

論文 軌道の非線形力学特性が 共振周波数・レール軸力関係に及ぼす影響

阿久津友宏¹・阿部和久²・紅露一寛³

¹新潟大学大学院学生 自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)(研究当時)

²正会員 新潟大学教授 工学部建設学科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地) E-mail:abe@eng.niigata-u.ac.jp

³正会員 新潟大学大学院准教授 自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

レール支持部に存在する力学的非線形性が、レールの共振周波数と軸力との関係に及ぼす影響について考察した。そのために、まくらぎ位置を節とするレールの共振モードを対象に、調和加振下での定常解を与える汎関数を Lagrangian の時間平均より求めた。当該汎関数より定常解や共振条件を導出し、共振周波数-軸力関係の加振力に対する鋭敏性を議論した。また、レール加振を模擬した数値解析を通し、本理論の妥当性を検証した。

Key Words : continuous welded rail, axial stress, resonant frequency, mechanical nonlinearity

1. はじめに

鉄道軌道のロングレールはまくらぎにより変位拘束されているため、温度変化やふく進により軸応力が発生する。その結果、猛暑時のレール圧縮軸力は軌道座屈の原因となり、また厳寒時の引張軸力はレール破断を招く危険性を内包している。したがって、レールの軸力管理は軌道保守上重要である。

これまで本研究室では、レールの振動モードに基づいた軸力測定法について検討を行ってきた^{1),2),3),4)}。これは、レール振動モードの固有振動数が有する軸力依存性を利用した方法であり、具体的には、レール加振により得られる卓越振動数をレール軸力に換算するというものである。文献 1) では、レールの鉛直たわみまたは水平たわみの何れかを対象として、まくらぎにより離散支持され軸力を受けるロングレールの波動分散解析を行い、各種振動モードの軸力依存性を統一的に調べた。さらに文献 2) では、3次元はり要素によってレールとまくらぎをより忠実に表現した数値モデルに基づき、文献 1) と同様に分散曲線を求め、軌道系における各種物性値が固有振動数-軸力関係に及ぼす影響について検討した。また文献 3) では、曲線レールを対象とし、軌道の曲率半径が共振周波数-軸力関係に及ぼす影響について調べた。

なお、これらの議論において、レールは一定間隔に配置されたバネ・質点により支持されている無限長ばりとしてモデル化している。この場合、軌道は無限周期構造で与えられ、上述の分散曲線のバンド端には定在波モードが現れる⁵⁾。当該振動モードは、レール加振

により容易に励起可能であるため、特に固有振動数が軸力に対して高い感度を有するモードは本測定法に適している。具体的には、まくらぎ位置を節とした固有振動モードがこの条件に適うものの 1 つであることが、これまでの検討を通してわかった。

上述の議論は軌道構造の周期性に基づいている。しかし、実際の軌道のまくらぎ配置には幾らかのバラツキが存在する。そこで文献 4) では、このような不均一性が本手法による軸力測定に及ぼす影響について検討した。

文献 1) から 4) においては、軌道線形や軌道部材の物性値、さらにはまくらぎ間隔のバラツキなどがレールの共振周波数-軸力関係に及ぼす影響について調べてきた。なお、その際に軌道モデルには線形力学系を仮定した。すなわち、各種パッド類・バラスト道床・レール締結装置などは全て線形弾性的に挙動するものとした。しかし実際の軌道の構成部材は、程度に差異はあるものの、何らかの非線形性を有している。例えばパッド類は、材料と形状とに起因する力学性状により、変形と共に剛性が硬化する特性を持つ⁶⁾。また、バラスト軌道は碎石等の集合体で構成されているため、その変形過程においてバラスト粒子どうしやバラスト粒子・まくらぎ間の接触部に摩擦滑りや剥離などが頻発する⁷⁾。特に後者は粒子接触に起因するものであるため、まくらぎ・バラスト間にわずかな隙間が存在していれば、インパルスハンマによるレール加振の様に比較的微小な振幅の振動下であっても非線形性が顕著に現れる可能性がある。

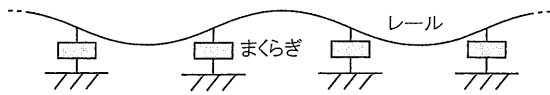


図-1 無限長軌道の定在波共振モード

軌道系に内在しているこれらの非線形性がレールの共振特性に及ぼす影響は、軌道の動特性を理解する上で有用な事項である。しかしながら、従来このような問題はほとんど議論がなされておらず、その挙動を把握することは前述のレール軸力測定の観点からも意義があるものと考えられる。そこで本研究では、レール支持部における力学的非線形性が、軸力作用下にあるレールの共振周波数に及ぼす影響について理論的に検討する。特にレール加振による軸力測定を念頭に、まくらぎ位置を節とする共振モードに焦点を絞って議論する。

以下では、まず調和加振の下で定常状態にあるレールの汎関数を、Lagrangian の時間平均に基づき導出する。続いて、当該汎関数の変分により定常応答解および共振条件を求める。そして、これらの条件式から加振力とレール軸力および共振周波数との関係を導き出し、その結果に基づき共振周波数-軸力関係の加振力に対する鋭敏性について議論する。さらに、実際のレール加振を模擬した数値解析を行い、ここに展開する理論の妥当性について検証する。

