

Theoretical Analysis of Static Indentation Test in Biological Materials

正 坂本 信 (新潟工短大)
正 原 利昭 (新潟大)

○正 朱 謙馥 (新潟工短大)

Makoto SAKAMOTO, Niigata College of Technology, 5-13-7, Kamishin'ei-cho, Niigata
Qian-Fu ZHU, Niigata College of Technology
Toshiaki HARA, Niigata University

Key Words: Biomechanics, Elasticity, Contact Problem, Mechanical Testing

1. 緒言

近年、軟骨、軟骨下骨、仮骨、椎間板等に代表される生体組織の力学的性質を調べるために、組織よりも十分に硬い Indenter (圧子) を直接組織表面に押し付ける Indentation Test (押し込み試験法) が広く利用されている^{(1)~(3)}。この Indentation test の特徴は、組織表面の剛性分布等を知ることが可能な点や対象とする組織周辺の状態を温存したまま計測ができる、すなわち "in situ" で計測可能な点であり、組織の弾性限度内で測定を行えば非破壊的な試験方法となる。

Hayes ら⁽⁴⁾は、関節軟骨の Indentation test を想定して、剛体とみなす軟骨下骨上に密着して存在する弾性軟骨層表面を円柱および球状の剛体 Indenter で押し込む接触問題を論じている。彼らは、問題により生ずる双積分方程式をフレドホルム型積分方程式に変換する手法を用いて解析し、ポアソン比が 0.3~0.5 までの数値結果を示している。本研究では、より一般的な Indentation test を考慮して、剛体基礎上に密着して、あるいは滑らかに置かれた弾性組織層上面を円柱および球状剛体 Indenter で押し込む軸対称弾性接触問題を厳密に理論解析した。解析では、接触面の垂直応力を級数表示して、問題を簡潔な無限連立一次方程式の解法問題に帰着させた。そして、数値計算結果から Indentation test の基礎データを詳細に提供するとともに、組織層の厚さ、組織下面の境界条件が接触応力場に及ぼす影響を明らかにして、種々の試験条件について検討を行った。

2. 応力解析

図 1 に示すように円柱座標 (r, θ, z) を用い、厚さ h の等方性弾性層上面を半径 a の円柱状剛体 Indenter および半径 R の球状剛体 Indenter で微小量 ϵ_0 だけ押し込む軸対称接触問題を考える。このとき弾性層上面は Indenter と滑らかに接触するものとする。一方、弾性層下面は剛体基礎と密着する場合 (bonded) と滑らかに接触する場合 (unbonded) とを考えれば、境界条件は以下ようになる。

$$(w_z)_{z=h} = \begin{cases} -\epsilon_0; & (\text{cylindrical}) \\ -\epsilon_0 + r^2/2R; & (\text{spherical}) \end{cases}, \quad (0 \leq r \leq a) \quad (1a)$$

$$(\sigma_z)_{z=h} = 0, \quad (a < r < \infty) \quad (1b)$$

$$(\tau_{rz})_{z=h} = 0, \quad (0 \leq r < \infty) \quad (1c)$$

$$(w_z)_{z=0} = 0, \quad (0 \leq r < \infty) \quad (1d)$$

$$(u_r)_{z=0} = 0; \quad (\text{bonded}), \quad (\tau_{rz})_{z=0} = 0; \quad (\text{unbonded}), \quad (0 \leq r < \infty) \quad (1e)$$

all stress components vanish at infinity. (1f)

ここで、 u_r, w_z は変位成分、 σ_r, τ_{rz} は応力成分をそれぞれ示す。

本研究では、三次元線形弾性論に基づいて解析を行う。2 組の Boussinesq の調和応力関数を用いて、上記の境界条件を適用させれば、問題は双積分方程式を解く問題になる。従来の多くの研究では、この双積分方程式をフレドホルム型積分方程式に変換する方法⁽⁴⁾が用いられているが、ここでは、接触面の応力 $(\sigma_z)_{z=h}$ を未知係数と Tchebycheff 多項式を含む無限級数で表示して、Hankel 逆変換と Gegenbauer の加法定理を適用させることによって、本問題は以下で示す無限連立一次方程式の解法問題に帰着することができる⁽⁵⁾。

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n, b_n) J_{mn} = (\delta_{0m}, \delta_{0m} - \delta_{1m}/2), \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \\ [b_n = 0; \quad (\text{cylindrical indenter})] \quad (2)$$

ここで、

$$J_{mn} = \int_0^{\infty} g(\lambda) J_m^2(\lambda a/2) J_{n+1/2}(\lambda a/2) J_{-n-1/2}(\lambda a/2) d\lambda \quad (3)$$

$$g(\lambda) = \{\lambda h - (3-4\nu) \sinh \lambda h \cdot \cosh \lambda h\} / \{(1-2\nu)^2 \sinh^2 \lambda h - 4(1-\nu)^2 \cosh^2 \lambda h - \lambda^2 h^2\}; \quad (\text{bonded}) \quad (4)$$

$$g(\lambda) = \sinh^2 \lambda h / (\lambda h + \sinh \lambda h \cdot \cosh \lambda h); \quad (\text{unbonded}) \quad (5)$$

