13 初等端子容量行列で表現される ネットワークの構造の性質

佐藤 良平＊　　田村 裕＊＊　　仙石 正和＊
＊新潟大学大学院工学研究科　　＊＊新潟大学地域共同研究センター

1．まえがき

フローネットワークに対して，その各2点間の最大流量を行列を用いて表現したものを端子容量行列といい，その内でも特定の形をもつ行列を初等端子容量行列という．この初等端子容量行列が与えられた場合には常に任意のグラフ構造での実現が可能である．しかしこの場合にはグラフの点の対応関係は考慮しないものとしている．

本報告では，グラフ構造と点の対応関係の定まったフローネットワークが，初等端子容量行列の実現が可能，又は不可能となる場合の，フローネットワークの構造の性質について考察した結果について述べる．

2．準備

本文で扱うグラフ・ネットワークは無向で連結とし，辺の重みは正の実数値をとるものとする．

［定義1］

n次の対称行列$T=\{t_{ij}\}$が，n点からなるネットワークNの任意の2点v_i，v_jに対して，$t_{ij}=g(v_i, v_j)$（但し，$g(v_i, v_j)$はv_i，v_j間の最大フロー値）となっているとき，TをネットワークNの端子容量行列という．

［定義2］

端子容量行列T_Eが次の形で表されるときこの端子容量行列を初等端子容量行列という．（但し，$t_1 \geqq t_2 \geqq \cdots \geqq t_{n-1}$）

$$T_E=\begin{pmatrix} \infty & t_1 & t_2 & \cdots & t_{n-1} \\ t_1 & \infty & t_2 & \cdots & t_{n-1} \\ t_2 & t_2 & \infty & \cdots & t_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n-1} & t_{n-1} & t_{n-1} & t_{n-1} & \infty \end{pmatrix}$$

［定理1］[1]

Tを端子容量行列とする．任意のグラフGに対して，Gが基礎グラフとなるようなTの実現が存在するための必要十分条件はTの適当な行及びそれに対応する列の入れ替えにより，初等端子容量行列となることである．□

［定理2］[1]

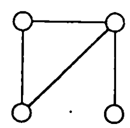
Tを端子容量行列とする．任意のグラフGと点の対応関係に対して，Gが基礎グラフとなるようなTの実現が存在するための必要十分条件はTの各i，j成分（i≠j）が全て等しいことである．

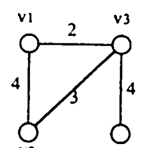
□

3．結果

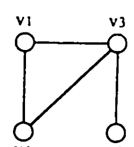
定理1，定理2より，与えられた行列が初等端子容量行列であれば，任意のグラフ上に実現が可能であり，また行列の各i，j成分（i≠j）が全て等しければ，点の対応関係を含めて，任意のグラフ上に実現が可能である．しかし，初等端子容量行列の各成分が全て等しくないときには，点の対応関係により実現が不可能となる場合が存在する．以下に例を示す．

$$T_1=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 6 & 5 & 4 \\ 6 & \infty & 5 & 4 \\ 5 & 5 & \infty & 4 \\ 4 & 4 & 4 & \infty \end{pmatrix} \end{array}$$





T1の実現ネットワーク



実現できない例

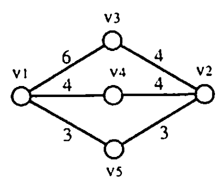
［定理3］

n≦4のとき，初等端子容量行列が点を対応づけたG上に実現となるための必要十分条件は，初等端子容量行列に表される各点間の最大フローを満足する木構造のネットワークN'がGの全域部分グラフとして構成できることである．

□

n≧5のときにもN'が構成できれば，常に実現が可能である．しかし，N'が構成できないネットワークでも初等端子容量行列の実現となるネットワークが存在する．以下に例を示す．

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} v1 & v2 & v3 & v4 & v5 \end{array} \\
T2 = & \begin{pmatrix} \infty & 11 & 10 & 8 & 6 \\ 11 & \infty & 10 & 8 & 6 \\ 10 & 10 & \infty & 8 & 6 \\ 8 & 8 & 8 & \infty & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & \infty \end{pmatrix}
\end{array}
$$



上の例のようなN'を構成できないが初等端子容量行列の実現となるネットワークは次の条件1を満たさなくてはならない．

ネットワークの各点をv_1，v_2，…，v_nとし，その固有容量をt_1，t_2，…，t_n（$t_1 \geqq t_2 \geqq \cdots \geqq t_n$）とする．N'が構成できない場合，v1以外に固有容量がそれ自身より大きい点と隣接していない点が存在する．その点をv_xとすると，初等端子容量行列が点の対応関係を含めてネットワークの実現となる必要条件は，つぎの条件1である．

［条件1］

a）v_1，v_xにおいて，ある点集合とそれに接続する辺集合を除去すると，v_1，v_xが非連結となる点集合のうちt_x以上の固有容量をもつ点を含まず，固有容量の総和が最小の点集合V_{1x}の要素数は3以上

b）v_xの固有容量は，V_{1x}の固有容量の総和の1/2以下

4．まとめ

ネットワークのグラフ構造と点の対応関係が定まっている場合に，初等端子容量行列の実現となるネットワークの構造の性質について考察を行なった．これによりn≦4のときにネットワークの実現が可能となる必要十分条件，n≧5のときに必要条件を示した．これにより，ネットワークの実現が可能または不可能であるかを，その点の対応関係と初等端子容量行列により判断できることを示した．

参考文献

［1］田村裕，穴沢哲哉，仙石正和，篠田庄司，阿部武雄，「端子容量行列から実現されるネットワークの構造について」1993年電子情報通信学会秋期大会　A－7