

14 無向フローネットワークによる 網の故障対策に関する考察

堀川 輝男^{*} 田村 裕^{**} 仙石 正和^{*}

^{*} 新潟大学大学院工学研究科

^{**} 新潟大学地域共同研究センター

1. まえがき

通信網や計算機ネットワークにおける故障発生による影響は非常に大きく、網の故障対策は、重要な問題であると考えられる。この網の故障対策に、ネットワークのロケーション問題のひとつである被覆問題が存在する。これは、計算機ネットワークにおいて故障が各通信回線に同一確率で発生するものと仮定した場合の故障対策として、「各コンピュータは、ファイルと一定回線以上で結ばなければならない。」という条件を満足する最小数のファイルを配置する問題である。

本報告では、各コンピュータにも故障が発生するものとした場合の故障対策としてのファイル配置問題についての考察を行い、この問題が被覆問題の解を用いることにより、多項式時間で解を得ることができることを示す。

2. 基礎的定義

以下で示されない諸定義は、文献[2]によるものとする。点集合を V 、辺集合を E とするグラフ $G = (V, E)$ の各辺 $e \in E$ に、正の整数の辺容量 $w(e)$ が付与されたネットワーク $N = (G, w(e))$ をフローネットワークとよぶ。また、ネットワーク N の点集合、辺集合をそれぞれ $V(N)$ 、 $E(N)$ で表す。特に $E(N)$ が無向辺からなるとき、 N を無向フローネットワークとよぶ。以後、特に断らない限り、単にネットワークとした時は、無向フローネットワークを示すものとする。ネットワークの任意の2点 v_i, v_j 間に流し得るフローの最大値を点 v_i, v_j 間の最大フロー又は容量といい、 $g(v_i, v_j)$ と表す。また、点集合から点集合へのフローを扱うために次のように定義する。

[定義1]

$S, T \subset V(N)$ とする。 S から T へのフローとは、 N に新たな点 s_0 と t_0 を加え、

- ・ s_0 と S の各要素を容量 ∞ の辺で結ぶ
- ・ t_0 と T の各要素を容量 ∞ の辺で結ぶ

としたときの s_0 から t_0 へのフローをいう。

このとき S, T 間の最大フローを

$g(S, T)$ と表し、特に $T = \{t\}$ のとき $g(S, \{t\})$ を $g(S, t)$ と表す。□

[定義2]

$W_1, W_2 \subset V(N)$

$\langle W_1, W_2 \rangle = \{e \in E(N) \mid e \text{の片方の端点} W_1 \text{に、他方が} W_2 \text{に属する}\}$

とし、カットと呼ぶ。また、

$$c \langle W_1, W_2 \rangle = \sum_{e \in \langle W_1, W_2 \rangle} w(e)$$

とし、カット容量と呼ぶ。

また、 $W_1 \subset V(N)$ 、 $W_2 = V(N) - W_1$ であり、 $s \in W_1$ 、 $t \in W_2$ であるとき、

$\langle W_1, W_2 \rangle$ は、 s と t を分離するカットと呼ぶ。点 s と t を分離するカットの中で、カット容量が最小であるものを、点 s と t を分離する最小カットと呼ぶ。□

[定理1] (1)

点集合 S から T への容量は、 S と T を分離する最小カットの容量に等しい。□

3. 総合被覆問題

[定義3] (総合被覆)

r : 正の整数

$U \subset V(N)$

任意の $v \in V(N)$ に対して

$$g(U, v) \geq r$$

であるとき、 U は $V(N)$ を r で総合被覆するという。 $V(N)$ を r で総合被覆する点集合のうち要素数最小のものを、無向フローネットワーク N の r -総合被覆という。□

[定義4]

$W \subset V(N)$ ($W \neq V(N)$)が総合被覆に関して r -未充足であるとは、

$c \langle W, V(N) - W \rangle$ が r 未満であることをいう。また、このとき W を総合被覆に関する r -未充足集合という。さらに、 W が総合被覆に関する r -未充足集合で真部分集合として r -未充足集合を含まないとき、 W を極小な r -未充足集合という。なお、 $V(N)$ は総合被覆に関する r -未充足集合とする。□

r -総合被覆は、 N の全ての総合被覆に関する極小な r -未充足集合から1点ずつ選んだ点集合である事が知られている^[1]。

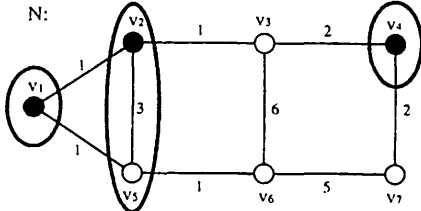


図1 無向フローネットワーク
 ● 5-総合被覆
 ○ 総合被覆に関する極小な5-未充足集合

4. 点に故障が発生するネットワークの故障対策

ネットワークの点の故障を次のように仮定する。

- ・点に故障が発生すると、そこに配置してあるファイル、及び計算機が使用不可能となる。
- ・辺は、故障には無関係。
- ・故障は、1点に発生する。

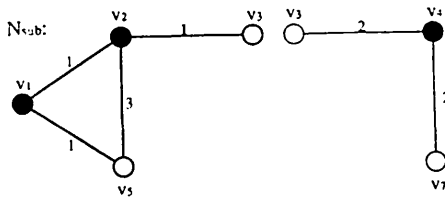
この仮定の下で、 $V(N)$ を r で総合被覆する点集合を求めるアルゴリズムを示し、図1の N で例示する。

アルゴリズム

U を、 N の r -総合被覆とする。

Step 1)

U に接続している辺より、辺誘導部分ネットワーク N_{sub} を構成する。



Step 2)

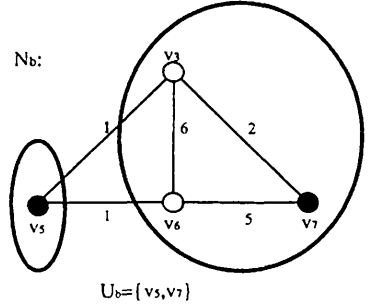
N_{sub} における U 以外の点間のフローを求め、 U 以外の点のフローを満足するネットワーク N_{sub}' を構成する。

N_{sub}' :



Step 3)

N より U を除去し、 N_{sub}' を付加したネットワークを N_0 とする。



Step 4)

N_0 の r -総合被覆 U_0 を求める。 U_0 と U がファイル配置問題の解となる。

r -総合被覆は、文献[1]より求められ、 r -総合被覆問題を解く手間は、ネットワークの2点間の容量を求める手間を $s(n, m)$ (ただし、 n, m は、それぞれ N の点数、辺数を表す。)とすると $O(n^3 s(n, m))$ である事が知られている^[1]。また、ネットワーク N_0 を得るための手間は、 $O(n^2 s(n, m))$ であるので、このアルゴリズムの全体としての手間は、 $O(n^3 s(n, m))$ である。

5. あとがき

本報告では、計算機及び通信回線に故障が発生するネットワークにおける故障対策としてのファイル配置問題についての考察を行い、結果として、この問題が多項式時間で解が得られることを示した。今後の課題として、点の故障が、辺に影響を与える場合の故障対策等が上げられる。

参考文献

[1] 田村, 仙石, 篠田, 阿部: "フローネットワークのいくつかの被覆問題について" 信学技報, FTS91-11 (1991)
 [2] 伊理, 白川, 梶谷, 篠田 他: "演習グラフ理論-基礎と応用-" コロナ社 (1983)。