2. 共振応答の加振力に対する鋭敏性

(1) 対象とする問題

一定間隔に配置したまくらぎによって支持されているレールに軸力を作用させ、その下で加振する問題を考える。まくらぎ支持点を節として振動する共振状態(図-1)は定在波による共振モードであり、加振による励起が容易で、かつパッド類の物性の影響を受けにくく、軸力に対する周波数感度も良好なことから軸力測定に適している^{1),2)}。本研究では当該定在波モードを対象として以降の議論を進める。

ここでは調和加振問題を対象とし、図-1に示した固有振動モードを励起する加振条件下にある軌道より1区間分を取り出したものを考える。図-2の様に、加振力はレールスパン中央に作用させるものとする。この設定は、軌道全体系にわたり、1スパンおきに逆位相となる調和加振を入力している状態に相当する。このような外力は非現実的ではあるが、これによりまくらぎ支持点を節とする応答を議論することが可能となる。

図-2において、 l はまくらぎ間隔、 u は左端からの位置 x におけるレールたわみ、 ε は加振力、 ω は円振動数である。当該モードではレールにおけるせん断たわみの影響が無視できず、定量的評価にはTimoshenko ばり

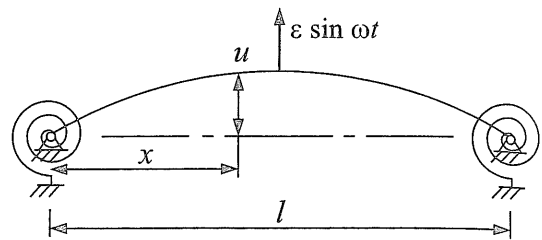


図-2 レール加振モデル

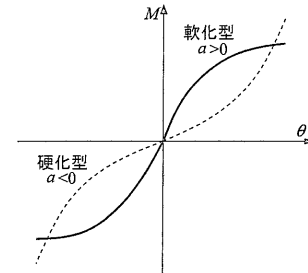


図-3 レール支持部の回転剛性

によるモデル化が必要となる。しかし、本現象の理論展開に限ればそれは必ずしも本質的ではない。よって定式化においては、煩雑さを避けるため、レールはEuler ばりで与える。なお、無限長軌道から取り出した1スパンを対象としているが、問題の対称性により、レールが振動してもレール支持点は x 軸方向に変位を生じない。

また、まくらぎ位置には締結装置やバラスト道床を表現したバネが存在しているが、上述のとおり当該振動ではまくらぎ位置が節となるので、そこに鉛直方向の伸縮は発生しない。したがって、レール・まくらぎ・道床間における変形は主に相対回転により与えられるものとなる。そこで、まくらぎ支持位置に回転バネを取り付けたモデルを考える。回転バネの非線形性には、回転に伴い硬化するもの(硬化型)と、軟化するもの(軟化型)とが考えられる。例えば、まくらぎ・バラスト粒子間にわずかな隙間が存在している場合、まくらぎの回転により接触が発生するので硬化型を与える。一方、まくらぎ・バラスト粒子間に既に接触が存在しており、まくらぎ回転により摩擦滑りが発生する様な場合、軟化型の挙動を示すものと考えられる。以下の理論展開においては、これらの挙動を表現し得る最も簡易なものとして、次の非線形バネモデルを用いる。

$$M = k\theta - a\theta^3 \quad (1)$$

ここで、 M は回転バネからレール端に作用する1スパン当りのモーメント、 θ はまくらぎ支持点におけるレールのたわみ角、 k は回転バネ定数の線形項、 a は非線形項の係数である。なお、 $a < 0$ の場合は硬化型、 $a > 0$

の場合は軟化型に対応する。これら両ケースにおける抵抗モーメント M と回転角 θ との関係は図-3 の様に表される。

(2) 汎関数の導出

式(1)の様な非線形バネを有する振動系の運動方程式は Duffing 方程式⁸⁾と呼ばれ、後述の共振振幅の跳躍現象やカオス応答などが従来研究されてきた。これに対し本研究では、共振周波数-軸力関係の加振力鋭敏性について議論する。

非線形力学系におけるパラメータ鋭敏性の問題は、カタストロフィー理論⁹⁾と呼ばれる曲面写像の特異点に関する数学理論に帰着する。なお、これと本質的に同じ内容のものが、構造物の弾性安定問題の一理論^{10),11)}としてカタストロフィー理論とほぼ同時期に研究されている。そこでは、座屈荷重の初期不整鋭敏性が座屈形態により分類され、全ポテンシャルエネルギーを汎関数とした変分原理に基づく統一的理論が展開されている。以下では、加振力をパラメータとした定常応答の鋭敏性について検討する際に、静的座屈を対象とした弾性安定理論を振動問題に拡張する。そのために、Lagrangian の時間平均を汎関数とした変分問題に基づいて議論を進める。

まず、図-2 における加振力 $\varepsilon \sin \omega t$ に対する定常応答のたわみ振動を次式により近似する。

$$u(x, t) = \delta \sin \xi x \cdot \sin(\omega t + \phi), \quad \xi = \pi/l \quad (2)$$

ここで、 δ はたわみ振幅、 ϕ は位相角である。なお、外力 $\varepsilon \sin \omega t$ に対応する応答であることを考慮すると、定常解における位相は $\phi = 0, \pi$ の何れかの値をとることとなる。また、ここで対象としている問題は非線形性を有するので、定常応答は本来加振周波数の整数倍の振動数成分を含む¹²⁾。よって、応答解は周期 $T = 2\pi/\omega$ に関する Fourier 級数で表現可能である。式(2)はその初項による近似と見なすことができる。

