

学 永 井 睦 (新潟大)  
正 原 利昭 (新潟大)

学 坂 本 信 (新潟大[院])  
正 高 野 英 資 (新潟大)

1 緒 言

近年、機械や構造物の構成部材として、複合材料が多用される傾向にある。本研究では、複合材料の力学的挙動を調べる一例として、環状孔を有する剛体床に接着された二層弾性厚板の表面を円環状剛体パンチでねじり場合を、三次元弾性論に基づいて解析した。解析では、パンチ接触部の応力および孔部の厚板下面変位を共に級数表示し、無限連立一次方程式を解く問題に帰着する方法を用いた。

2 応力関数と解析法

円柱座標  $(r, \theta, z)$  を用い、各弾性層諸量をそれぞれ添字 1, 2 を付して表すものとすれば、軸対称ねじりを受ける場合の変位成分  $(u_i^i, v_i^i, w_i^i)$  と応力成分  $(\sigma_r^i, \sigma_\theta^i, \sigma_z^i, \tau_{rz}^i, \tau_{\theta z}^i, \tau_{\theta r}^i)$  は Boussinesq の調和応力関数  $\lambda_i^j$  を用いて次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} 2G_i v_i^i &= -\partial \lambda_i^j / \partial r, & u_r^i &= w_i^i = 0 \\ \tau_{\theta z}^i &= -\partial^2 \lambda_i^j / (2\partial r \partial z) \\ \tau_{rz}^i &= \partial^2 \lambda_i^j / (2\partial z^2) + \partial \lambda_i^j / (r\partial r) \\ \sigma_r^i &= \sigma_\theta^i = \sigma_z^i = \tau_{rz}^i = 0 \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

ここで、 $G_i (i=1, 2)$  は各弾性層の剛性率である。

図 1 に示すように内半径  $r_i$ 、外半径  $r_o$  の環状孔を有する剛体床土 ( $z=0$ ) に置かれた厚さがそれぞれ  $h_1, h_2$  の無限厚板からなる二層板の表面 ( $z=h_1+h_2=h$ ) を孔と同形状の円環状剛体パンチで微小角度  $\omega$  だけねじり場合を考える。剛体床とパンチはそれぞれ厚板に接着しているものとする。境界条件は

$$\left. \begin{aligned} (i) & (v_i^i)_{z=h} = \omega r \quad (r_i \leq r \leq r_o) \\ (ii) & (\tau_{\theta z}^i)_{z=h} = 0 \quad (0 \leq r < r_i, r_o < r) \\ (iii) & (v_i^i)_{z=0} = 0 \quad (0 \leq r \leq r_i, r_o \leq r) \\ (iv) & (\tau_{\theta z}^i)_{z=0} = 0 \quad (0 \leq r < r_i, r_o < r) \\ (v) & (v_i^i)_{z=h_1} = (v_i^i)_{z=h_2}, (\tau_{\theta z}^i)_{z=h_1} = (\tau_{\theta z}^i)_{z=h_2} \quad (0 \leq r < \infty) \\ (vi) & \text{無限遠方において全ての応力は消失} \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

である。  $A(\lambda)$  と  $B(\lambda)$  を  $\lambda$  のみの未知関数とし、 $\lambda_i^j$  を次のように選ぶ。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1^j &= \int_0^{\infty} \{ F_1(\lambda, z) A(\lambda) \\ &+ F_2(\lambda, z) B(\lambda) \} J_0(\lambda r) d\lambda \\ \lambda_2^j &= \int_0^{\infty} \{ A(\lambda) \sinh \lambda z \\ &+ B(\lambda) \cosh \lambda z \} J_0(\lambda r) d\lambda \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

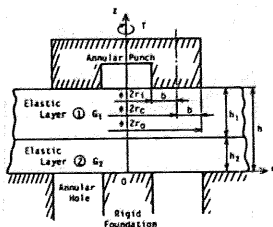


図 1 有孔剛体床土上の二層板

一種ベッセル関数、 $F_1(\lambda, z)$  と  $F_2(\lambda, z)$  は  $F = G_1/G_2$  として次式で与えられる  $\lambda$  と  $z$  の関数である。

$$\left. \begin{aligned} F_1(\lambda, z) &= \{ (1-F) \sinh \lambda (z-2h_2) + (1+F) \sinh \lambda z \} / 2 \\ F_2(\lambda, z) &= \{ (F-1) \cosh \lambda (z-2h_2) + (1+F) \cosh \lambda z \} / 2 \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

