

B-1-269 エスパンテナにおける MUSIC 到来方向推定精度の理論限界  
Theoretical Limit of DoA Estimation Performance for ESPAR Antennas

タユフェール エディ†  
Eddy Taillefer

平田 明史†  
Akifumi Hirata

山田 寛喜† ‡  
Hiroyoshi Yamada

大平 孝†  
Takashi Ohira

† ATR 適応コミュニケーション研究所, ATR Adaptive Communications Research Laboratories  
‡ 新潟大学工学部, Faculty of Engineering, Niigata University

1 はじめに

エスパンテナ [1] を用いた MUSIC 到来方向推定法を報告した [2]。しかし方向推定精度の理論的検討はまだなされていない。そこで本稿では、エスパンテナにおける Cramér-Rao(CR) 理論限界  $\text{Std}_{\text{CR}}$  [3] およびリアクタンスドメイン MUSIC 法の方向推定標準偏差  $\text{Std}_{\text{EMU}}$  を導出する。計算機シミュレーションでは、実際の到来方向推定を行った計算結果と  $\text{Std}_{\text{CR}}$  および  $\text{Std}_{\text{EMU}}$  を比較し、リアクタンスセット数やサンプル数に対する方向推定誤差の変化を求める。

2 理論限界の定式化

第  $n$  番目のリアクタンスセットに対する等価ウェイトベクトルを  $\mathbf{i}_n^T$ , 第  $q$  番目の到来波角度におけるモードベクトルを  $\mathbf{a}(\theta_q)$  とすると、等価ウェイト行列  $\mathbf{I}^T$ , モード行列  $\mathbf{A}$ , リアクタンスドメインモード行列  $\mathbf{A}_{\text{mod}}$  はそれぞれ  $\mathbf{I}^T = [\mathbf{i}_1^T \dots \mathbf{i}_N^T]$ ,  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1) \dots \mathbf{a}(\theta_Q)]$ ,  $\mathbf{A}_{\text{mod}} = \mathbf{I}^T \mathbf{A}$  になる。 $T$  は転置を表す。これらを用いて、 $\text{Std}_{\text{CR}}$  は次式のように表される [3]。

$$\text{Std}_{\text{CR}}(\theta_q) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{2K} \left\{ \text{Re} \left[ \left\{ (\mathbf{I}^T \mathbf{D})^H \mathbf{P}_{\mathbf{A}_{\text{mod}}}^\perp (\mathbf{I}^T \mathbf{D}) \right\} \odot \mathbf{P}^T \right] \right\}^{-1}}_{qq} \quad (1)$$

但し、 $\mathbf{P}_{\mathbf{A}_{\text{mod}}}^\perp = \mathbf{I}_N - \mathbf{A}_{\text{mod}} (\mathbf{A}_{\text{mod}}^H \mathbf{A}_{\text{mod}})^{-1} \mathbf{A}_{\text{mod}}^H$  にて定義され、 $\mathbf{I}_N$  は  $N \times N$  単位行列である。 $\odot$  はアダマール積を表し、 $\mathbf{P}$  は送信データの相関行列である。 $N$  はリアクタンスセットの数である。 $\mathbf{D}$  は  $\mathbf{D} = \partial \mathbf{A} / \partial \theta$  として定義され、 $\theta = [\theta_1 \dots \theta_Q]^T$  は到来角度ベクトルである。 $H$  は複素共役転置を表す。 $K$  はサンプル数である。 $\sigma^2$  は熱雑音電力を表す。

一方、リアクタンスドメイン MUSIC 法における推定標準偏差は次式のように表される [3]。

$$\text{Std}_{\text{EMU}}(\theta_q) = \sqrt{\frac{\sigma^2 \left\{ \left[ \mathbf{P}^{-1} \right]_{qq} + \sigma^2 \left[ \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{A}_{\text{mod}}^H \mathbf{A}_{\text{mod}})^{-1} \mathbf{P}^{-1} \right]_{qq} \right\}}{2K \left[ \mathbf{d}^H(\theta_q) \mathbf{P}_{\mathbf{A}_{\text{mod}}}^\perp \mathbf{d}(\theta_q) \right]}} \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{d}(\theta_q) = \partial \mathbf{a}(\theta_q) / \partial \theta_q$  である。

