P 6　ウェーブレット変換領域での凸射影復元の加速

江部 裕路† 中静 真†† 菊池 久和††† 石井 郁夫† 牧野 秀夫††
†新潟大学大学院自然科学研究科 ††新潟大学工学部情報工学科 †††新潟大学工学部電気電子工学科

1．はじめに

近年，離散2進ウェーブレット変換を適応的に標本化することで得られた信号表現が，信号解析[1]，信号圧縮[2]，雑音除去[3]，解像度変換[4]などへ応用されている．これらの信号処理では，信号のエッジ，ピーク等の座標をウェーブレット変換上で検出し，その座標でウェーブレット変換を標本化する．また，標本化によって得られた値に対して凸射影復元法を適用することで，原信号の復元が可能である．

Mallat ら[1]のウェーブレット極大値表現では，画像のエッジを示すウェーブレット変換の絶対値の極大値で標本化を行っている．凸射影復元では極大値を境界条件として微分方程式を解く必要があり，計算が複雑になるという問題がある．Zoran ら[4]は，極大値に加えて極小値も加えたウェーブレット極値表現を提案し，収束速度と再構成精度を改善している．極値表現は極大値表現に比べて情報量が増加するため信号の圧縮，加工への応用には向かない．その上，極値はエッジに現れるとは限らないために，極値情報だけからエッジ抽出を行うことは困難である．

本論文では，ウェーブレット極大値表現からの凸射影復元における収束速度を加速させるために，コンピュータビジョン等の分野で ill-posed な問題を解くために用いられている正則化法と，勾配投影法を適用した結果を示す．ウェーブレット極大値表現を利用している点では Mallat ら[1]と同様であるが，本方法では正則化においてパラメータを幾つか決めるだけでよく，単純な計算の繰り返しで射影の加速が実現できる．

以下，ウェーブレット変換領域での凸射影復元を説明し，更に正則化による加速方法と勾配投影法について説明する．最後に画像信号に対して本提案方法を適用した結果を示し，その有効性を確認する．

2．ウェーブレット変換領域での凸射影復元

ウェーブレット変換領域での凸射影復元[1-4]は，まず以下に示す2つの凸集合

V：任意の信号のウェーブレット変換の集合

Γ：ウェーブレット極大値表現を満たす関数の集合

を定義し，これらの凸集合に対して任意の初期関数 $W^{(0)}f$ から相互に射影操作 P_V，P_Γ

P_V：凸集合 Γ から V への直交射影． ウェーブレット逆変換，変換．

P_Γ：凸集合 V から Γ への非拡大射影．極大値の座標において真値（極大値）を代入する．

により，

$$P_V P_\Gamma W^{(i)} f = W^{(i+1)} f \tag{1}$$

を繰り返し行うことで，共通集合の要素 $W^{(\infty)}f$

$$W^{(\infty)} f = \lim_{k \to \infty} P_V P_\Gamma W^{(k)} f \tag{2}$$

を解として得る．得られた近似解に対してウェーブレット逆変換を行うことで原信号復元を行うことができる．

3．正則化による加速

ウェーブレット変換はレギュラリティにより滑らかで，1回は微分可能であると仮定できる．そこで次式に示す評価関数 Q

$$\begin{aligned} Q = \sum_i \sum_j \Bigl[\left(W\tilde{f}_\Gamma(i,j) - Wf_\Gamma(i,j) \right)^2 &+ \alpha \Bigl\{ \left(W\tilde{f}_\Gamma(i,j) - W\tilde{f}_\Gamma(i-1,j) \right)^2 \\ &+ \alpha \Bigl\{ \left(W\tilde{f}_\Gamma(i,j) - W\tilde{f}_\Gamma(i,j-1) \right)^2 + \left(W\tilde{f}_\Gamma(i,j) - W\tilde{f}_\Gamma(i-1,j-1) \right)^2 \\ &+ \left(W\tilde{f}_\Gamma(i,j) - W\tilde{f}_\Gamma(i+1,j-1) \right)^2 \Bigr\} \Bigr] \end{aligned} \tag{3}$$

を最小にする $W\tilde{f}_\Gamma(i,j)$ を求める．ここで，$Wf_\Gamma(i,j)$ は集合 Γ 上の要素である．$Wf_\Gamma(i,j)$ を $W\tilde{f}_\Gamma(i,j)$ へ集合 Γ 内で共通集合へ向けて写像を行い，収束を加速させることができる．但し，α は滑らかさに対するペナルティ関数であり，α の増加に伴い，滑らかな関数が得られる．この非線形最適化問題は次の拘束条件