式(3)を(1)に代入して、境界条件(i)~(iv)を適用すれば、

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \{ F_1(\lambda, h) A(\lambda) + F_2(\lambda, h) B(\lambda) \} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda &= 2G_1 \omega r \quad (r_i \leq r \leq r_o) \\ \int_0^{\infty} \{ F_3(\lambda, h) A(\lambda) + F_4(\lambda, h) B(\lambda) \} \lambda^2 J_0(\lambda r) d\lambda &= 0 \quad (0 \leq r < r_i, r_o < r) \\ \int_0^{\infty} \lambda B(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda &= 0 \quad (0 \leq r \leq r_i, r_o \leq r) \\ \int_0^{\infty} \lambda^2 A(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda &= 0 \quad (r_i < r < r_o) \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

を得る。ここで

$$\left. \begin{aligned} F_3(\lambda, z) &= \{ (1-F) \cosh \lambda (z-2h_2) + (1+F) \cosh \lambda z \} / 2 \\ F_4(\lambda, z) &= \{ (F-1) \sinh \lambda (z-2h_2) + (1+F) \sinh \lambda z \} / 2 \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

従って、本問題は積分方程式(5)を満足する未知関数  $A(\lambda)$  と  $B(\lambda)$  を決定する問題となるが、これを式(5)を直接解いて  $A(\lambda)$  と  $B(\lambda)$  を決定するのは極めて煩雑になると予想される。そこで、パンチ接触部の  $(\tau_{\theta z}^i)_{z=h}$  と環状孔部の厚板下面変位  $(v_i^i)_{z=0}$  を共にフーリエ級数に展開して解析する。

いま、 $r_i = r_c - b, r_o = r_c + b, r = (r_c^2 + b^2 - 2r_c b \cos \phi)^{1/2} \dots (7)$  とおけば、 $r$  の変域  $r_i \leq r \leq r_o$  は  $\phi$  の変域  $0 \leq \phi \leq \pi$  に対応し、 $r = r_c$  で  $\phi = 0, r = r_o$  で  $\phi = \pi$  である。パンチ接触部における  $(\tau_{\theta z}^i)_{z=h}$  は剛体床に孔が無い場合<sup>(1)</sup>と同様な特殊性を有すると仮定し、他方厚板下面変位  $(v_i^i)_{z=0}$  は孔の両縁で零、 $r_i \leq r \leq r_o$  で連続であることを考慮すればそれぞれ次のようなフーリエ級数で表示できる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha (\tau_{\theta z}^i)_{z=h} &= (r/\pi r_c b) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\phi / \sin \phi \quad (r_i < r < r_o) \dots (8) \\ \alpha G_2 (v_i^i)_{z=0} &= (2r/\pi r_c b) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n+1)\phi \quad (r_i \leq r \leq r_o) \dots (9) \end{aligned} \right\}$$

ここで  $\alpha = 1/\{G_1 \omega (r_c^2 + b^2)\}$  である。また、 $Z_n(\lambda)$  と  $F_n(\lambda)$  を  $Z_n(\lambda) = \partial \{ J_n(\lambda r_o) J_n(\lambda b) \} / \partial \lambda, F_n(\lambda) = Z_{n+1}(\lambda) - Z_{n-1}(\lambda) \dots (10)$  とおき、ベッセル関数を含む次の積分公式<sup>(2)</sup>を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \lambda J_0(\lambda r) Z_n(\lambda) d\lambda &= \begin{cases} 0 & (0 \leq r < r_i, r_o < r) \\ -(r/\pi r_c b) \cos n\phi / \sin \phi & (r_i < r < r_o) \end{cases} \dots (11) \\ \int_0^{\infty} \lambda J_1(\lambda r) F_n(\lambda) d\lambda &= \begin{cases} 0 & (0 \leq r \leq r_i, r_o < r) \\ -(2r/\pi r_c b) \sin(n+1)\phi & (r_i \leq r \leq r_o) \end{cases} \dots (12) \end{aligned} \right\}$$

式(5), (8), (9)を用いてハンケル逆変換を行い、式(11), (12)を考慮すれば、

$$\left. \begin{aligned} \alpha \lambda A(\lambda) &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \{ a_n g_1(\lambda) Z_n(\lambda) - b_n g_2(\lambda) F_n(\lambda) \} \\ \alpha B(\lambda) &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n F_n(\lambda) \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

を得る。ここで、 $g_1(\lambda) = 1/F_3(\lambda, h), g_2(\lambda) = F_4(\lambda, h) \cdot g_1(\lambda)$

