# 3D−4 最尤法を用いた電波到来方向推定の特性評価

東海林 慶一　山田 寛喜　山口 芳雄
新潟大学 工学部 情報工学科

## 1 まえがき

近年、移動体通信や各種無線通信のための電波伝搬環境の推定手法が数多く検討されている．中でもスーパーレゾリューション法の一つであるMUSIC法[1]は、高い到来方向推定精度と高速な解析時間が期待できる手法である．しかしながら、少ないスナップショット数や高相関波、低SNRのような環境においては、推定精度が著しく劣化するという問題がある．

こうした環境下においても高い推定精度が期待できる手法としてMLE(Maximum Likelihood Estimate)法[2]がある．この手法は最適化手法の一種であり、最適化探索に伴う膨大な計算コストが問題とされる．この問題を解決するため、EM(Expection Maximization)アルゴリズム[2]やSAGE(Space Alternating Generalized EM)アルゴリズム[3]の併用が提案されている．本報告では、MLE法に両アルゴリズムを併用することで到来方向推定精度や解析処理時間の評価を行う．

## 2 MLE法

最初に、信号モデルについて説明する．シミュレーションモデルとして$L$素子等間隔リニアアレーを考える．第$\ell$番目の素子位置を$x_\ell(\ell = 1,2,\ldots,L)$、信号周波数を$f$、$d$波の入射波が存在するときの$i$番目の入射波の複素振幅、到来方向を$s_i$、$\theta_i$とする．このとき受信データベクトルは以下のように表される．

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{n} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{r} = [r_1,\ldots,r_L]^T \tag{2}$$

$$\boldsymbol{s} = [s_1,\ldots,s_d]^T \tag{3}$$

$$\boldsymbol{n} = [n_1,\ldots,n_L]^T \tag{4}$$

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}(\theta_1),\ldots,\boldsymbol{a}(\theta_d)] \tag{5}$$

$$\boldsymbol{a}(\theta_i) = \left[e^{j2\pi\frac{x_1}{\lambda}\sin\theta_i},\ldots,e^{j2\pi\frac{x_L}{\lambda}\sin\theta_i}\right]^T \tag{6}$$

上式において$\boldsymbol{n}$は雑音ベクトルであり、その成分は平均が0で分散$\sigma^2$の独立な複素ガウス分布であると仮定する．到来波数が既知であり、到来角は$T$をスナップショットとした観測データ$\boldsymbol{Y} = \{\boldsymbol{Y}(t) : 1 \le t \le T\}$から求められる．観測データ$\boldsymbol{Y}$の対数尤度関数は次式で与えられる．

$$\ell(\Theta, \boldsymbol{s}; \boldsymbol{Y}) = -\sum_{t=1}^{T}\Big[L\log\pi + L\log\sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2}[\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{A}(\Theta)\boldsymbol{s}(t)]^H[\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{A}(\Theta)\boldsymbol{s}(t)]\Big] \tag{7}$$

ここで$\Theta : [\theta_1,\ldots,\theta_d]$である．最適な角度$\Theta$と$\boldsymbol{s}$はそれぞれ次式によって与えられる．

$$\Theta = \arg\max_{\Theta} Tr\Big[[\boldsymbol{A}(\Theta)(\boldsymbol{A}(\Theta)^H\boldsymbol{A}(\Theta))]^{-1}\boldsymbol{A}(\Theta)^H\boldsymbol{R}\Big] \tag{8}$$

$$\boldsymbol{s}(t) = [\boldsymbol{A}(\Theta)^H\boldsymbol{A}(\Theta)]^{-1}\boldsymbol{A}(\Theta)^H\boldsymbol{r}(t) \tag{9}$$

ここで$\boldsymbol{R} = \sum_{t=1}^{T}[\boldsymbol{r}(t)\boldsymbol{r}(t)^H]$であり、$^H$は複素共役転置、$Tr$は行列のトレース操作である．

MLE法は、得られたデータに対して未知パラメータ毎に対数尤度関数を最大にする．ここでの最適解は、$\Theta$および$\boldsymbol{s}$毎に式(7)を最大にすることで得られる．

