

学 三 宮 達 夫 (新 潟 大) 学 坂 本 信 (新 潟 大 [院])  
 正 原 利 昭 (新 潟 大) 正 高 野 英 貴 (新 潟 大)

1. 緒 言

孔を有する剛体床上に置かれた厚板と剛体パンチで押し込む場合の応力解析は、機械や構造物における各種板材等の強度設計にも関連して重要と思われ。そこで、本研究では環状孔を有する剛体床上に置かれた無限厚板の表面と半無限剛体パンチで押し込む問題とを三次元弾性論に基づいて解析した。解析にあたり、孔部・厚板表面変位を級数表示し、この問題を無限連立一次方程式を解く問題に帰着させた方法を用いた。数値計算を行い、厚板の接触応力や表面変形を求めた。

2. 応力関数と解析方法

本研究では厚板の軸じりのない軸対称応力状態を扱うために、円柱座標  $(r, \theta, z)$  における弾性基礎方程式の解である Boussinesq の調和応力関数  $\psi_0(r, z)$  と  $\psi_1(r, z)$  を用いる。この  $\psi_0$  と  $\psi_1$  による変位成分  $(u_r, v_\theta, w_z)$  および応力成分  $(\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}, \tau_{\theta r})$  は次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} 2G u_r &= \partial \psi_0 / \partial r + z \cdot \partial \psi_1 / \partial r, & v_\theta &= 0 \\ 2G w_z &= \partial \psi_0 / \partial z + z \cdot \partial \psi_1 / \partial z - (3-4\nu) \psi_0 \\ \sigma_r &= \partial^2 \psi_0 / \partial r^2 + z \cdot \partial^2 \psi_1 / \partial r^2 - 2\nu \cdot \partial \psi_0 / \partial z \\ \sigma_\theta &= \partial^2 \psi_0 / r \partial r + z \cdot \partial^2 \psi_1 / r \partial r - 2\nu \cdot \partial \psi_0 / \partial z \\ \sigma_z &= \partial^2 \psi_0 / \partial z^2 + z \cdot \partial^2 \psi_1 / \partial z^2 - 2(1-\nu) \partial \psi_0 / \partial z \\ \tau_{rz} &= \partial^2 \psi_0 / \partial r \partial z + z \cdot \partial^2 \psi_1 / \partial r \partial z - (1-2\nu) \partial \psi_0 / \partial r \\ \tau_{\theta z} &= \tau_{\theta r} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

ここで、 $G$  は横弾性係数、 $\nu$  はポアソン比である。

図1に示すように、内半径  $r_i$ 、外半径  $r_o$  の環状孔を有する剛体床上に置かれた厚さ  $h$  の無限弾性厚板表面 ( $z=h$ ) と半無限剛体パンチで  $\delta$  の力  $P$  を押し付ける場合を考える。この場合、厚板はパンチおよび剛体床にのみ  $z=0$  に接触しているものとすれば、境界条件は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} (i) (\tau_{rz})_{z=h} &= 0 & (0 \leq r < \infty) \\ (ii) (\tau_{rz})_{z=0} &= 0 & (0 \leq r < \infty) \end{aligned} \right\}$$

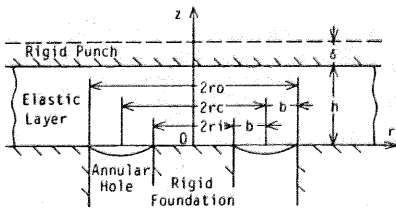


図1 環状孔を有する剛体床上の厚板

$$\left. \begin{aligned} (iii) (w_z)_{z=h} &= -\delta & (0 \leq r < \infty) \\ (iv) (w_z)_{z=0} &= 0 & (0 \leq r \leq r_i, r_o \leq r) \\ (v) (\sigma_z)_{z=0} &= 0 & (r_i < r < r_o) \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

つまり、応力関数  $\psi_0$  と  $\psi_1$  は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \psi_0 &= -\nu(2z^2-1)SG/h + \int_0^\infty [A(\lambda) \sin \lambda z + B(\lambda) \cosh \lambda z] J_0(\lambda r) d\lambda \\ \psi_1 &= z \cdot SG/h + \int_0^\infty [C(\lambda) \sin \lambda z + D(\lambda) \cosh \lambda z] J_0(\lambda r) d\lambda \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