であり、 δ_{0m} は Kronecker のデルタ、 $J_m(x)$ は m 次の第 1 種 Bessel 関数および a_n, b_n は求める未知係数である。

接触面の垂直応力 $(\sigma_z)_{z=h}$ および Indenter を ϵ_0 だけ押し込む垂直荷重 P は、それぞれ次式のように数学的に閉じた形で表現できる。

$$(\sigma_z)_{z=h} = -\frac{2G\epsilon_0}{(1-\nu)\pi\sqrt{(a^2-r^2)^{3/2}}} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - \epsilon b_n) T_{2n+1}(r/a), \quad (0 \leq r < a) \quad (6)$$

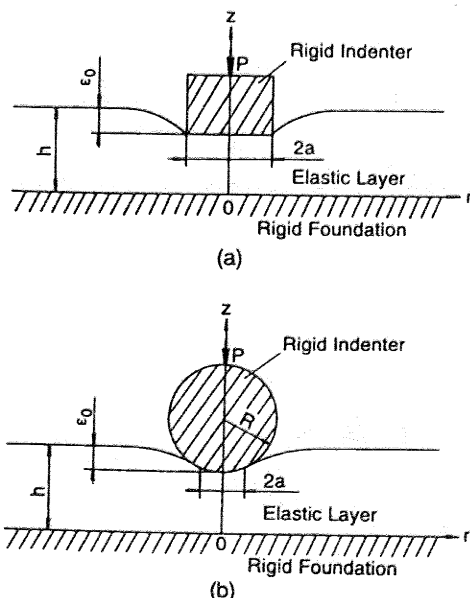


Fig. 1 (a) Geometry for the flat-ended cylindrical indenter, (b) Geometry for the spherical indenter.

$$P = \frac{4G\epsilon_0}{1-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (a_n - \xi b_n) / (2n+1) \dots (7)$$

ここで、

$$\xi = \frac{a^2}{4R\epsilon_0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n / \sum_{n=0}^{\infty} b_n \dots (8)$$

であり、 $T_n(x)$ はTchebycheff多項式、 G, ν はそれぞれ弾性層の横弾性係数およびポアソン比である。

3. 数値結果および考察

図2に無次元化した押し付け荷重 $\bar{P} = (1-\nu)P/4Ga\epsilon_0$ とアスペクト比 h/a との関係を示す。図中の水平の線は、層の厚さが無限大、すなわち半無限弾性体の結果である。層下面が剛体基礎と滑らかに接触する場合は、 \bar{P} はポアソン比 ν には依存しない。よって、組織層の横弾性係数とポアソン比を分離して求めることは不可能である。一方、層下面と基礎が密着する場合には、層の厚さ h が増加するとともに、 \bar{P} の傾きは緩やかになり、ポアソン比の影響も顕著でなくなることがわかる。また、球状Indenterを用いた場合には、接触領域円半径 a は垂直荷重 P に依存するため、直接、図2を利用して組織層の弾性係数等を求めることはできない。図3に球状Indenterにおける $a^2/4R\epsilon_0$ と h/a との関係について示した。

図4および図5は、それぞれ円柱および球状Indenter接触面の無次元化した垂直応力 $(\bar{\sigma}_z)_{z=h} = a(1-\nu)(\sigma_z)_{z=h}/G\epsilon_0$ の半径方向分布図である。円柱状Indenterでは、Indenterの端部($r/a=1$)で応力は特異性を有し、層の厚さが薄いほど端部での応力場は強くなり、層の破壊を招く可能性が大きい。

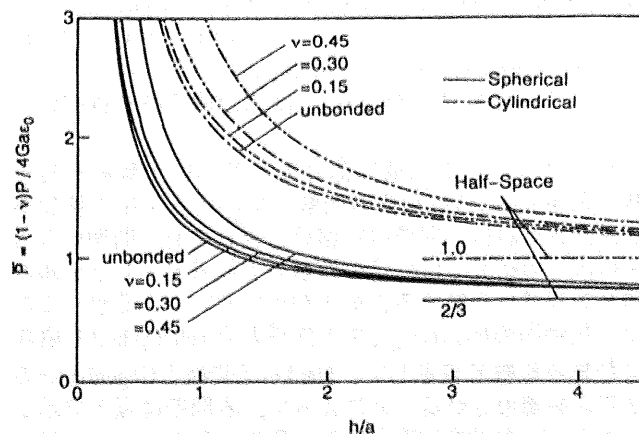


Fig. 2 Variation of the dimensionless axial load \bar{P} with the aspect ratio h/a .

