験と解析とで相違が認められ、特に高拘束圧条件下では解析の方がひずみのより小さい段階で最大軸差応力に到達する傾向を示すことがわかった。

次に、図-3(b)に軸ひずみと側方ひずみの関係を示し、バラスト材の体積変化傾向について検討する。試験結果は、4種類の拘束圧のいずれの場合にも、Poisson比はほぼ1/2~1の値を示している。一方、解析結果はPoisson比が1に漸近する挙動を示しており、試験結果と同様の傾向を示している。



(a) 軸差応力と軸ひずみの関係。



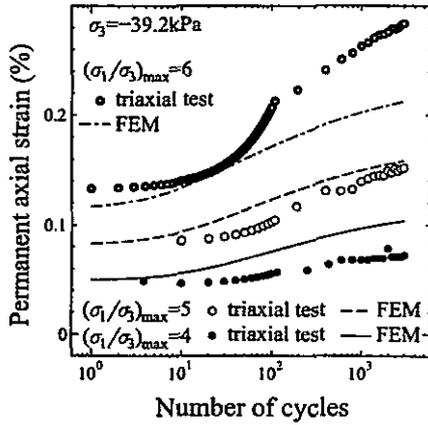
(b) 軸ひずみと側方ひずみの関係。

図-3 単調荷重条件下での大型三軸試験結果<sup>2)</sup>とその解析結果。

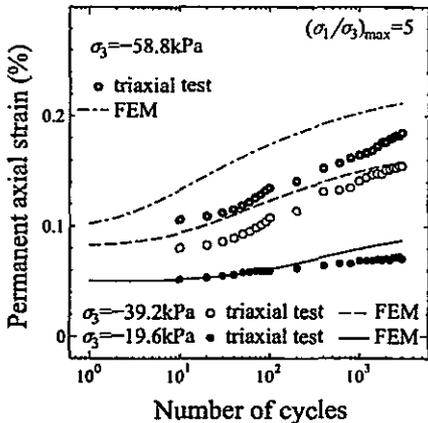
### (2) 繰り返し荷重試験

次に、前小節と同様の材料・供試体を用いて石川らにより実施された大型繰り返し三軸試験<sup>2)</sup>を対象に解析を行なった。試験では、単調荷重試験と同様に、供試体内部から負圧を作用させることにより所定の拘束圧まで等方圧密した上で、所定の拘束圧の下で軸差応力を0から所定の最大値まで増加させた後、再度0まで除荷する荷重・除荷サイクルを3000回繰り返している。なお、解析においては、サイクル数増分を  $\Delta N = 1$  としている。

まず、拘束圧を  $\sigma_3 = -39.2\text{kPa}$  で一定とした場合の、残留軸ひずみの累積傾向を図-4(a)に示す。図より、主応力比を4,5に設定した場合には、低サイクル、高サイクルのいずれの領域においても、残留軸ひずみの増加傾向は定性的に表現できている。しかし、低サイクル領域における残留軸ひずみの増加量が大きくなり始めるタイミングに関し、解析と実験とでずれが生じている。この点については、破壊基準を規定する shakedown 応力  $h_{sh}^f, h_{sh}^c$  に対するひずみ硬化の影響が実際の材料挙動と解析モデルとで差異が生じていることが考えられ、検討が必要である。一方、主応力比を6とした場



(a) 最大主応力比を変化させた場合の残留軸ひずみの累積傾向 (拘束圧  $\sigma_3 = -39.2\text{kPa}$ ).



(b) 最大主応力比一定条件下での残留軸ひずみの累積傾向 (最大主応力比  $(\sigma_1/\sigma_3)_{max} = 5$ ).

図-4 大型繰り返し三軸試験結果<sup>2)</sup>とその解析結果.

合には、残留ひずみの累積挙動が定性的に表現できているものの、数百サイクル以上の領域での残留ひずみの累積速さが実験と解析とで大きく異なっている。解析結果は1サイクル当りの残留軸ひずみの累積量を過小に評価する傾向を示しており、ひずみ硬化挙動の再評価が必要と思われる。

次に、最大主応力比を  $(\sigma_1/\sigma_3)_{max} = 5$  で一定としたときの解析結果を、試験結果と併せて図-4(b)に示す。3種類の拘束圧の設定値のうち、 $-19.6\text{kPa}$ 、 $-39.2\text{kPa}$ の条件下では実験と解析とで概ね同程度の残留ひずみの値およびその変化挙動を示しているのに対し、 $-58.8\text{kPa}$ とした場合には、解析結果は残留軸ひずみを過大に評価する傾向を示している。

