

学 秋 山 孝 夫 (新潟大)
 正 原 利 昭 (新潟大)

准 坂 本 信 (新潟大)
 正 高 野 英 資 (新潟大)

1. 緒 言

複合材料は種々の優れた機能性を有し、機械や構造物をはじめとする広い分野で用いられている。これらは物質的に性質の異なる二つ以上の材料からなる場合もあり、力学的特性及び挙動を調べることは複合材料を論ずる上で重要と思われる。そこで、本研究では最も基礎的な複合材料の一つである積層材に関する弾性接触問題を扱い、積層材に生ずる接触圧力や変形挙動などを明らかにした。

2. 解 析 法

図1に示すように、内半径 r_i 、外半径 r_o の環状孔を有する剛体床土に置かれた二層板表面を半無限剛体パンチで微小角 ω_0 だけねじる場合を考える。

円柱座標 (r, θ, z) を用い以下各層に関連した諸量を k ($k=1, 2$) を付して表すものとすれば、変位成分 $(u_{rk}, v_{\theta k}, w_{zk})$ と応力成分 $(\sigma_{rk}, \sigma_{\theta k}, \sigma_{zk}, \tau_{rz k}, \tau_{\theta z k}, \tau_{r\theta k})$ は Boussinesq の調和応力関数 λ_{3k} を用いて次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} 2G_k v_{\theta k} &= -2\lambda_{3k} / \partial r, u_{rk} = w_{zk} = 0 \\ \tau_{\theta z k} &= -\partial^2 \lambda_{3k} / (2\partial r \partial z) \\ \tau_{r\theta k} &= \partial^2 \lambda_{3k} / (2\partial z^2) + \partial \lambda_{3k} / (r \partial r) \\ \sigma_{rk} = \sigma_{\theta k} = \sigma_{zk} = \tau_{rz k} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

各境界面が完全密着状態にあるものとすればこの場合の境界条件は

$$\left. \begin{aligned} (i) \quad (v_{\theta 1})_{z=h} &= \omega_0 r \quad (0 \leq r) \\ (ii) \quad (v_{\theta 2})_{z=0} &= 0 \quad (0 \leq r \leq r_i, r_o \leq r) \\ (iii) \quad (\tau_{\theta z 2})_{z=0} &= 0 \quad (r_i < r < r_o) \\ (iv) \quad z=h_2 \quad \text{で} \quad v_{\theta 1} &= v_{\theta 2}, \tau_{\theta z 1} = \tau_{\theta z 2} \quad (0 \leq r) \end{aligned} \right\} \dots\dots (2)$$

である。そこで、 $\Gamma = G_1/G_2, n = h_2/h, \beta = (\Gamma - 1)n, \alpha = \beta / (1 + \beta)$ と表示し、応力関数 λ_{3k} を次のように与える。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{31} &= -\alpha G_2 \omega_0 \{ (3r^2 - 2z^2)z + 3\beta h (r^2 - 2z^2) \} \\ &+ \int_0^\infty (A_1(\lambda) \cosh \lambda z + B_1(\lambda) \sinh \lambda z) J_0(\lambda r) d\lambda \\ \lambda_{32} &= -\alpha G_2 \omega_0 (3r^2 - 2z^2)z \\ &+ \int_0^\infty (A_2(\lambda) \cosh \lambda z + B_2(\lambda) \sinh \lambda z) J_0(\lambda r) d\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots (3)$$

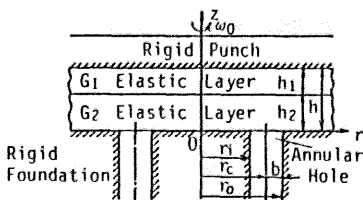


図1 ねじりを受ける有孔剛体床土の二層厚板

ここで、 $J_n(\lambda r)$ は n 次の第一種ベッセル関数、 $A_k(\lambda)$ と $B_k(\lambda)$ は λ のみの未知関数である。式(1)と(3)による変位と応力に境界条件(i)と(ii)を適用して得られる関係式および境界条件(iii)と(iv)を考慮すれば

$$\left. \begin{aligned} G_2 (v_{\theta 2})_{z=0} &= \int_0^\infty \lambda A_2(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda = 0 \quad (0 \leq r \leq r_i, r_o \leq r) \\ (\tau_{\theta z 2})_{z=0} &= \alpha G_2 \omega_0 r / h - \int_0^\infty \lambda^2 k(\lambda) A_2(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda \\ &= 0 \quad (r_i < r < r_o) \end{aligned} \right\} (4)$$

を得る。ここで

$$k(\lambda) = \frac{(\Gamma + 1) \cosh \lambda h + (\Gamma - 1) \cosh \lambda (1 - 2n)h}{(\Gamma + 1) \sinh \lambda h - (\Gamma - 1) \sinh \lambda (1 - 2n)h} \dots\dots\dots (5)$$