ある。式(13)を式(5)に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \{ a_n g_n(\omega) Z_n(\omega) + b_n \Gamma g_n(\omega) F_n(\omega) \} J_n(\lambda r) d\lambda &= G_n \omega r \quad (r_i \leq r \leq r_o) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \{ a_n g_n(\omega) Z_n(\omega) - b_n g_n(\omega) \lambda F_n(\omega) \} \lambda J_n(\lambda r) d\lambda &= 0 \quad (r_i < r < r_o) \end{aligned} \right\} (14)$$

ここで、 $g_n(\omega) = F_n(\lambda, h) \cdot g_n(\omega)$  である。式(14)は  $r$  と無関係に成立するので式(14)の両辺に  $r$  を乗じ、 $\partial J_n(\omega) / \partial r = -r J_n(\omega)$  の関係およびゲ-ゲンバウアーの加法定理より

$$-r J_n(\lambda r) = Z_n(\omega) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(\omega) \cos m\phi \quad (r_i \leq r \leq r_o) \quad (15)$$

を得る。式(15)を(14)に代入し、両辺の中に関する係数を等置して次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \{ a_n g_n(\omega) Z_n(\omega) + b_n \Gamma g_n(\omega) \lambda F_n(\omega) \} Z_m(\omega) d\lambda &= \delta_{0m} + 5 \delta_{1m} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \{ a_n g_n(\omega) Z_n(\omega) - b_n g_n(\omega) \lambda F_n(\omega) \} Z_m(\omega) d\lambda &= 0 \end{aligned} \right\} (16)$$

( $m = 0, 1, 2, \dots$ )

ここで、 $5 = -r_i b / (r_i^2 + b^2)$ 、 $\delta_{0m}$  はクロネッカーデルタである。従って本問題は式(16)の無限連立一次方程式を解く問題に帰着された。これを解いて  $a_n$  と  $b_n$  を求めれば、式(13)より全ての変位と応力が求められる。

### 3 厚板両面の変位と応力

厚板両面における変位と応力は式(1), (3), (13)より得られる変位と応力の式で  $z=0, h$  とすれば求められるが、ベッセル関数の漸近展開式を考慮するとともに次のように変形すれば数値計算が容易になる。

$$\left. \begin{aligned} G_{10}(\nu\theta)_{z=h} &= -\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \{ a_n [g_n(\omega) - 1] Z_n(\omega) + b_n \Gamma g_n(\omega) \lambda F_n(\omega) \} \\ &\quad \cdot J_n(\lambda r) d\lambda + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} [Z_n(\omega) + \{ r_i \sin \lambda r_i - (-1)^n r_o \cos \lambda r_o \} / \pi \sqrt{r_i b}] \\ &\quad \times J_n(\lambda r) d\lambda - (1/\pi \sqrt{r_i b}) \sum_{n=0}^{\infty} a_n [r_i^2 H(r_i - r) / r + r_o H(r_i - r) \\ &\quad \times 1 / (r_i + \sqrt{r_i^2 - r^2}) - (-1)^n r_o \sqrt{r_i^2 - r^2} H(r_i - r) / r] \\ \alpha (T_{\theta z})_{z=0} &= -\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \{ a_n g_n(\omega) Z_n(\omega) + b_n [1 - g_n(\omega)] \lambda F_n(\omega) \} \lambda J_n(\lambda r) d\lambda \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_0^{\infty} [ \lambda^2 F_n(\omega) - 2(n+1) \{ (-1)^n r_o^2 \sin \lambda r_o - r_i^2 \cos \lambda r_i \} / \pi (r_i b)^{3/2} ] \\ &\quad \times J_n(\lambda r) d\lambda - \{ 2/\pi (r_i b)^{3/2} \} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_n [ r_o^3 H(r_i - r) / r \sqrt{r_i^2 - r^2} \\ &\quad + r_i^2 \{ H(r_i - r) / r - (r_i - \sqrt{r_i^2 - r^2}) H(r_i - r) / r \sqrt{r_i^2 - r^2} \} ] \\ \alpha (T_{\theta z})_{z=h} &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \{ a_n [g_n(\omega) - 1] Z_n(\omega) + \Gamma b_n g_n(\omega) \lambda F_n(\omega) \} \lambda J_n(\lambda r) d\lambda \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} [ \lambda Z_n(\omega) + \{ r_i \sin \lambda r_i - (-1)^n r_o \cos \lambda r_o \} / \pi \sqrt{r_i b}] \\ &\quad \times J_n(\lambda r) d\lambda - (1/\pi \sqrt{r_i b}) \sum_{n=0}^{\infty} a_n [ 2r_i^2 H(r_i - r) / r^2 - r_i H(r_i - r) \\ &\quad \times \{ r / (r_i + \sqrt{r_i^2 - r^2}) \} \sqrt{r_i^2 - r^2} - (-1)^n r_o (r_i^2 - 2r_o^2) H(r_i - r) \\ &\quad \times 1 / r \sqrt{r_i^2 - r^2} ] \end{aligned} \right\} (17)$$