この系の Lagrangian について、振動一周期分を積分したものの時間平均 \hat{L} は次式で与えられる。

$$\hat{L}(\delta) = \hat{U}_\delta + \hat{U}_k + \hat{U}_N - \hat{T}_\delta + \hat{W}_\varepsilon \quad (3)$$

ここで、 \hat{U}_δ はレールの曲げ変形に関するひずみエネルギーの時間平均、 \hat{U}_k は回転バネに関するひずみエネルギーの時間平均、 \hat{U}_N は軸力 N (圧縮を正) の作用下でレールたわみによる軸ひずみが寄与するエネルギー変動量の時間平均、 \hat{T}_δ は運動エネルギーの時間平均、 \hat{W}_ε は加振力によるポテンシャルエネルギー寄与の時間平均である。以下に各項の具体式を示す。

まず、 \hat{U}_δ は次式で与えられる。

$$\hat{U}_\delta = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^l \frac{EI}{2} (u'')^2 dx dt = \frac{EI l \xi^4}{8} \delta^2 \quad (4)$$

ここで、 EI は曲げ剛性、 $u'' = \partial^2 u / \partial x^2$ である。

また、 \hat{U}_k は次式より求められる。

$$\hat{U}_k = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\int_0^{\theta_0} M_0 d\theta + \int_0^{\theta_l} M_l d\theta \right) dt \quad (5)$$

ここで、 $M_0 = M(0)$ 、 $\theta_0 = \theta(0)$ 、 $M_l = M(l)$ 、 $\theta_l = \theta(l)$ である。

式(1)より、回転バネにたくわえられるひずみエネルギーは次式で与えられる。

$$\int_0^\theta M d\theta = \int_0^\theta (k_0 \theta - a \theta^3) d\theta = \frac{k_0}{2} \theta^2 - \frac{a}{4} \theta^4 \quad (6)$$

よって、 $x = 0$ において次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{\theta_0} M d\theta dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{k_0}{2} u'^2 - \frac{a}{4} u'^4 \right) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{k_0}{2} \xi^2 \delta^2 \sin^2(\omega t + \phi) \right. \\ &\quad \left. - \frac{a}{4} \xi^4 \delta^4 \sin^4(\omega t + \phi) \right] dt \\ &= \frac{k_0 \xi^2}{4} \delta^2 - \frac{3a \xi^4}{32} \delta^4 \end{aligned} \quad (7)$$

$x = l$ での値についても同様に計算し、 \hat{U}_k が次式により与えられる。

$$\hat{U}_k = \frac{k_0 \xi^2}{2} \delta^2 - \frac{3a \xi^4}{16} \delta^4 \quad (8)$$

次に \hat{U}_N を求める。当該量は次式より求められる。

$$\hat{U}_N = -\frac{1}{T} \int_0^T \int_0^l \int_A \sigma \varepsilon dA dx dt \quad (9)$$

ここで、 $\sigma = N/A$ はレールの軸応力 (圧縮を正)、 ε はたわみ振動により発生する伸びひずみ、 A はレール断面積である。式(2)より、たわみ u の下での 1 スパン当りのレール図心軸長さ l' は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} l' &= \int_0^l \left(1 + \frac{1}{2} u'^2 \right) dx \\ &= l + \frac{1}{2} \xi^2 \delta^2 \int_0^l \cos^2 \xi x dx \cdot \sin^2(\omega t + \phi) \\ &= l + \frac{l \xi^2}{4} \delta^2 \sin^2(\omega t + \phi) = l(1 + \varepsilon) \end{aligned} \quad (10)$$

式(10)よりひずみ ε を求め、式(9)に代入して計算すると次式を得る。

$$\hat{U}_N = -\frac{N l \xi^2}{8} \delta^2 \quad (11)$$

続いて、 \hat{T}_δ を求めると次式を得る。

$$\begin{aligned} \hat{T}_\delta &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^l \frac{\rho A}{2} \dot{u}^2 dt dx \\ &= \frac{\rho A}{2T} \int_0^T \int_0^l \omega^2 \delta^2 \sin^2 \xi x \cos^2 \omega t dt dx \\ &= \frac{\rho A l}{8} \omega^2 \delta^2 \end{aligned} \quad (12)$$

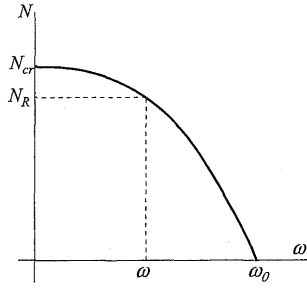


図-4 共振周波数と軸力との関係

ここで、 ρ はレールの質量密度、 $(\cdot) = \partial/\partial t$ である。

最後に、加振力に関する量 \hat{W}_ε は次式で与えられる。

$$\hat{W}_\varepsilon = -\frac{1}{T} \int_0^T \delta \cdot \varepsilon \sin(\omega t + \phi) \sin \omega t dt = -\frac{1}{2} \varepsilon \delta \cos \phi \quad (13)$$