3 到来方向推定結果

ここでは、図 1 を示すように 7 素子正六角形エスパンテナを考える。また、 $\mathbf{I}^T$  は既知とするので校正用を考えない。

図 2 に  $\text{Std}_{\text{CR}}$  と  $\text{Std}_{\text{EMU}}$  の理論曲線、および実際に到来方向推定を行ったシミュレーション結果を合わせて示す。到来波は 1 波のみとし、 $\theta = 30^\circ$  に固定する。シミュレーション結果は  $T = 500$  トライの推定誤差を平均したもの ( $\hat{\theta} = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T |\hat{\theta}_k - \theta|$ ) である。SNR は 10 dB に設定し、リアクタンスセット数  $N$  を  $N = 3, 6, 12$  に替えたときのサンプル数  $K$  対推定誤差の変化を求めた。

まずサンプル数  $K$  が 100 から 1000 までの範囲において  $\text{Std}_{\text{CR}}$  と  $\text{Std}_{\text{EMU}}$  はほとんど差を生じないことが分かる。またシミュレーション結果も理論曲線に近い特性を示し、 $N = 3, 6, 12$  の場合のシミュレーションと理論曲線誤差はそれぞれ 0.068°, 0.042°, 0.038° 以内である。このことから理論曲線を用いてエスパンテナによるリアクタンスドメイン MUSIC 法の方向推定精度が予測できることが明らかとなる。

次にリアクタンスドメイン MUSIC 法は  $N = 6$  のリアクタンスセット数に限らず、 $N$  を増やすにつれて方向推定精度が

向上することが分かる。すなわち  $N = 12$  で 200 サンプル用いる場合には  $N = 6$  で 500 サンプル用いる場合と同等の精度が得られる。一方、 $N = 3$  の場合にも 700 以上のサンプル数を用いることによって 0.1 度以内の推定精度が得られることが分かる。

4 まとめ

エスパンテナにおける CR 理論限界およびリアクタンスドメイン MUSIC 法の方向推定標準偏差を導出し、シミュレーションによって理論曲線に近い推定誤差を達成できることを確認した。またエスパ MUSIC 法は  $N$  を増やすにつれて方向推定精度が向上することが分かった。

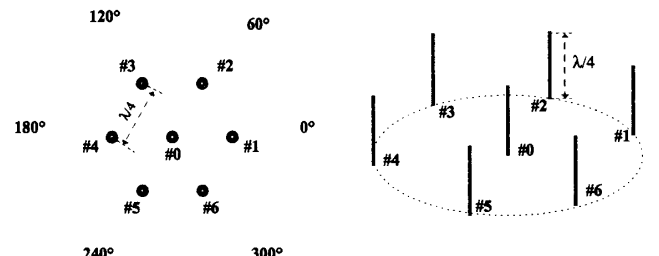


図 1 7 素子正六角形エスパンテナ (素子長 = 素子間 =  $\lambda/4$ )

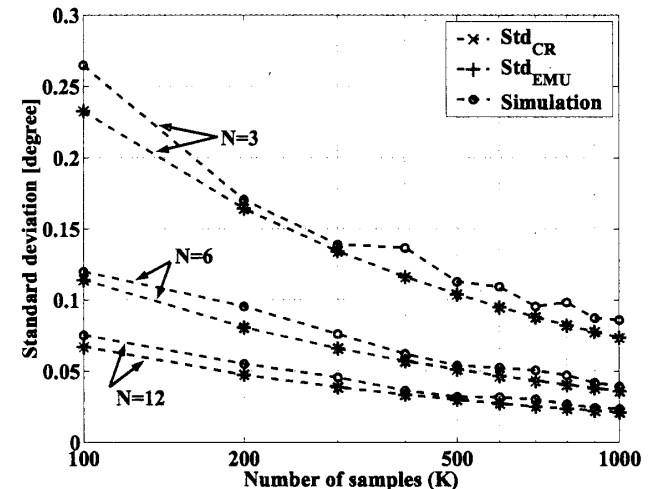


図 2 理論限界とシミュレーションの比較

謝辞 御指導をいただいた小宮山所長に深謝する。本研究は通信・放信機構の研究委託により実施したものである。

参考文献

[1] 大平, 飯草: “電子走査導波器アレーアンテナ”, 電子情報通信学会論文誌, **J87-C**, 1, pp. 12-31 (2004 年 1 月)。  
[2] C. Plapous, J. Cheng, E. Taillefer, A. Hirata and T. Ohira: “Reactance-domain MUSIC algorithm for ESPAR antennas”, IEICE Technical Report, RCS2002-147, **102**, 282, pp. 1-8 (2002)。  
[3] P. Stoica and A. Nehorai: “MUSIC, maximum likelihood, and Cramér-Rao bound”, IEEE Trans. on Acous. and Sig. Proc., **37**, 5, pp. 720-741 (1989)。