SA-1-5 同期距離のマークグラフ上への実現について

On realization of the synchronic distance matrix of a marked graph

田村裕*, 斉藤聡**, 三神潔**, 仙石正和**, 山口芳雄**, 篠田庄司***, 阿部武雄*
H. TAMURA*, S. SAITOH**, K. MIKAMI**, M. SENGOKU**, Y. YAMAGUCHI**, S. SHINODA***, T. ABE*
* 新潟工科大学, ** 新潟大学工学部, ***中央大学理工学部
* Niigata Institute of Technology, **Niigata University, *** Chuo University

あらまし： ペトリネットの重要なサブクラスであるマークグラフにおいて，マークグラフ上に同期距離として実現可能であるための必要十分条件を与え，これを用いて，距離公理は満足してもマークグラフ上に実現できない場合があることを示す．
キーワード：ペトリネット，マークグラフ，同期距離，実現問題，距離公理

1．まえがき

近年の並行・並列・分散システムの急速な発展に伴い，これらのシステム解析が重要な課題となってきている．これらのシステムのモデル化のひとつとしてペトリネットが適していることが知られている．ペトリネットによってモデル化されたシステムにおいて，事象間の並列度や共同資源量を表す概念の一つとして同期距離が提案されている．マークグラフにおける同期距離はその名の通り距離公理を満足する概念であることは知られているが，その逆，つまり距離公理を満足すれば，あるマークグラフ上に同期距離として実現できるかどうかは知られていなかった．本文では，この同期距離の実現問題に焦点をあてて考察する．この問題は，各事象間に必要な並列度をもつシステムの構築を考えたとき，それが実際のシステムとして構成できるかを判断する際に重要となり，興味深い問題である．まず，マークグラフ上に実現可能であるための必要十分条件を与え，これを用いて距離公理は満足してもマークグラフ上に実現できない場合があることを示す．これによって，距離公理を満足するものはマークグラフ上に実現できるクラスとできないクラスに分かれることになり，本文では実現できるいくつかのクラスを与える．

2．定義と基本的性質

マークグラフ$M=(V(M), E(M), w_M)$とは，点の集合$V(M)$，有向辺の集合$E(M)$，マーキングといわれる辺の重み関数w_Mからなる．ただし，辺の重みは非負整数とする．ペトリネットにおいて，$w_M(e)$は辺e上のトークンの数を表している．マークグラフMの点v_iとv_j間の同期距離$d^*_M(v_i, v_j)$がkであるとは，一方の点が他方の点を発火させることのないように最大でk回発火できることである．行列Dのi，j成分をd_{ij}としたとき，$D=\{d_{ij}\}$と表す場合もある．n×n行列Dのi，j成分が$d^*_M(v_i, v_j)$であるとき，DをMの同期距離行列という．また，そのようなMが存在する時，Dを単に同期距離行列という．他のペトリネット，グラフ理論に関する用語等は文献[1], [2]等を参照されたい．なお，本文では活性なマークグラフのみを扱うものとする．

マークグラフにおいては，2点間の同期距離は次の式により与えられることが知られている．

［定理1］[3]
v_i，v_jをマークグラフMの点とすると，以下の式が成立する．

$$d^*_M(v_i, v_j) = d_M(v_i, v_j) + d_M(v_j, v_i)$$

但し，$d_M(v_i, v_j)$は，点v_iからv_jへの距離を表す．□

マークグラフの同期距離行列Dは以下の性質を持つ．

［定理2］[3]
$D=\{d^*_{ij}\}$を同期距離行列とすると，以下の関係が成り立つ．

(i) $d^*_{ij}=0 \iff i=j$
(ii) $d^*_{ij} \leq d^*_{ik} + d^*_{kj}$ for all i, j, k
(iii) $d^*(v_i, v_j)$は非負整数
(iv) $d^*_{ij} = d^*_{ji}$ for all i, j
((i), (ii), (iv)は距離公理といわれる) □

3．同期距離行列となるための必要十分条件

以下では，定理2の(i)～(iv)を満足するような正方行列を距離行列ということとする．

無向グラフNの辺(v_i, v_j)が冗長であるとは，次の不等式を満足する点v_k($k \neq i, j$)が存在することである．

$$w_N(v_i, v_j) \geq d_N(v_i, v_k) + d_N(v_k, v_j).$$

($w_N(v_i, v_j)$は辺(v_i, v_j)の重みを表す)

$D=\{d_{ij}\}$をn×nの距離行列とした時，点集合$\{v_1, \ldots, v_n\}$からなる完全グラフをつくり，各辺の重みをd_{ij}とする．この完全グラフから冗長な辺をすべて削除したグラフをN_Dと表す．各辺の重みは正なので，N_Dは一意に定まる．N_Dから次の様にマークグラフM_Dを構成する．N_Dの各辺(v_i, v_j)を対称辺(v_i, v_j)と(v_j, v_i)に置き換え，各対称辺の重みの和がもとのN_Dの辺の重みと等しく