前述のとおり、位相角 ϕ は 0 か π の何れかの値をとるので、上式において $\cos \phi = \pm 1$ である。

式 (5), (8), (11), (12), (13) を (3) に代入して \hat{L} を得る。

$$\hat{L} = \left(\frac{EI l \xi^4}{8} + \frac{k_0 \xi^2}{2} - \frac{\rho A l \omega^2}{8} - \frac{N l \xi^2}{8} \right) \delta^2 - \frac{1}{2} \varepsilon \delta \cos \phi - \frac{3a \xi^4}{16} \delta^4 \quad (14)$$

式 (14) をさらに整理して次式を得る。

$$\begin{aligned} \hat{L} &= \frac{l \xi^2}{8} (N_R - N) \delta^2 - \frac{1}{2} \varepsilon \delta \cos \phi - \frac{3a \xi^4}{16} \delta^4, \\ N_R &:= \rho A \xi^2 (\omega_0^2 - \omega^2), \\ \rho A \xi^2 \omega_0^2 &:= EI \xi^2 + \frac{4k_0}{l} = N_{cr} \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、 N_R は微小振幅下での共振周波数 ω に対応する軸力、 ω_0 は $N = 0$ での共振周波数、 N_{cr} はまくらぎ位置を節とする当該変形モード下での静的座屈軸力であり、これらの関係を共振周波数-軸力関係と合わせて示すと図-4 のようになる¹⁾。なお、 $\omega = 0$ において N_R は静的座屈荷重 N_{cr} を与える。

(3) 定常振幅の導出

Hamilton の原理により、定常解における \hat{L} は停留条件 $\partial \hat{L} / \partial \delta = 0$ をみताす。すると式 (15) より次式を得る。

$$\begin{aligned} \varepsilon \cos \phi &= \frac{l \xi^2}{2} (N_R - N) \delta - \frac{3a \xi^4}{2} \delta^3 \\ &= \frac{l}{2} [\rho A (\omega_0^2 - \omega^2) - \xi^2 N] \delta - \frac{3a \xi^4}{2} \delta^3 \end{aligned} \quad (16)$$

上式より、ある加振力 ε と軸力 N の下での、振動数 ω とレールのたわみ振幅 δ との関係を求めると図-5 のようになる。図において破線は $\varepsilon = 0$ に対する固有モード曲線である。有限な加振力を加えた場合、共振周波

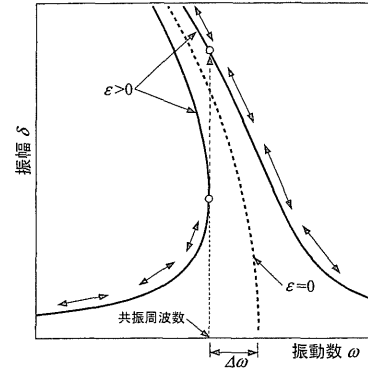


図-5 振動数と定常振幅との関係

数が $\Delta \omega$ だけ低下することがわかる。また、共振周波数前後で振幅が不連続になっており、レール振動においても跳躍現象が発生し得ることが確認できる。なお、図-5 は $a > 0$ (軟化型) の場合を示したものである。硬化型の場合、破線は右に傾いた曲線となり、共振周波数のずれ $\Delta \omega$ は高周波数側に移動する。

(4) 共振状態の加振力鋭敏性

次に共振状態を求める。定常解の条件 $\partial \hat{L} / \partial \delta = 0$ を ω と δ との関係式と見なすと、他のパラメータ一定の下、 $\omega + \Delta \omega$ 、 $\delta + \Delta \delta$ における定常解は次式より決まる。

$$\Delta \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \delta} \right) = \frac{\partial^2 \hat{L}}{\partial \delta^2} \Delta \delta + \frac{\partial^2 \hat{L}}{\partial \delta \partial \omega} \Delta \omega = 0 \quad (17)$$

この式より次式を得る。

$$\frac{\partial^2 \hat{L}}{\partial \delta^2} + \frac{\partial^2 \hat{L}}{\partial \delta \partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \delta} = 0 \quad (18)$$

図-5 に示したように、共振状態を $\partial \omega / \partial \delta = 0$ ($\partial \delta / \partial \omega = \infty$) と定義すると、式 (18) より次式を得る。

$$\frac{\partial^2 \hat{L}}{\partial \delta^2} = 0 \quad (19)$$

なお図-5 のように、非線形系では無減衰でも共振時の振幅は有限値を与える。

式 (19) より、次の条件式を得る。

$$N_R - N = \frac{9a \xi^2}{l} \delta^2 \quad (20)$$

式 (20) を (16) に代入すると、共振時の加振力振幅 ε とたわみ振幅 δ との関係が次式により得られる。

$$\varepsilon \cos \phi = 3a \xi^4 \delta^3 \quad (21)$$

ここで、 ε, δ はそれぞれ加振力とレールたわみの振幅であるので、何れも正の値をとる。よって、 $a > 0$ の場合 $\cos \phi = 1$ であり、 $a < 0$ の場合 $\cos \phi = -1$ となる。

式 (21) を δ について解くと次式を得る。

$$\delta = \left(\frac{\cos \phi}{3a \xi^4} \varepsilon \right)^{1/3} \quad (22)$$

