

学 * 加藤 康 憲 (新潟大工) 学 張 祥 永 (新潟大工)
 正 高 野 英 資 (新潟大工) 正 原 利 昭 (新潟大工)
 正 宮 島 雅 博 (新潟大工)

1. 緒 言

機械駆動系における自由自励系の摩擦による振動については、理論的にも実験的にもかなりの検討がなされている。⁽¹⁾ しながら運動摩擦力速度特性曲線が性質の異なる2つの部分から成立つため、すべりと付着の両運動を交互に繰返す場合には、解のつなぎ合わせの方法により、定常振動解を求めねばならず、理論的にかなりやっかいな問題を含んでいる。本報告では運動摩擦力速度特性が移動面速度の3次関数などで与えられる場合について、平均法による解を求め、断片線形近似法による解と比較し、さらに付着運動を考慮していない平均法から得られる振幅曲線から、付着運動のある場合の解を求める簡便法を試みたので、その結果を報告する。

2. 運動摩擦力速度特性曲線と運動方程式

図1は運動系のモデル図で、一定速度 v_0 で走行するベルト上の物体は次式(1)による運動を行う。ここで m は物体の質量、 K はばね定数、 f は粘性減衰係数、 $\varphi(\xi-v_0)$ は物体と移動面の間に働く運動摩擦力(図2参照)、 ξ は物体の変位を示す。また運動摩擦力は次の[A]形または[B]形の式で与えられるものとする。

運動方程式: $m\ddot{\xi} + f\dot{\xi} + \varphi(\xi-v_0) + K\xi = 0$ (1)

摩擦特性: [A]形 $\varphi(\xi) = \varphi_0 \xi/|\xi| + A_1 \xi(1-\xi^2/3V)$ (2)

[B]形 $\varphi(\xi) = a\xi + b\xi/|\xi| + d/(\xi + C\xi/|\xi|)$ (3)

ここで φ_0 は $\xi \rightarrow 0$ のときの運動摩擦力で V はその最小値、 a, b, C, d は定数で φ_0, φ_m, V などで与えられる。図2の φ_0 は最大静止摩擦力である。 $\tau = t\sqrt{K/m}$ とおき、さらに $\eta = \xi\sqrt{K/m}/V$ による変換を行うと(4)式が得られる。これは(5)式と等価である。式中 $\eta' = d\eta/d\tau, \eta'' = d^2\eta/d\tau^2$ であり、 $Y_0 = \sqrt{m/K}V, Y = \sqrt{m/K}\xi, F(\eta - Y_0/Y) = \varphi(\xi-v_0)/\sqrt{K/m}V, H = f/2\sqrt{K/m}$ を示す。

$\eta'' + 2H\eta' + F(\eta - Y_0/Y) + \eta = 0$ (4)

$\eta' = \eta', \xi' = -\eta - 2H\xi - F(\xi - Y_0/Y)$ (5)

3. 平均方程式とその解

(5)式の解を τ の未知関数 $\alpha(\tau), R(\tau), \varepsilon(\tau)$ を用い次式(6)のようにおき、さらに $\theta(\tau) = \tau + \varepsilon(\tau)$ において(5)式に代入すると(7)~(10)が得られる。

$\eta(\tau) = \alpha(\tau) + R(\tau)\sin\{\tau + \varepsilon(\tau)\}, \xi(\tau) = R(\tau)\cos\{\tau + \varepsilon(\tau)\}$ (6)

$\alpha' + R'\sin\theta + R\varepsilon'\cos\theta = 0$ (7)

$R'\cos\theta - R\varepsilon'\sin\theta = -a - 2HR\cos\theta - F(R\cos\theta - Y_0/Y)$ (8)

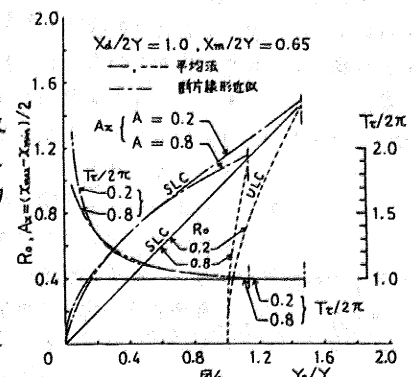
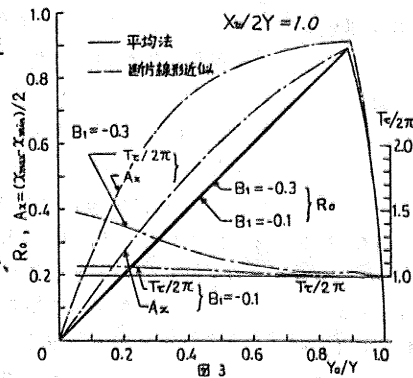
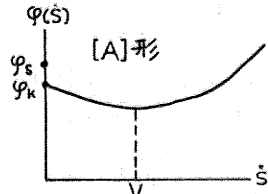
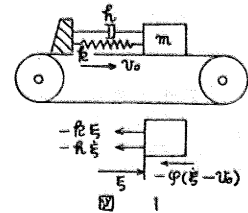
$\alpha'\sin\theta + R' = -a\cos\theta - 2HR\cos^2\theta - F(R\cos\theta - Y_0/Y)\cos\theta$ (9)

