

W27 ウェーブレット変換のエネルギー分布からの画像復元

中 静 真[†], 清水俊仁^{††}, 菊池久和[†], 石井郁夫^{††}, 牧野秀夫[†]

新潟大学工学部[†] 新潟大学自然科学研究科^{††}

1. はじめに

2次元ウェーブレット変換^[1,3]は、画像解析の分野において、テクスチャ、エッジ等の解析へ応用されている。2次元ウェーブレット変換では、1つのスケールで、水平、垂直、斜め方向に対応する2あるいは3つの周波数領域に分割される。それに対して、画像の回転不変な表現を得るためには、異なるスケール・座標平面に表現されたウェーブレット変換を一つに統合する必要がある。

Mallatらはスケール・座標毎に水平方向と垂直方向で得られたウェーブレット変換の2乗和の平方根を求め、その極大値から画像の輪郭を得ている^[2]。極大値からの画像復元においては、凸射影復元法(POCS:ProjectionOnConvexSets)^[2]を適用するために、画像の輪郭に対して2つのウェーブレット変換から定義される偏角を与える必要があった。それに対して、本報告では2次元離散2進ウェーブレット変換の2乗振幅の総和を求め、回転不変に近い多重解像度表現を得る。また、その表現での画像処理を可能とするために、2乗振幅の総和のみからの画像復元法^[5]を提案する。次章より信号表現、復元法、復元結果の順で説明する。

2. 2次元離散2進ウェーブレット変換のエネルギー分布

2次元離散ウェーブレット変換^[1,3]は、水平方向の画素数 N 、垂直方向の画素数 M の画像 $f(m, n)_{0 \leq m < M, 0 \leq n < N}$ に対して、1つのスケールで周波数領域を3分割する場合、

$$\{S_j f, (W_j^1 f)_{1 \leq j \leq 3}, (W_j^2 f)_{1 \leq j \leq 3}\} \quad (1)$$

4分割する場合、

$$\{S_j f, (W_j^1 f)_{1 \leq j \leq 4}, (W_j^2 f)_{1 \leq j \leq 4}, (W_j^3 f)_{1 \leq j \leq 4}\} \quad (2)$$

と与えられる。 $S_j f(m, n)$ は、スケール 2^j での平滑化画像を示し、 $W_j^i f(m, n)$ はスケール 2^j における水平、垂直、斜め方向のウェーブレット変換をそれぞれ表わす。回転不変に近い多重解像度表現を得るために、2つ、もしくは3つのウェーブレット変換のエネルギーの総和

$$E_j f(m, n) = \sum_{i=1}^I (W_j^i f(m, n))^2 \quad (3)$$

と定義し、これをウェーブレットエネルギー分布と呼ぶ。ここで、3分割の場合 $I=2$ 、4分割の場合 $I=3$ となる。このウェーブレットエネルギー分布により、スケール毎に信号を3分割する離散2進ウェーブレット変換は

$$\{S_j f, (E_j f)_{1 \leq j \leq I}, (w_j^1 f)_{1 \leq j \leq I}, (w_j^2 f)_{1 \leq j \leq I}\} \quad (4)$$

と表現することができる。ここで $w_j^i f(m, n)$ は規格化ウェーブレット変換

$$w_j^i f(m, n) = \frac{W_j^i f(m, n)}{(E_j f(m, n))^{1/2}} \quad (5)$$

を示す。この規格化ウェーブレット変換は、2つのウェーブレット変換 $W_j^{1i} f(m, n)$ 、 $W_j^{2i} f(m, n)$ の値の比だけを保存し、原画像の座標 (m, n) における輝度勾配の方向を示す。一方、ウェーブレットエネルギー分布は、原画像の座標 (m, n) におけるリブシッツレギュラリティ^[2] α と

$$E_j f(m, n) \leq K(2^j)^{2\alpha} \quad (6)$$

で示す関係にある。ウェーブレットエネルギー分布と平滑化画像による画像表現

$$\{S_j f, (E_j f)_{1 \leq j \leq I}\} \quad (7)$$

は、原画像の輝度勾配の方向に関する情報を失い、リブシッツレギュラリティを保存する表現となる。

3. ウェーブレット変換のエネルギー分布からの画像復元

表現(7)からの信号復元法は、任意の初期画像 $g^0(m, n)_{0 \leq m < M, 0 \leq n < N}$ を得た後に、以下の手順を繰り返すことで実現される。

i回目の繰り返して

1) $g^{i-1}(m, n)_{0 \leq m < M, 0 \leq n < N}$ の離散2進ウェーブレット変換を計算する。

2) 1)で得られた離散2進ウェーブレット変換を、エネルギー分布と規格化ウェーブレット変換の表現に変換し、平滑化画像とエネルギー分布を与えられた値を置き換える。

3) 2)で得られた関数に対して、逆ウェーブレット変換を行い、画像 $g^{i+1}(m, n)_{0 \leq m < M, 0 \leq n < N}$ を得る。その後、1)から繰り返す。