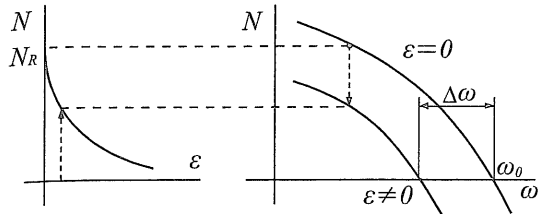


図-6 加振力振幅と軸力との関係 (左) および
共振周波数と軸力との関係 (右) ($a > 0$)

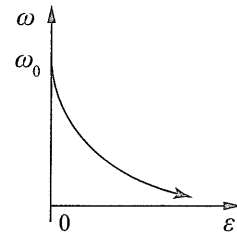


図-7 加振力振幅と共振周波数との関係 ($a > 0$)

式 (22) を (20) に代入すると、次の加振力 ε と軸力 N および共振周波数 ω との関係を得る。

$$\begin{aligned} N &= N_R - \frac{9a}{l} \left(\frac{\cos \phi}{3a\xi} \varepsilon \right)^{2/3} \\ &= \frac{\rho A}{\xi^2} (\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{9a}{l} \left(\frac{\cos \phi}{3a\xi} \varepsilon \right)^{2/3} \end{aligned} \quad (23)$$

式 (23) 第 1 式、第 2 式それぞれの第 2 項目に加振力 ε と軌道の非線形特性を与える定数 a の影響が含まれている。式 (23) の第 1 式より、加振力振幅 ε が有限値で与えられている軟化型非線形系の場合 ($a > 0$)、ある共振周波数 ω に対応する軸力は N_R より低い値をとることがわかる (図-6 左)。なお、硬化型の場合 ($a < 0$)、軸力は逆に増加する。また、式 (23) の第 2 式より、 $\varepsilon = 0$ においては線形モデルと同一の共振周波数-軸力関係が得られるが、有限な加振力振幅 ε が存在することによって、当該関係を与える曲線は下方 (低周波数側) へと平行移動する (図-6 右)。

ここで、 $N = 0$ における共振周波数の変化量 $\omega_0 - \omega = \Delta\omega$ について、 $\omega_0^2 - \omega^2 \simeq 2\omega_0\Delta\omega$ と近似し、これを式 (23) に代入すると次の関係を得る。

$$\Delta\omega = B\varepsilon^{2/3} \quad (24)$$

ここで、 B は定数である。式 (24) より、共振周波数 ω と加振力振幅 ε との関係は、 $a > 0$ の場合図-7 のようになり、共振周波数は加振力振幅の増加と共に急減少する。

式 (23), (24) より、軸力と共振周波数は加振力 ε の $2/3$ 乗に比例して変化することがわかった。このことより、比較的小きな加振力下でも大きな変動を生じ、共振周波数-軸力関係が加振力に対して鋭敏であることがわかる。

また、式 (23) で $\omega=0$ とすると、静的座屈荷重の初期不整鋭敏性の関係が得られ、本定式化が座屈問題を包含したものであることが確認できる。なお、ここでの初期不整とは、はりに作用する横荷重のことである。

3. 軌道の時間域加振応答解析

2. の理論的検討では、各スパンを交互に位相反転させて加振するという問題設定とした。一方、実際の加

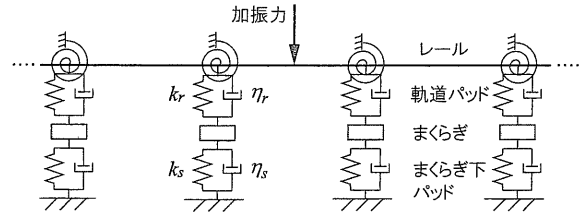


図-8 軌道モデル

振測定では、インパルスハンマによる何れか 1 スパンへの荷重印加が一般に用いられるものと想定される¹³⁾。そこで、そのような加振条件に対する応答においても上での議論が成立することを確認し、その妥当性を検証する目的で、現実の軌道加振試験を模擬した数値モデルによる解析を行う。

ここで用いた軌道モデルを図-8 に示す。レールはせん断たわみの影響を考慮するために Timoshenko ばり要素で離散化し、まくらぎは質点で与える。軌道パッド、まくらぎ下パッドは Voigt ユニットで与える。回転バネは、本来まくらぎ回転に対して作用する様に設定すべきであるが、ここではそれを簡略化し、レールに直結させそのたわみ角について作用するモデルとした。なお、本来バラスト道床を最下層に設定すべきであるが、そのために付加的な質点やバネ等の導入が必要となる。しかし、本解析では道床等に関する回転剛性がレール振動に及ぼす影響の評価が目的であり、さらに 1000Hz 程度の高周波数域ではレールはまくらぎ以下の下部構造とほぼ独立して振動するため、ここでは道床の鉛直振動は考慮していない。レールたわみを u 、まくらぎ変位を u_s とする。また、軌道パッド接触力を F_r 、まくらぎ下パッド接触力を F_s とし、いずれも圧縮を正にとる。解析では、 u の節点値 (たわみ、たわみ角、断面回転角)、各まくらぎの変位 u_s 、パッド類の作用力 F_r 、 F_s を未知量として方程式を構成する。なお、まくらぎの回転慣性の影響は、試算の結果無視し得ることがわかったので、ここでは考慮していない。