ここで、 $J_0(\lambda r)$  は  $n$  次第1種のベッセル関数で、 $A(\lambda)$ 、 $B(\lambda)$ 、 $C(\lambda)$  および  $D(\lambda)$  は境界条件から決定される  $\lambda$  のみの未知関数である。式(3)と式(1)に代入して、境界条件(i)-(v)を適用すれば、次のような関係式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \lambda A(\lambda) &= (1-2\nu) D(\lambda) \\ \lambda B(\lambda) &= -\{ (1-2\nu) \cosh \lambda h + g(\lambda) \} D(\lambda) \\ C(\lambda) &= -\cosh \lambda h D(\lambda), & g(\lambda) &= -\lambda h / \sinh 2\lambda h \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

更に、式(4)の関係式を考慮して変位と応力を表せば、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} 2G u_r &= 2\nu r \cdot SG/h - \int_0^\infty D(\lambda) [(1-2\nu - \lambda z \cosh \lambda h) \sin \lambda z \\ &\quad + \lambda z (1-2\nu) \cosh \lambda h - g(\lambda) \cosh \lambda z] J_1(\lambda r) d\lambda \\ 2G w_z &= -2z \cdot SG/h + \int_0^\infty D(\lambda) [\lambda z + 2(1-\nu) \cosh \lambda h - g(\lambda) \sinh \lambda z \\ &\quad - (2-2\nu + \lambda z \cosh \lambda h) \cosh \lambda z] J_0(\lambda r) d\lambda \\ \sigma_r + \sigma_\theta &= -\int_0^\infty D(\lambda) [(1+2\nu - \lambda z \cosh \lambda h) \sin \lambda z + \lambda z - (1+2\nu) \\ &\quad \times \cosh \lambda h - g(\lambda) \cosh \lambda z] J_0(\lambda r) d\lambda \\ \sigma_r - \sigma_\theta &= \int_0^\infty \lambda D(\lambda) [(1-2\nu - \lambda z \cosh \lambda h) \sin \lambda z + \lambda z - (1-2\nu) \\ &\quad \times \cosh \lambda h - g(\lambda) \cosh \lambda z] J_2(\lambda r) d\lambda \\ \sigma_z &= -SE/h - \int_0^\infty \lambda D(\lambda) [(1+\lambda z \cosh \lambda h) \sin \lambda z \\ &\quad - \lambda z + \cosh \lambda h - g(\lambda) \cosh \lambda z] J_0(\lambda r) d\lambda \\ \tau_{rz} &= \int_0^\infty \lambda D(\lambda) [\lambda z \cosh \lambda z \cosh \lambda h + \{g(\lambda) - \lambda z\} \sinh \lambda z] J_1(\lambda r) d\lambda \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

式(5)に残りの境界条件(iv)と(v)を適用すれば、

$$\left. \begin{aligned} (w_z)_{z=0} &= -(1-\nu)/G \int_0^\infty D(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0 & (0 \leq r \leq r_i, r_o \leq r) \\ (\sigma_z)_{z=0} &= -SE/h + \int_0^\infty \lambda D(\lambda) (\lambda h + \sinh \lambda h \cdot \cosh \lambda h) / \sinh 2\lambda h \\ &\quad \times J_0(\lambda r) d\lambda = 0 & (r_i < r < r_o) \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

となり、本問題は式(6)の積分方程式を満足する  $D(\lambda)$  を決定する問題になる。しかしながら、式(6)を直接解いて、 $D(\lambda)$  を決定することは煩雑であり、そのためにここでは、孔部における厚板下面の  $(w_z)_{z=0}$  をフーリエ級数に展開して解析を行う。つまり、 $r_c$  を孔の平均半径、 $2b$  を孔の幅とし、次のような変数変換

$$\left. \begin{aligned} r_i &= r_c - b, & r_o &= r_c + b \\ r &= \sqrt{r_c^2 + b^2 - 2r_c b \cos \phi} & (r_i \leq r \leq r_o) \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

を行えば、変域  $r_i \leq r \leq r_o$  は変域  $0 \leq \phi \leq \pi$  ( $r=r_i$  で  $\phi=0$ 、 $r=r_o$  で  $\phi=\pi$ ) に対応し、解析を行う上で都合がよい。

本問題の孔部における  $(w_z)_{z=0}$  は、孔の両端 ( $r=r_i, r=r_o$ )

で表し、 $r_i \leq r \leq r_o$  には有限かつ連続である。従って、 $(w_2)_{z=0}$  は一般性を失うことなく、次のフーリエ級数で表示できる。

$$(w_2)_{z=0} = 2/\pi r_o b \sum_{n=1}^{\infty} a_n' \sin(n\pi r/r_o) \quad (r_i \leq r \leq r_o) \quad \dots (8)$$