①$W\tilde{f}_\Gamma(i,j)$ は極大値の座標で $Wf_\Gamma(i,j)$ と等しい．
②$W\tilde{f}_\Gamma(i,j)$ は滑らかで，一階微分が可能である．
③$Wf_\Gamma(i,j)$ と $W\tilde{f}_\Gamma(i,j)$ の二乗誤差を最小にする．

を含んでいる正則化問題に帰着できる．

この正則化問題に対する解は最急降下法を用

い，

$$W\tilde{f}_\Gamma^{(l+1)}(i,j)-\left\{1-2\beta(1+9\alpha)\right\}W\tilde{f}_\Gamma^{(l)}(i,j)$$
$$=2\beta\left(Wf_\Gamma^{(l)}(i,j)+\alpha\sum_{m=i-1}^{i+1}\sum_{n=j-1}^{j+1}W\tilde{f}_\Gamma^{(l)}(m,n)\right) \quad (4)$$

を繰り返し $Wf_\Gamma(i,j)$ に適用することで求めることができる．ここで β は降下の刻み幅，l は繰り返し回数である．

4．勾配投影法の適用

この方法は $Wf^{(k)}(i,j)$ に対し，k-1回目の射影でのウェーブレット変換 $Wf^{(k-1)}(i,j)$ との差を加える操作により共通集合へ収束の加速を行っている．

$$W\hat{f}^{(k)}(i,j)=Wf^{(k)}(i,j)+\left\{Wf^{(k)}(i,j)-Wf^{(k-1)}(i,j)\right\} \quad (5)$$

また，この操作は正則化の場合と異なり，収束方向は常に共通集合へ向かうため，収束まで適用することができる．

5．シミュレーション

原画像として図１に示す画像を，ウェーブレット関数は２次スプライン関数をそれぞれ用いた．また，ウェーブレット変換は３オクターブで行っている．正則化で用いるパラメータは，スケールに比例して滑らかさに対するペナルティを増加させるために $\alpha=0.125\times2^S\times\exp(-(k-1)/2)$($2^S$：スケール，$k$：射影回数)とした．また，$\beta=0.125$，$l=5$ としている．

今回は凸射影復元において初期関数を零として，(１)射影加速方法を適用せず，極大値の情報のみを利用，(２)正則化のみを適用，(３)勾配投影法のみを適用，(４)正則化と勾配投影法を併用の４つの方法で行い，図２，３に示すような再構成結果を得た．図２の再構成結果は射影２回後の結果である．特に(４)の場合では射影２回で(１)の場合と比較して既に約６[ｄＢ]近い利得となり，よりコントラストがはっきりとした高精度の再構成結果が得られている．

6．まとめ

本論文ではウェーブレット変換領域での凸射影復元における加速方法を提案した．正則化と勾配投影法の両方法を適用することで収束速度が向上する上に，少ない射影回数でも高精度の再構成結果が得られることが確認できた．

今後の課題としては，正則化でのパラメータに対する考察，解像度変換においての本提案法の適用が挙げられる．

謝辞

本研究の一部は文部省科学研究費(奨励研究Ａ，課題番号 07750486)の補助によって行われた．ここに記して感謝する．

図１　原画像　ＬＥＮＡ (256×256)

(a) 方法(1), 23.74[dB]　(b) 方法(4), 29.98[dB]

図２　射影２回後の再構成結果

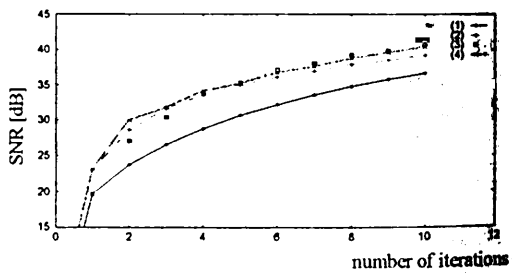

図３　射影に対するＳＮＲの変化

参考文献

[1] S. Mallat and S. Zhong, "Characterization of signals from multiscale edges," *IEEE Trans. on Pattern Anal. and Machine Intell.*, 14, pp. 710-732, July 1992.

[2] M.Nakashizuka, H.Kikuchi, H.Makino and I.Ishii, "ECG data compression by multiscale peak analysis," *Proc. ICASP-95*, 2, pp. 1105-1108, Detroit, May 1995.

[3] S. Mallat and W.L. Hwang, "Singularity detection and processing with wavelets," *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 38, pp. 617-643, Mar. 1992.

[4] S. G. Chang, Z. Cvetkovic and M. Vetterli, "Resolution enhancement of images using wavelet transform extrema extrapolation," *Proc. ICASP-95*, 4, pp. 2379-2382, Detroit, May 1995.