### (3) サイクル数増分 $\Delta N$ の設定と解析精度

本小節では、サイクル数増分の設定が解析結果に及ぼす影響について検討する。拘束圧  $\sigma_3 = -19.6\text{kPa}$ 、最大主応力比  $(\sigma_1/\sigma_3)_{max} = 5$ 、サイクル数を3000回としたときの残留軸ひずみに関し、サイクル数増分を

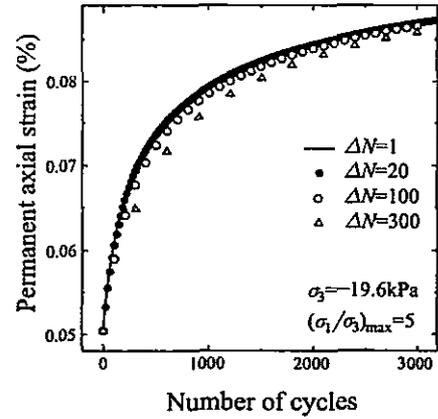


図-5 サイクル数増分  $\Delta N$  の設定が残留軸ひずみの評価結果に及ぼす影響。

$\Delta N = 1, 20, 100, 300$  に設定して得られた解析結果を図-5に示す。解析結果を比較すると、サイクル幅増分  $\Delta N = 1$  の場合と  $\Delta N = 300$  の場合の差が0.002%程度となっている。そのため、当該モデルによる残留ひずみの進展解析を行なう場合には、 $\Delta N$  の値を比較的大きく設定して解析しても、残留ひずみの評価結果にはそれほど大きな影響は及ぼさず、高い計算効率が期待できる。

## 5. おわりに

本研究では、繰り返し荷重を受けるバラスト道床の残留変形量を高効率に評価することを目的に、文献<sup>22)</sup>の cyclic densification モデルを3次元弾塑性有限要素解析に実装した。石川らにより実施された大型繰り返し三軸試験<sup>2)</sup>結果との比較を通し、実装により得られた解析結果の妥当性を検討した上で、わが国で使用されているバラスト材の繰り返し変形挙動解析における当該構成モデルの有効性を検討した。その結果、繰り返しせん断の作用による残留ひずみの発現・累積挙動は定性的に表現可能であるものの、応力経路によっては定量的に評価することが難しい場合があることがわかった。当該モデルの特徴を考えた場合、破壊基準面の形状およびひずみ硬化挙動を適切に表現することが重要と考えられるため、今後さらなる検討が必要と考える。また、体積変化挙動の再現性に対する定量的な検討も必要である。

なお、今回の解析では一様応力場の3次元解析を実施するのにとどまっているが、応力・ひずみ場が3次元的となる解析条件の下で有限要素解析を実施し、その有効性や精度、計算効率などについて、既往の実物大試験結果などとの比較等を通して、詳細な検討が必要である。この点については、今後も継続して取り組むこととしたい。

## 謝辞

本研究を実施するにあたり、平成21-23年度文部科学省科学研究費補助金(若手研究(B), 課題番号21760398)の助成を得た。よって、ここに記して謝意を表す。