いま、 $F_n(\lambda)$  と

$$F_n(\lambda) = \lambda \{ J_n(\lambda r_o) J_n(\lambda b) - J_{n+2}(\lambda r_o) J_{n+2}(\lambda b) \} \quad (n=0, 1, \dots) \quad \dots (9)$$

と置き、次の積分公式<sup>(1)</sup>

$$\int_0^{\infty} F_n(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = \begin{cases} 0 & (0 \leq r \leq r_i, r_o \leq r) \\ 2/\pi r_o b \cdot \sin(n\pi r/r_o) \phi & (r_i \leq r \leq r_o) \end{cases} \quad \dots (10)$$

を用いる。式(6)と(8)にハンケル逆変換し、式(9)と(10)を考慮すれば、 $D(\lambda)$  に関する方程式

$$D(\lambda) = -G/(1-\nu) \sum_{n=1}^{\infty} a_n' F_n(\lambda) \quad \dots (11)$$

を得る。 $D(\lambda)$  が式(11)で与えられるならば、任意の  $a_n'$  に対し、 $(w_2)_{z=0}$  の境界条件は常に満たされることになる。次に、未知係数  $a_n'$  を求めるために  $(\sigma_2)_{z=0}$  の条件を考慮して、式(11)を式(6)の第2式に代入すれば、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n' \int_0^{\infty} \lambda k(\lambda) F_n(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 1 \quad (r_i < r < r_o) \quad \dots (12)$$

ここで

$$k(\lambda) = (\lambda h + \sin 2\lambda h \cdot \cos 2\lambda h) / \sin 2\lambda h, \quad a_n = -Gh/(1-\nu) \delta E \cdot a_n' \quad \dots (13)$$

である。式(12)は  $r$  とは無関係に成立しなげらばならない。そこで、ノイマンの加法定理<sup>(2)</sup>

$$J_0(\lambda r) = J_0(\lambda r_o) J_0(\lambda b) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(\lambda r_o) J_m(\lambda b) \cos m\pi (r/r_o - b/r_o) \quad \dots (14)$$

を式(12)に代入して、中に関する係数を等置すれば、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n' \int_0^{\infty} \lambda k(\lambda) F_n(\lambda) J_m(\lambda r_o) J_m(\lambda b) d\lambda = \delta_{nm} \quad (m=0, 1, \dots) \quad \dots (15)$$

を得る。ここで、 $\delta_{nm}$  ( $m=0, 1, \dots$ ) はクロネッカーのデルタである。従って、本問題は式(15)の無限連立一次方程式を解くことに等しくなるが、式(15)の  $m$  番目から  $m+2$  番目と順次差し引けば、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n' \int_0^{\infty} k(\lambda) F_n(\lambda) F_m(\lambda) d\lambda = \delta_{nm} \quad \dots (16)$$

となり、係数行列が対称となる、計算上有利になる。

式(16)を解いて  $a_n'$  を求めれば、式(11)より  $D(\lambda)$  は、

$$D(\lambda) = \delta E/h \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n' F_n(\lambda) \quad \dots (17)$$

となり、式(5)および式(17)を用いて、すべての変位と応力が求められる。

### 3. 厚板下面の変位と応力

厚板下面 ( $z=0$ ) における変位と応力は、次のように求められることができる。いま、 $\lambda$  が十分大きい場合は、式(9)と(13)より、

$$\lambda F_n(\lambda) = \left\{ 2(n+1)/\pi (r_o b)^{1/2} \{ (-1)^n r_o \cos \lambda r_o + r_i \sin \lambda r_i \} \right. \\ \left. k(\lambda) \rightarrow 1 \right\} \quad \dots (18)$$

であることとを考慮して、例えば、厚板下面の  $(\sigma_2)_{z=0}$  は次のように表示できる。

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_2)_{z=0} / \delta E = & -1 + \left\{ k(\lambda) - 1 \right\} \lambda a_n' F_n(\lambda) J_0(\lambda r) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n' \left\{ \lambda F_n(\lambda) \right. \\ & + 2(n+1)/\pi (r_o b)^{1/2} \{ (-1)^n r_o \cos \lambda r_o + r_i \sin \lambda r_i \} \\ & \times J_0(\lambda r) d\lambda - 2/\pi (r_o b)^{1/2} \{ r_o / \sqrt{r_o^2 - r^2} \cdot H(r - r_o) \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1) a_n' + r_i / \sqrt{r_i^2 - r^2} \cdot H(r_i - r) \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_n' \} \end{aligned} \right\} \quad \dots (19)$$

ここで、 $H(x)$  はヘビサイド・ステップ関数である。

## 4. 数値結果

図2, 3は、 $r_i/r_o = 0.5$ ,  $h/r_o = 1.0$  で一定とし、 $w_2$  と  $\sigma_2$  の分布を示したものである。厚板上