レールおよびまくらぎに関する運動方程式はそれぞれ式 (25), (26) で与えられる。

$$[K]\{u\} - [M]\{\ddot{u}\} = -\{F_r\} + \{F\} \quad (25)$$

$$m_s \ddot{u}_s - F_r + F_s = 0 \quad (26)$$

ここで、 $[K]$ は軸力作用下のレールをはり要素により離散化して得られる剛性行列に回転バネを組込んだもの、 $[M]$ は質量行列、 $\{F\}$ は加振力、 $\{F_r\}$ はレールに作用するパッド反力、 m_s はまくらぎ質量である。

軌道パッド、まくらぎ下パッドの作用力に関する式は、それぞれ式 (27)、(28) で与えられる。

$$F_r = k_r(u - u_s) + \eta_r(\dot{u} - \dot{u}_s) \quad (27)$$

$$F_s = k_s u_s + \eta_s \dot{u}_s \quad (28)$$

ここで、 k_r 、 η_r は軌道パッドのバネ定数および減衰定数、 k_s 、 η_s はまくらぎ下パッドのバネ定数および減衰定数である。

解析対象となる軌道系は非線形性を有するため、時間域で解く。式 (25)~(28) は未知量の速度と加速度項を含む。これらの評価に Newmark 法 (台形公式) による次式の時間積分スキームを用いる。

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= u^n + \Delta t \dot{u}^n + \frac{\Delta t^2}{4} (\ddot{u}^n + \ddot{u}^{n+1}), \\ \dot{u}^{n+1} &= \dot{u}^n + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{u}^n + \ddot{u}^{n+1}) \end{aligned} \quad (29)$$

ここで、 Δt は時間増分、 u^n は n ステップ目の変位である。式 (25)~(28) に (29) の関係式を適用し、次の各式を得る。

・レールの運動方程式

$$\begin{aligned} [K + \frac{4}{\Delta t^2} M] \{u^{n+1}\} + \{F_r^{n+1}\} = \\ [M] \{ \frac{4}{\Delta t^2} u^n + \frac{4}{\Delta t} \dot{u}^n + \ddot{u}^n \} + \{F^{n+1}\} \end{aligned} \quad (30)$$

・まくらぎの運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{4}{\Delta t^2} m_s \{u_s^{n+1}\} - \{F_r^{n+1}\} + \{F_s^{n+1}\} = \\ m_s \{ \frac{4}{\Delta t^2} u_s^n + \frac{4}{\Delta t} \dot{u}_s^n + \ddot{u}_s^n \} \end{aligned} \quad (31)$$

・軌道パッドの作用力

$$\begin{aligned} (k_r + \frac{2}{\Delta t} \eta_r) \{u_s^{n+1} - u^{n+1}\} + \{F_r^{n+1}\} = \\ \eta_r \{ \frac{2}{\Delta t} (u_s^n - u^n) + (\dot{u}_s^n - \dot{u}^n) \} \end{aligned} \quad (32)$$

・まくらぎ下パッドの作用力

$$\begin{aligned} -(k_s + \frac{2}{\Delta t} \eta_s) \{u_s^{n+1}\} + \{F_s^{n+1}\} = \\ -\eta_s \{ \frac{2}{\Delta t} u_s^n + \dot{u}_s^n \} \end{aligned} \quad (33)$$

式 (31)~(33) を全てのレール支持点について記述し、式 (30) と連立して次の求解方程式を得る。

$$[A^{n+1}] \{X^{n+1}\} = \{b^{n+1}\} \quad (34)$$

表-1 レール・まくらぎの各種定数

レール密度 (kg/m ³)	$\rho = 7880$
レールヤング率 (GPa)	$E = 206$
レール断面積 (m ²)	$A = 64.05 \times 10^{-4}$
レール断面二次モーメント (m ⁴)	$I = 1960 \times 10^{-8}$
レールせん断係数	$K = 0.394$
まくらぎ質量 (レール 1 本分)(kg)	$m_s = 100$

表-2 各種バネ定数

軌道パッドバネ定数 (MN/m)	$k_r = 110$
軌道パッド減衰定数 (kN・s/m)	$\eta_r = 100$
まくらぎ下パッドバネ定数 (MN/m)	$k_s = 30$
まくらぎ下パッド減衰定数 (kN・s/m)	$\eta_s = 50$

ここで、 $\{X^{n+1}\}$ は $n+1$ ステップ目の未知量ベクトルであり、具体的には次式で与えられ、行列 $[A^{n+1}]$ ・右辺ベクトル $\{b^{n+1}\}$ はそれに対応する成分で構成される。

$$\{X^{n+1}\} = \{u^{n+1}, F_r^{n+1}, u_s^{n+1}, F_s^{n+1}\} \quad (35)$$

各時間ステップ毎に式 (34) を解くことで、時刻歴応答を得ることができる。なお、式 (34) は非線形方程式であるため、Newton-Raphson 法により解く。

4. 解析結果

(1) 解析条件

解析において、レールは 50kgN レールとし、まくらぎ間隔 0.6m の下、まくらぎ 40 区間を設定した。レール・まくらぎの各種定数およびパッド類のバネ定数を表-1、表-2 に示す。