## 3 併用アルゴリズム

MLE法は解析に要する計算量が膨大となるため、計算負荷の少ないEM、SAGEアルゴリズムの併用を考える．解析処理の流れは、まずMLE法で粗い推定を行い、その結果をEM、SAGEアルゴリズムに引き渡す．EM、SAGEアルゴリズムは引き渡されたパラメータと受信データを基に細かい推定を行う．

### 3.1 EMアルゴリズム

EMアルゴリズムは、実際に観測可能なデータを不完全データ$\boldsymbol{Y}(t)$とする。また直接的な観測が不可能なデータを完全データ$\boldsymbol{X}(t)$とする。不完全データにより、完全データを統計的性質に基づいて推定・分離することで、同時探索の次元を減らすアルゴリズムである。推定手順としては、得られる不完全データから完全データを推定するE-stepと、最尤法に基づいて、完全データに関する最適なパラメータを求めるM-stepという2つの計算を繰り返すことにより未知パラメータを推定する。

$p$回目におけるEMアルゴリズムのイタレーションは次式のように表現される．

E − step : $Calculate(p = 1,\ldots,P)$

$$\ell(\Theta, \boldsymbol{s}; \boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{d}|\boldsymbol{x}_i(t) - \boldsymbol{a}(\theta_i)s_i(t)|^2 \tag{10}$$

M − step : $Update$

$$\theta_i^{p+1} = \arg\max_{\theta_i}\frac{\boldsymbol{a}(\theta_i)^H\boldsymbol{C}_{x_i}^p\boldsymbol{a}(\theta_i)}{|\boldsymbol{a}(\theta_i)|^2} \tag{11}$$

ここで

$$\boldsymbol{x}_i^p(t) = \boldsymbol{a}(\theta_i^p)s_i^p(t) + \frac{1}{d}[\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{A}(\Theta^p)\boldsymbol{s}^p(t)] \tag{12}$$

$$\boldsymbol{C}_{x_i}^p = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\boldsymbol{x}_i^p(t)\boldsymbol{x}_i^p(t)^H \tag{13}$$

### 3.2 SAGEアルゴリズム

SAGEアルゴリズムはEMアルゴリズムのようにパラメータの更新を一度に行うのではなく、パラメータ集合を部分空間に分割し、逐次最適化を行う．パラメータ集合の分割とは$\Theta = (\theta_1,\ldots,\theta_d)$に対して、$d$次元で考えるのではなくそれぞれ1次元ずつ切り離して考えることである．$\{\theta_c : 1 \le c \le d\}$は一回のイタレーションの中で連続して更新される．$d$サイクル後に$\theta$のすべての

要素が一度に更新される.

$i$回目のSAGEアルゴリズムのイタレーションは下のようなステップで構成される.

For $c = 1, \ldots, d$ {

E − step : *Calculate*

$$\ell_c(\Theta, s; \boldsymbol{X}) = |\boldsymbol{x}_i(t) - \boldsymbol{a}(\theta_i)s_i(t)|^2 \tag{14}$$

M − step : *Update* $\theta_c^{[p+1,c]}$

$$\theta_c^{[p+1,c]} = \arg\max_{\theta_c} \frac{\boldsymbol{a}(\theta_c^{[p,c]})^H C_{x_i}^p \boldsymbol{a}(\theta_c^{[p,c]})}{|\boldsymbol{a}(\theta_c^{[p,c]})|^2} \tag{15}$$

$$\theta_c^{[p,c]} = (\theta_1^{[p,c]}, \ldots, \theta_{c-1}^{[p,c]}, \theta_c^{[p,c]}, \theta_{c+1}^{[p,c-1]}, \ldots, \theta_d^{[p,c-1]}) \tag{16}$$

}

## 4 シミュレーション・考察

MLE法にEMアルゴリズム、SAGEアルゴリズムを併用した場合の到来方向推定精度と解析処理時間についての評価を行う. パラメータ諸元は表1に示す. 推定誤差評価には、推定値と設定値(真値)の2乗平均誤差(RMSE)を用いる. また、解析処理時間の評価にはC関数のCPUtimeを用いる. 図1はMLE法、MUSIC法による推定精度の推移と推定成功確率を示す. ここで推定成功とは2波の推定結果が±10°の範囲内の場合とする. 図2はMLE-EM法、MLE-SAGE法についてMLE法の走査幅を1°〜20°まで設定した場合の解析時間の変化を示し、図3はそれによる推定誤差の推移を示す. 図4はMUSIC法、MLE-EM法、MLE-SAGE法による推定誤差の推移を示す.