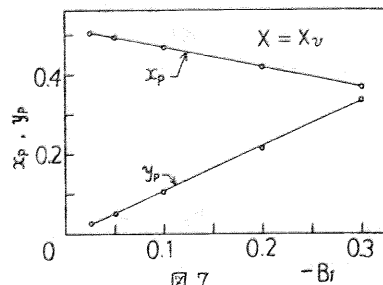
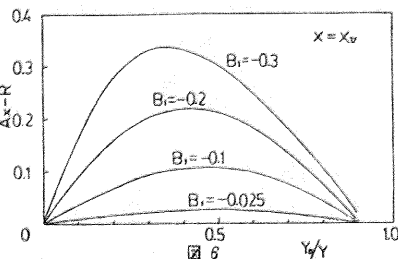
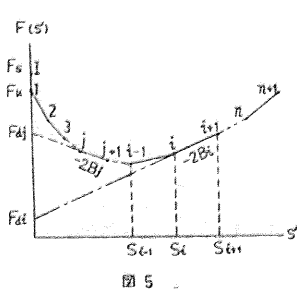
$\alpha'\cos\theta + R\varepsilon' = a\sin\theta + 2HR\sin\theta\cos\theta + F(R\cos\theta - Y_0/Y)\sin\theta$ (10)

(7)~(10)において $\alpha, R, \varepsilon, \alpha', \varepsilon'$ が τ のゆるやかに変化する未知関数とすると、 τ について 2π の任意の区間ではほぼ一定であると考えることができる。したがって(7)~(10)の両辺を θ から $\theta + 2\pi$ まで積分すると、平均方程式が得られ、 $H=0$ のとき[A]形摩擦特性の場合の R の式を示すと

$R' = \begin{cases} -B_1 R \{1 - (Y_0/Y)^2 - R^2/4\} & (0 \leq R \leq Y_0/Y) \\ -B_1 R \{1 - (Y_0/Y)^2 - R^2/4 + (X_0/Y)(1/\mu B_1)\sqrt{R^2 - (Y_0/Y)^2}/R\} & (R > Y_0/Y) \end{cases}$ (11)

ここで $B_1 = A_1/2\sqrt{K/m}, X_0 = 2\varphi_0/K$ である。(11)式から平均方程式の第1近似解 $\eta = \alpha_0 + R_0 \sin(\tau + \varepsilon_0)$ を求めると次式(12)が得られる。





$$\left. \begin{aligned} R_0 &= 0 & (\gamma_0/\gamma \text{ は任意}) \\ R_0^2 &= 4\{1 - (\gamma_0/\gamma)^2\} & (4/5 \leq (\gamma_0/\gamma)^2 < 1) \\ R_0^2 &= \{1 - (\gamma_0/\gamma)^2 - R_0^2/4\} + (X_0/\gamma)(1/\alpha B_1) \\ &\quad \times \sqrt{R_0^2 - (\gamma_0/\gamma)^2} = 0 & (0 < (\gamma_0/\gamma)^2 < 4/5) \end{aligned} \right\} (12)$$

同様に[B]形摩擦特性における第1近似解は、紙面の関係で $0 \leq R \leq \gamma_0/\gamma$ の場合のみを示すと(13)式となる。

$$-AR_0/2 - D/2 + D(\gamma_0/\gamma + C)/R_0 \sqrt{(\gamma_0/\gamma + C)^2 - R_0^2} = 0 \quad (13)$$

ここで $A = a/\sqrt{km}$, $B = b/\sqrt{km}V$, $C = c/V$, $D = d/\sqrt{km}V^2$ である。図3, 4に[A]形, [B]形摩擦特性における第1近似解の R_0 曲線を示す。

4. 断片線形近似法とその解

図2の特性曲線を変数変換して得られる $F(s)$ 曲線を図5のように n 本の折れ線で近似すると、断片線形微分方程式の解のつなぎ合わせから定常振動解をうることができる。 $\alpha = \gamma - F(-\gamma_0/\gamma)$ とおいて γ_0/γ が j 番目折れ線にあるときの i 番目折れ線に支配される区間の運動方程式ならびに $\alpha - \gamma$ 平面上の解曲線式を求めると、 $|B_1| < 1$ の場合、次の(14), (15)が得られる。

$$\alpha'' + 2B_1\alpha' + \alpha + U = 0 \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= -U + e^{-B_1\tau} (C_{11} \cos \sqrt{1-B_1^2}\tau + C_{12} \sin \sqrt{1-B_1^2}\tau) \\ \dot{\alpha} &= e^{-B_1\tau} (C_{21} \cos \sqrt{1-B_1^2}\tau + C_{22} \sin \sqrt{1-B_1^2}\tau) \end{aligned} \right\} (15)$$