また以下の解析では、レールに作用するモーメント M と回転角 θ との関係として軟化型を想定した。理論計算では式 (1) の簡易モデルを用いたが、ここでは実際の非弾性挙動を模擬した図-9 に示すような履歴曲線に改めた。なお図の骨格曲線は、道床抵抗力に用いられるものと同様の次式により与えた¹⁴⁾。

$$M = f_0 \frac{\theta}{|\theta| + \alpha} \quad (36)$$

終局抵抗モーメントおよび非線形性に関する定数 f_0 、 α は、文献2)のまくらぎ・道床間の回転バネと同等の剛性を与えるように、 $f_0 = 3(\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad})$ 、 $\alpha = 1 \times 10^{-6}(\text{rad})$ と設定した。時間ステップの刻み幅 Δt は $5 \times 10^{-5} \text{sec}$ とし、一定外力をスパン中央に $5 \times 10^{-4} \text{sec}$ に亘って作用させるインパルス加振を対象とした。

(2) 加振力が共振周波数-軸力関係に及ぼす影響

加振力 1kN を作用させた場合の軸力と、加振後 0.025sec 前後における共振周波数との関係を、加振力

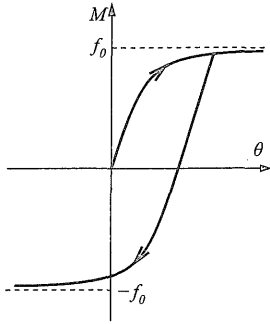


図-9 レール支持部の回転剛性 (解析時)

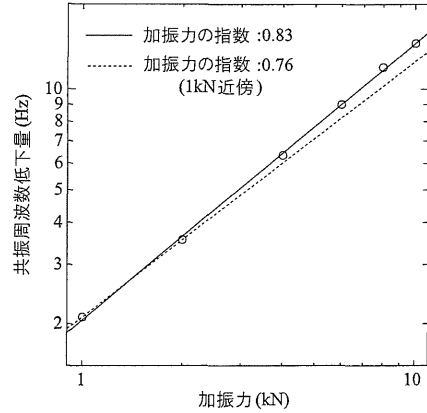


図-11 加振力と共振周波数の低下量との関係

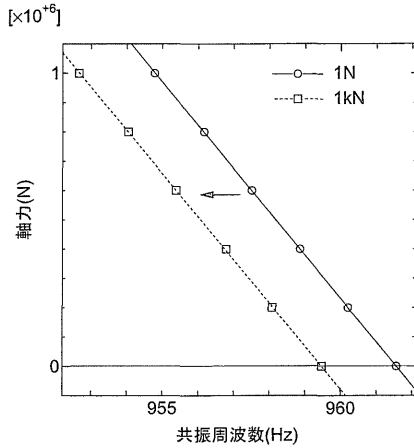


図-10 共振周波数と軸力との関係

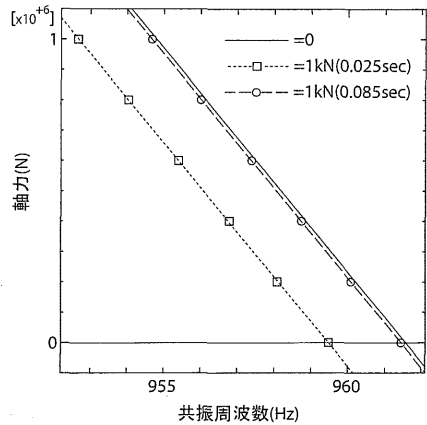


図-12 時間経過による共振周波数と軸力との関係の変化

1Nでの結果と合わせて図-10に示す。微小な加振力1Nを作用させた場合と比較すると、1kN加振において軸力と共振周波数との関係は全体的に低周波数側へと移動している。また、加振力の大きさが1N、1kNのどちらの場合も軸力の測定感度は50kN当り0.34Hz程度となり、加振力を大きくしても測定感度の変化はほとんど認められなかった。よって、加振力の増加と共に共振周波数は低下するものの、それは測定感度には影響を及ぼさず、理論により示した加振力鋭敏性(式(23)、(24)および図-6、7)と整合する結果が得られた。

(3) 共振周波数低下量と加振力との関係

$N = 0$, $\varepsilon = 0$ における固有振動数 ω_0 からの共振周波数低下量 $\Delta\omega$ と加振力との関係を図-11に示す。図-11において共振周波数低下量を加振力のべき乗で表わしたときの指数(図の直線の傾き)は1kNから10kNの加振力の範囲において0.83となり、 $2/3$ よりも幾分大きめの値ではあるが、1kN近傍においては0.76と、加振力が小さくなるにつれて $2/3$ に近づいていく傾向にある。なお、時刻歴応答解析ではパッド類の減衰が存在しており、共振周波数は無減衰の場合と多少異なるものと考えられる。このことも考慮に入れると、共振周波数の加振力に対する鋭敏性は理論と概ね一致してい

るといえる。

また、加振力8kNにおける共振周波数の低下量が11.6Hzであったのに対し、加振力を2kN増加させた10kNの場合では13.7Hzとなり2Hz以上の差が生じていた。共振周波数2Hzの変動は軸力に換算すると300kN程度に相当する。軸力測定に際して50kN程度の測定精度が要求されるものとする、加振力の大きさが軸力・共振周波数関係に及ぼす影響は無視し得ないことがわかる。実際の測定は、インパルスハンマ等を用い人力でレールを叩いて行うこととなる。そのため、測定毎の加振力の大きさを一定値に揃えることは必ずしも容易でなく、実際に得られる共振周波数-軸力関係には加振力のバラツキの影響が混入し得るものと考えられる。