シミュレーション結果より、低SNR環境においてMLE法は、高い精度で推定が行えていることがわかる. 解析処理時間に関してはEM、SAGEアルゴリズムを併用することで大幅な改善がみられる. また、MLE法にEM、SAGEアルゴリズムを併用した場合でも、高い推定精度を維持できることがわかった.

## 5 まとめ

本報告では、MLE-EM法、MLE-SAGE法を用いて到来方向推定を行い、その推定精度と解析処理時間について評価した. 結果より、両手法の細かい特性を把握することができ、有効性を確認できた.

表1 パラメータ諸元

| | |
|---|---|
| アレー形状 | 6素子等間隔リニアアレー |
| 素子間隔 | $[\lambda/2]$ $\lambda = 0.125(m)$ |
| 到来波数 | コヒーレント2波 |
| 到来方向 | 10° 60° |
| スナップショット | 100 |
| SNR | -10〜20[dB] |
| 試行回数 | 100 |

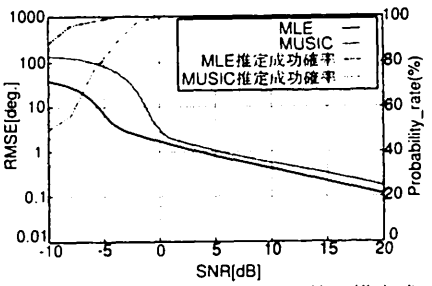


図1 MLE、MUSICによる推定誤差と推定成功確率

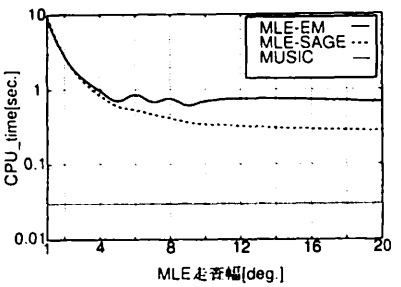


図2 MLE走査幅による解析時間

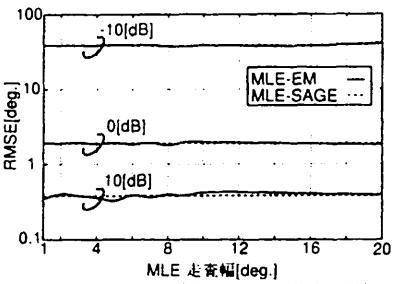


図3 MLE走査幅による推定誤差

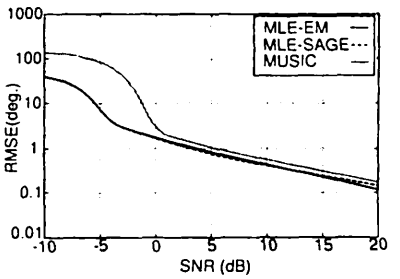


図4 MLE-EM、MLE-SAGE、MUSICによる推定誤差

### 参考文献


[1] R.O.Schmidt, "Multiple Emitter Location and Signal Prameter Estimation," IEEE Trans.on Antennas and Propagation,. vol.AP34, No 3, pp.276-280, Mar.1986.

[2] M.I.Miller "Maximum-Likelihood Narrow-Band Direction Finding and the EM Algorithm," IEEE Trans.Acoust., Speech and Signal Process., vol.38, no.9, pp1560-1577, Sep.1990.

[3] B.H.Flery "Chanell Parameter Estimation in Mobile Radio Environments Using the SAGE Alrorithm," IEEE J.Select. Areas Commun., vol.17, no.3, pp438-450, Mar.1999.