## 参考文献

- 1) 石川達也, 名村 明: 実物大試験による道床バラスト部繰返し変形特性の検討. 土木学会論文集, No.512/IV-27, pp.47-59, 1995.
- 2) 石川達也, 須長 誠, 董 軍, 名村 明: 大型繰返し三軸試験による道床バラストの変形特性の検討. 土木学会論文集, No.575/III-40, pp.169-178, 1997.
- 3) 名村 明, 木幡行宏, 三浦清一: 有道床軌道の繰返し変形特性に及ぼす荷重とまくらぎ形状の影響に関する実験的研究. 土木学会論文集, No.779/IV-66, pp.53-68, 2005.
- 4) 名村 明, 木幡行宏, 三浦清一: 道床バラストの繰返し変形特性と推定法. 土木学会応用力学論文集, Vol.5, pp.793-800, 2002.
- 5) Al Shaer, A., Duhamel, D., Sab, K., Foret, G., Schmitt, L.: Experimental settlement and dynamic behavior of a portion of ballasted railway track under high speed trains. *J. Sound. Vib.*, Vol.316, pp.211-233, 2008.
- 6) Indraratna, B., Salim, W.: *Mechanics of Ballasted Rail Tracks - A Geotechnical Perspective.* Taylor & Francis, 2005.
- 7) Dahlberg, T.: Some railroad settlement models - a critical review. *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, Vol.215, Part F, pp.289-300, 2001.
- 8) 相川 明: 鉄道バラストの三次元挙動測定装置の開発 - 溶接継目衝撃荷重の現場測定と DDA パラメータ設定法の提案 -. 土木学会応用力学論文集, Vol.11, pp.487-496, 2008.
- 9) 石川達也, 大西有三: 道床バラストの繰返し変形挙動に対する不連続変形法 (DDA) の適用. 土木学会論文集, No.589/III-42, pp.205-217, 1998.
- 10) 石川達也, 大西有三, 堀池高広: 不連続変形法 (DDA) による道床バラスト部繰返し塑性変形機構の検討. 土木学会論文集, No.645/III-50, pp.15-28, 2000.
- 11) 石川達也, 関根悦夫, 三和雅史, 大西有三: バラスト軌道の不連続体解析に対する粒子特性の力学的影響評価. 土木学会応用力学論文集, Vol.10, pp.513-522, 2007.
- 12) Saussine, G., Cholet, C., Gautier, P.E., Dubois, F., Bohatier, C., Moreau, J.J.: Modelling ballast behaviour under dynamic loading. Part 1: A 2D polygonal discrete element method approach. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.195, pp.2841-2859, 2006.
- 13) 阿部和久, Syakir, M., 紅露一寛: 二次元粒状体モデルによるバラスト道床の沈下解析. 土木学会鉄道力学論文集, Vol.10, pp. 49-54, 2006.
- 14) Karrech, A., Duhamel, D., Bonnet, G., Chevoir, F., Roux, J.-N., Canou, J., Dupla, J.-C.: A discrete element study of settlement in vibrated granular layers: role of contact loss and acceleration. *Granular Matter*, Vol.10, pp.369-375, 2008.
- 15) 浦川文寛, 相川 明, 名村 明: レール圧力実測波形を用いた三次元個別要素法によるバラスト軌道の動的挙動解析. 土木学会第 63 回年次学術講演会講演概要集, No.4-069, pp.137-138, 2008.
- 16) Lim, W.L., McDowell, G.R.: Discrete element modelling of railway ballast. *Granular Matter*, Vol.7, pp.19-29, 2005.
- 17) Lobo-Guerrero, S., Vallejo, L.E.: Discrete element method analysis of railtrack ballast degradation during cyclic loading. *Granular Matter*, Vol.8, pp.195-204, 2006.
- 18) Karrech, A., Duhamel, D., Bonnet, G., Roux, J.N., Chevoir, F., Canou, J., Dupla, J.C., Sab, K.: A computational procedure for the prediction of settlement in granular materials under cyclic loading. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.197, pp.80-94, 2007.
- 19) 紅露一寛, 嘉数東陽, 梶原宗光, 阿部和久: 鉄道におけるバラスト道床材の繰返し変形解析に用いる構成モデルの検討. 計算数理工学論文集, Vol.7, No.1, pp. 31-36, 2007.
- 20) Koro, K., Fukutsu, Y., Abe, K.: 3-D FE simulation of cyclic loading tests of railway ballasted track using subloading surface elastoplastic model. *Proc. of STECH'09*, CD-ROM, 2009.
- 21) 紅露一寛, 嘉数東陽, 阿部和久: 鉄道用バラスト材の繰返し変形解析のための時間域均質化法定式化. 土木学会応用力学論文集, Vol.11, pp.149-158, 2008.
- 22) Suiker, A.S.J., de Borst, R.: A numerical model for the cyclic deterioration of railway tracks, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol.57, pp.441-470, 2003.
- 23) Suiker, A.S.J., Selig, E.T., Frenkel, R.: *J. Geotech. Geoenviron. Engrg.*, Vol.131, No.6, pp.771-782, 2005.

(2011.4.15受付)

## CYCLIC DEFORMATION ANALYSIS OF RAILWAY BALLAST USING 3-D FINITE ELEMENT METHOD WITH CYCLIC DENSIFICATION MODEL

Kazuhiro KORO and Keita YAMADA

In order to achieve the full-scale 3-D ballast settlement analysis, We simulate the cyclic deformation behaviour of the railway ballast using the 3-D finite element method (FEM) and the cyclic densification model. The present constitutive model, proposed by Suiker et al, is based on the overstress formulation like Perzyna's viscoplastic model. To verify the present 3-D FE model, we attempt to simulate the triaxial compression test under cyclic- or monotonic loading conditions.