従って、本問題は式(4)を解いて $A_2(\lambda)$ を決定する問題になり、これを数値的に解く方法も考えられるが、ここでは厚板下面変位を級数展開して解析を行う。

$$r_i = r_c - b, r_o = r_c + b, r_c = (r_c^2 + b^2 - 2r_c b \cos \phi)^{1/2} \dots\dots\dots (6)$$

と置いて変数 r を変数 ϕ に変換すれば、変域 $r_i \leq r \leq r_o$ は変域 $0 \leq \phi \leq \pi$ ($r = r_i; \phi = 0, r = r_o; \phi = \pi$) に対応する。 $(v_{\theta 2})_{z=0}$ は孔の両縁で零、 $r_i \leq r \leq r_o$ で連続であることより未知係数 a_n ($n=0, 1, 2, \dots$) を用いて次式で表すことができる。

$$G_2 (v_{\theta 2})_{z=0} = \begin{cases} -2r \sum_{n=0}^\infty a_n \sin(n+1)\phi / (nr_c b) & (r_i \leq r \leq r_o) \\ 0 & (0 \leq r \leq r_i, r_o \leq r) \end{cases} (7)$$

いま、 $Z_n(\lambda) = J_n(\lambda r_c) J_n(\lambda b), F_n(\lambda) = \alpha (Z_n(\lambda) - Z_{n+2}(\lambda)) / \partial \lambda$ と置き、式(4)の第一式と式(7)および積分公式(1)によりハンケル逆変換を行えば次式を得る。

$$A_2(\lambda) = \sum_{n=0}^\infty a_n F_n(\lambda) \dots\dots\dots (8)$$

式(8)を式(4)の第二式に代入すれば

$$\sum_{n=0}^\infty a_n \int_0^\infty \lambda^2 k(\lambda) (\partial J_0(\lambda r) / \partial \lambda) F_n(\lambda) d\lambda = 1 - 2t \cos \phi \quad (r_i < r < r_o) \dots\dots\dots (9)$$

を得る。ここで

$$a_n = -h a_n' / (2\alpha G_2 \omega_0 (r_c^2 + b^2)), t = r_c b / (r_c^2 + b^2) \dots\dots (10)$$

次に、ゲーゲンバウアーの加法定理(2)

$$J_0(\lambda r) = Z_0(\lambda) + 2 \sum_{m=1}^\infty Z_m(\lambda) \cos m\phi \quad (r_i \leq r \leq r_o) \dots\dots (11)$$

を式(9)に代入し、両辺の ϕ に関する係数を等置すれば次式を得る。

$$\sum_{n=0}^\infty a_n \int_0^\infty \lambda^2 k(\lambda) (\partial Z_m(\lambda) / \partial \lambda) F_n(\lambda) d\lambda = \delta_{0m} - t \delta_{1m} \quad (m=0, 1, 2, \dots) \dots\dots (12)$$

さらに数値計算を簡単にするために、 m 番目の式から $(m+2)$ 番目の式を順次差引けば係数行列が対称な次式を得る。

$$\sum_{n=0}^\infty a_n \int_0^\infty \lambda^2 k(\lambda) F_m(\lambda) F_n(\lambda) d\lambda = \delta_{0m} - t \delta_{1m} \quad (m=0, 1, 2, \dots) \dots\dots (13)$$

式(13)を解いて を求めれば全ての応力と変位が求められる。特に厚板下面の変位と応力を表示すれば

$$\begin{aligned}
 (v_{\theta 2})_{z=0}/(\omega_0 r_0) &= 2\delta r_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(n+1)\phi / (\pi r_0) \\
 & \quad (r_i \leq r < r_0) \\
 \frac{(\tau_{\theta z 2})_{z=0}}{G_2 \omega_0} &= \begin{cases} \delta r + \epsilon \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r} + c_n r_1^2 (r_i - r_1) \right. \\ \left. - (r_i^2 - r^2)^{1/2} / (r(r_i^2 - r^2)^{1/2}) \right] & (0 \leq r < r_i) \\ \delta r + \epsilon \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r} + c_n ((-1)^n r_0^3 - r_1^2 (r^2 - r_0^2)^{1/2}) / (r(r^2 - r_0^2)^{1/2}) \right] & (r_0 < r) \end{cases} \quad (14) \\
 (\tau_{r \theta 2})_{z=0}/(G_2 \omega_0) &= 2\delta r_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+1) \\
 & \quad \times \cos(n+1)\phi / (\pi r c b \sin \phi) \\
 & \quad (r_i < r < r_0)
 \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}
 \alpha/h = \delta, \epsilon = \delta(r_c^2 + b^2), c_n = 2(n+1)/(\pi(r_c b)^{3/2}) \\
 I_n^1 = \int_0^{\infty} \lambda^2 (k(\lambda) - 1) F_n(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda \\
 I_n^2 = \int_0^{\infty} \lambda^2 F_n(\lambda) - c_n ((-1)^n r_0^2 \sin \lambda r_0 - r_1^2 \cos \lambda r_1) J_1(\lambda r) d\lambda \quad \dots (15)
 \end{aligned}$$