面 ( $z=h$ ) 近傍では、

孔の及びの影響は

小さいことがわかる。

他方、板の下面 ( $z=0$ ) に近づくと

ともに、孔の近傍で孔の影響は大きくなる。

図4は、 $r_i/r_o = 0.5$  で一定とし、

$(w_2)_{z=0}$  および  $(\sigma_2)_{z=0}$  の板厚による変化を示した図である。

$(w_2)_{z=0}$  は、板が厚いほど小さく、板が薄くなるほど変位量は増加する。これに対し  $(\sigma_2)_{z=0}$  は板が厚いほど大きく、孔の両縁、 $r=r_i=0$  と  $r=r_o=0$  で無限大になるが、無限大への漸近のしかたは、板が薄くなるほど著しくなることがわかる。

図5は、 $h/r_o = 1.0$  で板厚一定とし、 $r_i/r_o = 0.25, 0.5, 0.75$  の場合における  $(w_2)_{z=0}$  と  $(\sigma_2)_{z=0}$  の分布を示した図である。

$(w_2)_{z=0}$  の分布形状

は、この場合でも対称でなく、孔の幅が大きくなる ( $r_i/r_o$  が小さくなる) ほど変位量は大きくなる。これに対して、 $(\sigma_2)_{z=0}$  は、孔の内側、外側で孔の幅が大きくなるほど値は大きく、 $r/r_o \geq 1.4$  では、いずれも  $(\sigma_2)_{z=0}$  は、ほぼ近い値になり、孔の幅の大小には無関係になり、

いさることがわかる。

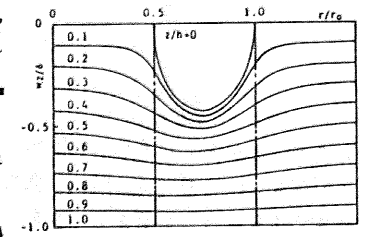


図2  $w_2$  の分布 ( $r_i/r_o = 0.5, h/r_o = 1.0$ )

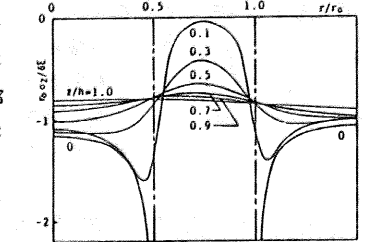


図3  $\sigma_2$  の分布 ( $r_i/r_o = 0.5, h/r_o = 1.0$ )

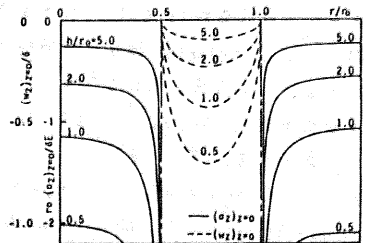


図4  $(\sigma_2)_{z=0}$  と  $(w_2)_{z=0}$  の分布 ( $r_i/r_o = 0.5$ )

は板が厚いほど大きく、孔の両縁、 $r=r_i=0$  と  $r=r_o=0$  で無限大になるが、無限大への漸近のしかたは、板が薄くなるほど著しくなることがわかる。

図5は、 $h/r_o = 1.0$  で板厚一定とし、 $r_i/r_o = 0.25, 0.5, 0.75$  の場合における  $(w_2)_{z=0}$  と  $(\sigma_2)_{z=0}$  の分布を示した図である。

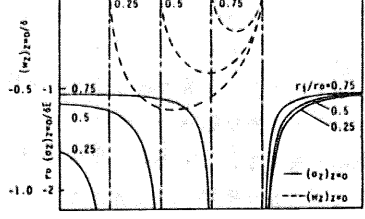


図5  $(\sigma_2)_{z=0}$  と  $(w_2)_{z=0}$  の分布 ( $h/r_o = 1.0$ )

は、この場合でも対称でなく、孔の幅が大きくなる ( $r_i/r_o$  が小さくなる) ほど変位量は大きくなる。これに対して、 $(\sigma_2)_{z=0}$  は、孔の内側、外側で孔の幅が大きくなるほど値は大きく、 $r/r_o \geq 1.4$  では、いずれも  $(\sigma_2)_{z=0}$  は、ほぼ近い値になり、孔の幅の大小には無関係になり、いさることがわかる。

## 文 献

- (1) Erdelyi, A., Tables of Integral Transforms, (1965), McGraw-Hill.
- (2) 森口 ほか2名, 数学公式(昭38), 岩波書店.