ここで $U = F_{dj} - F_{d1} + 2(B_1 - B_2)\gamma_0/\gamma$, $C_{11} = \alpha_0 + U$, $C_{12} = \{\gamma_0 + B_1(\alpha_0 + U)\}/\sqrt{1-B_1^2}$, $C_{21} = \dot{\alpha}_0$, $C_{22} = -(\alpha_0 + U) + B_1 \dot{\alpha}_0/\sqrt{1-B_1^2}$ であり、 $H=0$ とした。 α_0 , $\dot{\alpha}_0$ は i 番目折れ線の速度境界を $\tau=0$ として出発する解曲線の初期位置を示す。図3, 4には断片線形近似法 ($n=40$ 本) による振幅 $A_{\alpha} = (\alpha_{\max} - \alpha_{\min})/2$ 並びに周期比 $T_2/2\pi$ を付記した。これによれば付着運動を考慮した断片線形近似解のもつ振幅の値が平均法によるものより大きい値を示すことがわかる。なお図中SLCは後述の安定論における安定なリミットサイクルを、またULCは不安定なリミットサイクルを示す。

5. 平均法と断片線形近似法による解の比較

図6は[A]形摩擦特性において平均法により求めた第1近似解の振幅 R_0 と、断片線形近似法により求められた A_{α} との差を、摩擦特性曲線の特性値 B_1 の値を副変数とし、 γ_0/γ を横軸にと、て示したものである。図6より $\gamma_0 = 0.8$ の場合、 $A_{\alpha} - R_0$ の曲線は原点をとおり、

γ_0/γ の値 γ_0 がほぼ 0.894 において横軸を切る γ_0/γ の3次曲線として近似できることがわかった。またこの曲線の極値を与える横軸、たて軸の値をそれぞれ X_p , γ_p とすると、これらは図7のようにほぼ直線的な関係を有する。よって[A]形摩擦特性を有する場合の付着運動を考慮した近似解は、平均法で求めた振幅 R_0 につきのような補正を与えることにより求めることができる。図中 $X = 2\gamma_0/K$ である。

$$A_{\alpha} = R_0 + (\gamma_0/\gamma) \{C_1(\gamma_0/\gamma)^2 + C_2(\gamma_0/\gamma) + C_3\} \quad (16)$$

ここで $C_1 \sim C_3$ は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \alpha_B (2\alpha_0 - 3\alpha_p) \gamma_p / \alpha_p (\alpha_p - \alpha_0)^2 \\ C_2 &= (3\alpha_p^2 - \alpha_0^2) \gamma_p / \alpha_p^2 (\alpha_p - \alpha_0) \\ C_3 &= (\alpha_0 - 2\alpha_p) \gamma_p / \alpha_p^2 (\alpha_p - \alpha_0) \end{aligned} \right\} (17)$$

6. 解の安定性

[A]形摩擦特性を例にとり平均法による第1近似解 $\eta_0 = \alpha_0 + R_0 \sin(\tau + \epsilon_0)$ の安定性を考える。この解に極めて近い任意の解を $\eta = \alpha + R \sin(\tau + \epsilon)$ とおき $\alpha = \alpha_0 + \delta\alpha$, $R = R_0 + \delta R$, $\epsilon = \epsilon_0 + \delta\epsilon$ とおいてこれらを(11)式を含む各々の平均方程式に代入すると、変分 δR などに関する微分方程式が得られる。 δR の式を示すと下式(18)のようになる。

$$(\delta R)' = \begin{cases} -B_1 \{1 - (\gamma_0/\gamma)^2 - 3R_0^2/4\} \delta R & (0 \leq R_0 \leq \gamma_0/\gamma) \\ -B_1 \{1 - (\gamma_0/\gamma)^2 - 3R_0^2/4 + (X_0/\gamma)(1/\alpha B_1) \\ \quad \times (\gamma_0/\gamma) / R_0 \sqrt{R_0^2 - (\gamma_0/\gamma)^2}\} \delta R & (R_0 > \gamma_0/\gamma) \end{cases} \quad (18)$$

したがって $0 \leq R_0 \leq \gamma_0/\gamma$ のとき $R_0 = 0$ は $0 < \gamma_0/\gamma < 1$ ならば不安定、 $\gamma_0/\gamma \geq 1$ で安定となる。また $1 - (\gamma_0/\gamma)^2 - 3R_0^2/4 \leq 0$ ならば η_0 は安定な解であり、 $R_0 > \gamma_0/\gamma$ のときには(18)の第2式(1)内が負または零のとき安定となる。図8に R_0 曲線が安定、不安定となる領域を明示した。

文献

- (1) 審慳; 機論論集
No. 720-3 (昭47-4), 89,
ほか