(4) 経過時間による軸力と共振周波数との関係の変化

次に、1kNの加振力の場合を対象に、時間経過に伴う共振周波数-軸力関係の変化を調べる。無限小振幅($\varepsilon = 0$)の場合における関係と合わせて図-12に示す。加振初期(0.025sec)における共振周波数と軸力との関係は、(2)に述べたとおり、 $\varepsilon = 0$ での関係よりも低周

波数側へ平行移動しているが、時間が経過し振幅が十分小さくなった 0.085sec においては、 $\varepsilon = 0$ における共振周波数と軸力との関係に近い結果を与えていることが分かる。このことより、実際の測定に当たっては、振動の減衰過程における振幅-共振周波数関係の推移の様子から、振動振幅がゼロへ移行した時の共振周波数を外挿し軸力を求める方法が、加振力の影響を除去する上で簡便かつ有効であると考えられる。

5. おわりに

軌道の非線形特性および加振力が、共振周波数-レール軸力関係に及ぼす影響について理論的に考察した。また、レール支持位置の回転剛性に非線形性を有する軌道モデルに基づいて加振応答解析を行った結果、共振周波数-軸力関係が加振力に対し鋭敏性を有し、理論と整合することが確認できた。

本論文では、軟化型の非線形モデルを対象に解析例を示したが、2. で述べた様な硬化型の非線形挙動が存在する問題は、式 (1) の非線形項の係数 a が負の場合に相当する。この時、加振によって共振周波数は増加するが、加振力 ε に対するその鋭敏性は、やはり $\varepsilon^{2/3}$ に比例したものとなる。

作用軸力の大きさが同じであっても、加振力の大きさによって共振周波数は異なるため、軸力測定に影響を及ぼすことが懸念される。ただし、加振から時間が経過し振動振幅が十分小さくなれば、軟化型・硬化型によらず非線形性の影響をほとんど受けずに軸力を精度良く測定できる。なお、振動振幅が十分小さくなった時の共振周波数は測定が困難であるため、実際の軸力測定においては、それを外挿して求める方法が現実的

であると考えられる。

本研究では、レール支持部の非線形性がレールの共振特性に影響し得ることを理論的に明らかにしたが、当該現象の重要度については、実軌道での検証が必要である。

参考文献

- 1) 清水紗希, 阿部和久, 相川明, 紅露一寛: 軸力を受けるレールの波動伝播解析, 計算数理工学論文集, **9**, 67-72, 2009.
- 2) 清水紗希, 阿部和久, 相川明, 紅露一寛: 3次元はり要素を用いた軸力を受ける軌道系の波動伝播解析, 鉄道力学論文集, **14**, 75-82, 2010.
- 3) 石川大地, 阿部和久, 紅露一寛: 軸力を受ける曲線レールの振動応答解析, 計算数理工学論文集, **10**, 57-62, 2010.
- 4) Abe, K., Shimizu, S., Aikawa, A. and Koro, K.: Theoretical study on a measuring method of rail axial stress via vibration modes of periodic track, Proc. of WCRR, 2011.
- 5) 阿部和久, 古屋卓稔, 紅露一寛: まくらぎ支持された無限長レールの波動伝播解析, 応用力学論文集, **10**, 1029-1036, 2007.
- 6) 紅露一寛, 阿部和久, 西宮裕騎: 軌道防振用ゴムパッドの大変形応力解析, 鉄道力学論文集, **9**, 7-12, 2005.
- 7) 阿部和久, Syakir, M., 紅露一寛: 二次元粒状体モデルによるバラスト道床の沈下解析, 鉄道力学論文集, **10**, 49-54, 2006.
- 8) 國枝正春: 実用機械振動学, 理工学社, 1984.
- 9) 野口 広, 福田拓生: 初等カタストロフイー, 共立全書, 1976.
- 10) Thompson, J.M.T. and Hunt, G.W.: A general theory of elastic stability, John Wiley & Sons Ltd., 1973.
- 11) Thompson, J.M.T. and Hunt, G.W.: Elastic stability phenomena, John Wiley & Sons Ltd., 1984.
- 12) 坪井忠二: 振動論, 現代工学社, 1943.
- 13) 相川 明, 阿部和久, 清水紗希, 坂井宏隆: 固有振動数変化を利用したレール軸力測定方法の基礎検討, 鉄道総研報告, **26**(8), 35-40, 2012.
- 14) 宮井 徹: エネルギー法による軌道座屈の数値解析, 鉄道技術研究報告, No.1271, 1984.7.

(2013年4月12日受付)

INFLUENCE OF MECHANICAL NONLINEARITY IN RAILWAY TRACK ON RESONANT FREQUENCY-RAIL AXIAL LOAD RELATIONSHIP

Tomohiro AKUTSU, Kazuhisa ABE and Kazuhiro KORO

The influence of mechanical nonlinearity in rail supports on the resonant frequency-rail axial load relationship is investigated. To achieve this, a harmonic load exciting the pinned-pinned resonance mode is considered, and a functional which derives a steady-state solution is formulated by time average of the Lagrangian. In the theoretical study, the nonlinearity is introduced in the rotational stiffness at each sleeper support. Based on the variations of the functional, the sensitivity of the above relationship to the load amplitude is revealed. Furthermore, through numerical analyses, validity of the theory is proved.