式(14)より応力 $(\tau_{\theta z 2})_{z=0}$ と $(\tau_{r \theta 2})_{z=0}$ は孔の両縁で特異性を持つことがわかる。そこで、応力特異性係数 S_i, S_o, S_i^*, S_o^* を次式のように定義すれば

$$\begin{aligned}
 S_i &= \lim_{r \rightarrow r_i - 0} (2\pi(r_i - r))^{1/2} (\tau_{\theta z 2})_{z=0} \\
 &= 2\epsilon r_i^{3/2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n / (t(\pi r_0 r_c b)^{1/2}) \\
 S_o &= \lim_{r \rightarrow r_0 + 0} (2\pi(r - r_0))^{1/2} (\tau_{\theta z 2})_{z=0} \\
 &= 2\epsilon r_0^{3/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) a_n / (t(\pi r_0 r_c b)^{1/2}) \quad \dots (16) \\
 S_i^* &= \lim_{r \rightarrow r_i + 0} (2\pi(r - r_i))^{1/2} (\tau_{r \theta 2})_{z=0} = S_i \\
 S_o^* &= \lim_{r \rightarrow r_0 - 0} (2\pi(r_0 - r))^{1/2} (\tau_{r \theta 2})_{z=0} = -S_o
 \end{aligned}$$

となる。

3. 数値結果

図2は孔の内外径比を $r_i/r_0=0.5$ 、板厚を $h/r_0=1$ 、板厚比 $\eta=0.5$ とした場合の応力 $\tau_{\theta z k}$ の半径方向分布図であり、一点鎖線は孔のない場合の結果を示している。応力は板下面近傍で孔の影響を強く受けるが、 $r_i/r_0 \rightarrow 1.5$ で孔の影響はほぼ消失することがわかる。図3は厚板下面の $(\tau_{\theta z 2})_{z=0}$ と変位 $(v_{\theta 2})_{z=0}$ の Γ による変化を示した図である。ここで $\Gamma=0$ は下層が剛体、 $\Gamma=\infty$ は上層が剛体、 $\Gamma=1$ は単層板に相当する場合の結果をそれぞれ示している。下層の剛性率が上層のそれより大きくなるほど孔の影響は小さくなり、部分的になる。図4は $r_i/r_0=0.5$ 、 $\eta=0.5$ とした場合の応力特異性係数と Γ の関係を示した図であり、図中の破線は $\Gamma=\infty$ の場合を示している。外径縁における応力特異性係数はいずれも内径縁におけるそれらよりも大きく、 Γ が小さくなり、板厚が大きくなるほどこれらの係数

値は小さくなる。

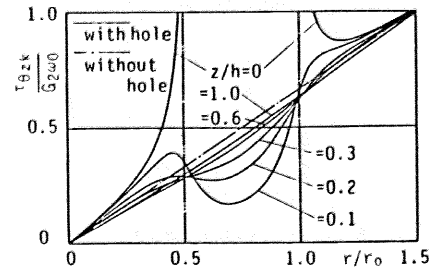


図2 $\tau_{\theta z k}$ の分布 ($\Gamma=0.5, \eta=0.5, r_i/r_0=0.5, h/r_0=1.0$)

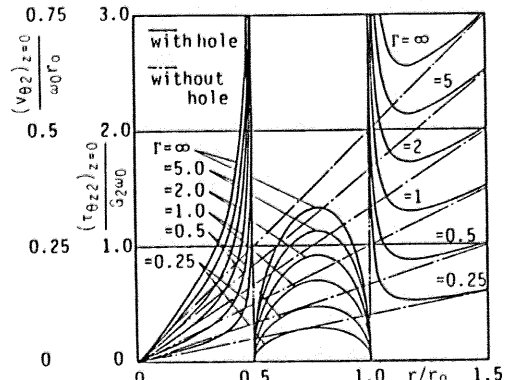


図3 $(v_{\theta 2})_{z=0}, (\tau_{\theta z 2})_{z=0}$ の分布 ($\eta=0.5, r_i/r_0=0.5, h/r_0=1.0$)

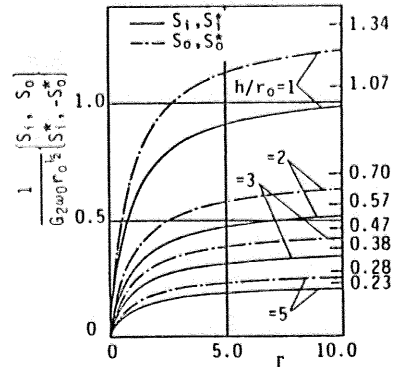


図4 (S_i, S_o, S_i^*, S_o^*) と Γ の関係 ($\eta=0.5, r_i/r_0=0.5$)

文 献

- (1) Erdelyi, A., Tables of Integral Transforms (1965), McGraw Hill.
- (2) 森口・他2名、数学公式(昭38), 岩波書店。