なるようにする．(図1(a)〜(d)参照)．M_Dは一意に定まるとは限らないが，このM_Dを用いることで，Dが同期距離行列となるための必要十分条件が得られる．

［定理3］

$D=\{d^*_{ij}\}$ が同期距離行列であるための必要十分条件は，同期距離行列がDとなるようなM_Dが存在することである．□

定理3により，M_D上に実現できないのであれば，距離行列Dはマークグラフの同期距離行列とはなり得ない．これを用いて，次の定理が導ける．

［定理4］

$D=\{d_{ij}\}$ を距離行列とし，N_Dが次の条件をみたす車輪グラフ[1]を誘導部分グラフとして含むとする．

(i) n は5以上の奇数．

(ii)車輪グラフにおける各辺の重みはすべて1．

この時，Dは同期距離行列ではない．（n＝5のときの車輪グラフを図2に示す）□

定理4より距離行列は必ずしもマークグラフの同期距離行列とはなり得ないことが示された．

さて，行列が与えられた時に，それが同期距離行列となるかどうかを判定する問題を考えると，個々の行列に対して，定理3を用いて判定するのは容易ではない．そこで本章では，N_Dの構造により，同期距離行列となるような行列Dのいくつかのクラスを与えることとする．これまで，N_Dが木となる場合にDは同期距離行列となることは知られていたが[3]，他のクラスに関しては考察されていなかった．

［定理5］

N_Dが閉路または完全グラフであれば，Dは同期距離行列である．□

また，N_Dの各ブロックが閉路や完全グラフであれば，やはりDは同期距離行列となることもわかるので，次の定理が導ける．

［定理6］

N_Dが伏見木[1]又はカクタス[1]（図3参照）であるとき，Dは同期距離行列である．□

4．むすび

本文では，ペトリネットの重要なサブクラスであるマークグラフにおいて，同期距離の持つ性質，特に同期距離をマークグラフ上に実現する問題について考察した．この問題は，各事象間に必要な並列度をもつシステムの構築可能性を判断する際に重要となる．行列が与えられた時，それが同期距離行列かどうかを判定するのに有効な必要十分条件を与えることが今後の課題である．

参考文献

[1]M. Behzad, G. Chartrand, L. L.-Foster:"Graphs & Digraphs", Prindle, Weber & Schmit, 1979.

[2]T. Murata:"Petri Nets: Properties, Analysis and Applications," Proc. IEEE, vol.77, no.4, pp.541-580, 1989.

[3]T. Murata, V. B. Le and D. J. Leu:"Method for realizing the synchronic distance matrix of a marked graph", Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Syst., Rome, Italy, vol.2, pp.609-612, May, 1982.

[4]斎藤，田村，仙石，山口，阿部："マークグラフの構造と同期距離について"，1990年電子情報通信学会春期全国大会，A-71, 1990.

[5]K. Mikami, H. Tamura, M. Sengoku, Y. Yamaguchi:"On a sufficient condition for a matrix to be the synchronic distance matrix of a marked graph", IEICE Trans. Fundamentals., E76-A, pp.1607-1609, 1993.

$$D=\begin{pmatrix}0&5&8&3\\5&0&3&8\\8&3&0&9\\3&8&9&0\end{pmatrix}$$

図1 (a)距離行列D

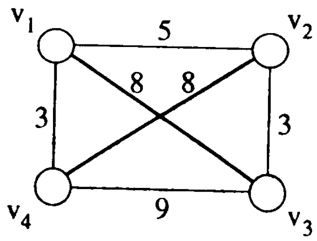

図1 (b)完全グラフ

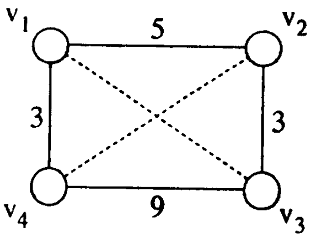

図1 (c)グラフN_D

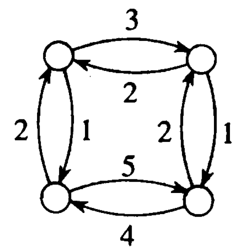

図1 (d)マークグラフM_D

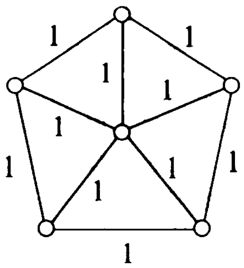

図2　車輪グラフW_6

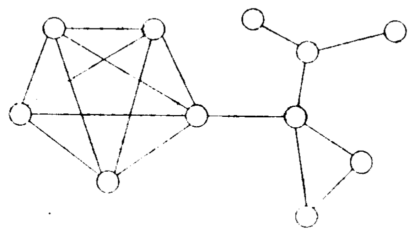

図3 (a)伏見木

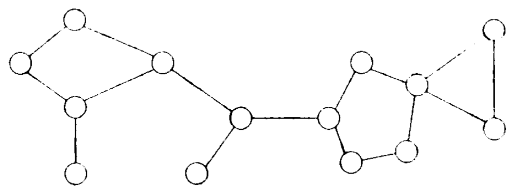

図3 (b)カクタス