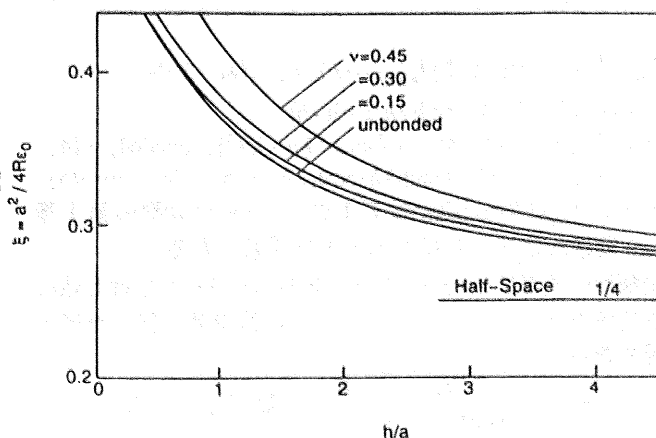


Fig. 3 Variation of the ratio ξ with the aspect ratio h/a .

また、ここには示していないが、層と基礎の界面が密着していない場合には、層の厚さが極端に薄くなると層下面が基礎から浮き上がる現象が推測された。

以上のようなことから、Indentation testにより組織層の弾性係数およびポアソン比を求める場合には、層下面と基礎が密着していなければならず、アスペクト比 h/a がおおよそ $0.5 \leq h/a \leq 2$ 程度となる径のIndenterを用いるのが望ましいと考えられる。特に、円柱状Indenterで組織を押し込む際には、偏心荷重が作用しやすく、微小な偏心荷重によって層に生ずる応力場は軸荷重のみの場合とは大きく異なる⁽⁶⁾。したがって、試験片の測定部表面とIndenterのアライメント調整には細心の注意が必要と思われる。

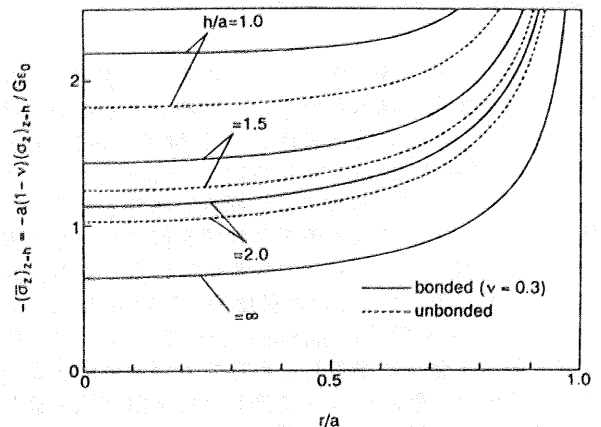


Fig. 4 Radial distribution of dimensionless normal contact stress $(\bar{\sigma}_z)_{z=h}$ of the cylindrical indenter.

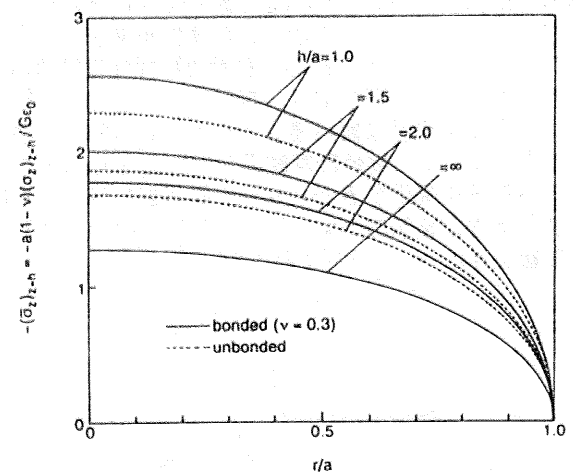


Fig. 5 Radial distribution of dimensionless normal contact stress $(\bar{\sigma}_z)_{z=h}$ of the spherical indenter.

本研究に対して有益な御助言を頂いたJohns Hopkins 大学医学部、Prof. Edmund Y. S. ChaoならびにDr. Guoan Liに謝意を表す。

文献

- (1) Jurvelin, J. et al., *J. Biomech.*, **23**(1990), 1239.
- (2) 梅原・ほか5名, 日本臨床バイオメカニクス学会誌, **15**(1994), 117.
- (3) Li, G., Sakamoto, M. et al., *Proc. 4th Conference of the International Society for Fracture Repair* (1994), 77.
- (4) Hayes, W. C. et al., *J. Biomech.*, **5**(1972), 541.
- (5) Sakamoto, M. et al., *JSME Int. J. Ser. I*, **34**(1991), 130.
- (6) 坂本・ほか3名, 機論57-544, A(1991), 3016.