ここで、 $H(x)$  はヘビサイドのステップ関数である。

### 4 数値結果

図2は、パンチと孔の内外径比を  $r_i/r_o = 0.5$ 、板厚比を  $h/r_o = 1$ 、 $h_2/h = 0.5$  とした場合の  $P$  による板表面および板下面の孔部における  $\nu\theta$  の変化を示した図であ

る。 $P$  が大きくなるとともに板下面の変位は共に大きくなる。 $P$  による差異はパンチ内側で比較的小さいけれども外側では逆に顕著になり、 $P$  の  $(\nu\theta)_{z=h}$  に及ぼす影響はパンチの外側で大きいことがわかる。

図3は図2の場合に対応する応力  $T_{\theta z}$  の分布を示した図である。 $0.5 < r_i/r_o < 1$  の曲線はいずれもパンチ接触部の  $T_{\theta z}$  であり、他は  $(T_{\theta z})_{z=0}$  を示している。いずれの  $P$  の場合にも、共に孔およびパンチの両縁で特異性を有し、無限大となるが、それへの漸近のし方は  $P$  が大きくなるほど急激になる。また、パンチ接触部の  $T_{\theta z}$  はいずれの  $P$  の場合にも  $r/r_o = 0.57$  で最小となる。

図4は、 $r_i/r_o = 0.5$ 、 $h/r_o = 1$  とし、板厚比が  $h_2/h = 0.2, 0.5, 0.9$  とした場合のパンチを  $\omega$  だけねじるに要するトルク  $T$  と  $P$  の関係を示した図である。図中の破線は参考のために示した円柱パンチの結果<sup>(3)</sup> である。 $h_2/h = 0.9$  の場合、 $P \rightarrow 0$  で急激に大きくなるが、これは上層の板厚が  $h_2/h = 0.1$  と小さいためと思われる。他方、 $h_2/h = 0.5$  の結果は円柱パンチのそれにほぼ一致し、パンチ内側の影響は、極めて小さいことがわかる。

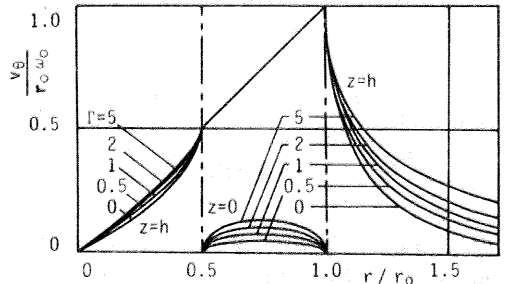


図2  $(\nu\theta)_{z=h}$  と  $(\nu\theta)_{z=0}$  の分布 ( $r_i/r_o = 0.5, h/r_o = 1.0, h_2/h = 0.5$ )

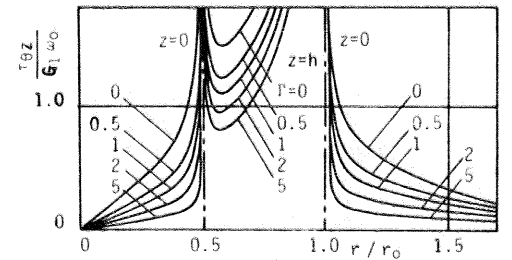


図3  $(T_{\theta z})_{z=h}$  と  $(T_{\theta z})_{z=0}$  の分布 ( $r_i/r_o = 0.5, h/r_o = 1.0, h_2/h = 0.5$ )

### 文献

- (1) 渋谷 ほか 3 名, 機論, 42-362 (昭51-10), 3031
- (2) 渋谷 機論 41-347 (昭50-7), 1957
- (3) 玉手 斎藤 機論 41-341 (昭50-1), 33

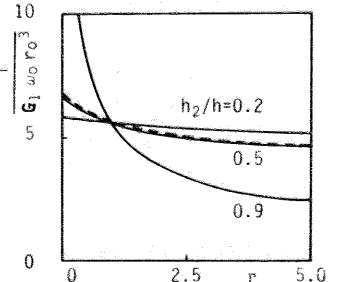


図4 トルクと  $P$  の関係