ここで、2)の置き換え操作後の関数と、その前のウェーブレット変換の間のユークリッド距離は

$$d_i^{(1)} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{j=1}^I \sum_{k=1}^I \left[(E_j f(m, n))^{1/2} w_j^k g^{(i)}(m, n) \right]^2 - W_j^k g^{(i)}(m, n) \quad (8)$$

となる。これは

$$d_i^{(1)} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{j=1}^I \left[(E_j f(m, n))^{1/2} - (E_j g^{(i)}(m, n))^{1/2} \right]^2 \quad (9)$$

と変形することができ、復元途中の画像 $g^{(i)}(m, n)_{0 \leq m < M, 0 \leq n < N}$ のウェーブレットエネルギー分布と与えられた

ウェーブレットエネルギー分布の差を示している。また、操作3)と1)の前後の関数の間のユークリッド距離は

$$d_2^{(i)} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \left[\frac{W_j^k g^{(i+1)}(m, n)}{-(E_j f(m, n))^{1/2} w_j^k g^{(i)}(m, n)} \right]^2 \quad (10)$$

となる。2)の置き換え操作が、与えられたエネルギー分布を満たす関数を要素とする部分集合への射影に等しいことから

$$d_1^{(i)} \geq d_2^{(i)} \quad (11)$$

の関係が得られる。また、3)と1)のウェーブレット順変換・逆変換は可能なウェーブレット変換を要素とする部分集合への射影となることから

$$d_2^{(i)} \geq d_1^{(i+1)} \quad (12)$$

の関係が得られる。(11)と(12)の関係より

$$d_1^{(i)} \geq d_1^{(i+1)} \quad (13)$$

が得られ、上記の操作を繰り返すことで、復元過程の画像のウェーブレットエネルギー分布と与えられたウェーブレットエネルギー分布の差(9)は一定値になるまで、減少することがわかる。

上記のアルゴリズムは、POCSに類似した復元アルゴリズムであるが、エネルギー分布により定義される集合は凸集合ではない。そのために、(8)式で与えられる距離は、射影の繰り返しにより減少するが、必ずしもグローバルミニマムに収束するとは限らない。そこで、ローカルミニマムに陥る危険性を減少させるために、復元初期段階では、平滑化画像に対してのみ置き換え操作を適用し、その後、スケールの大きいウェーブレットエネルギー分布から順に置き換え操作を加えて行く。復元における拘束条件を、射影初期段階で緩く復元が進むにつれて厳しいものとするすることで、ローカルミニマムに陥る危険性が減少することが期待できる。この復元法をCoarse to Fine射影法と呼ぶ。

4. 復元結果

Coarse to Fine射影法の有効性を確認するために、復元例を示す。図1に示した原画像Tiffanyに対して、2次スプライン関数によるウェーブレット関数 ψ^2 を用い、3オクターブのウェーブレット変換を行った。復元画像のSN比の増加を図2aに、また復元画像のウェーブレットエネルギー分布に生じている誤差を図2bに示す。Coarse to Fine射影法では5回の繰り返し毎にエネルギー分布を最大スケールから順に与えている。図2a, bいずれの結果からもCoarse to Fine射影法では復元結果が改善されていることがわかる。また、図3にCoarse to Fine射影法による復元結果を示す。復元画像ではテクスチャに誤差が集中しているが、原画像のエッジは忠実に再現している。

5. まとめ

本報告では、ウェーブレット変換による回転不変に近い多重解像度表現として、ウェーブレットエネルギー分布を与え、その表現からの信号復元法を提案した。提案した表現法は画像の輪郭を与えること、原画像を復元できることから、画像のパターンマッチング、輪郭をトレースすることで輪郭抽出符号化等への応用が期待できる。

参考文献

- [1] I. Daubechies, "Ten lectures on wavelets," SIAM, (1992)
- [2] S. Mallat and W. L. Hwang, "Singularity detection and processing with wavelets," *IEEE Trans. on Information Theory*, 38, 2, pp. 617-643, March 1992.
- [3] H. Kikuchi and M. Nakashizuka, "Image recovery experiments from multiscale energy maxima," *Proc. Int'l Conf. on Digital Signal Processing*, Cyprus, June, 1995.



図1. 原画像

図3. 復元画像

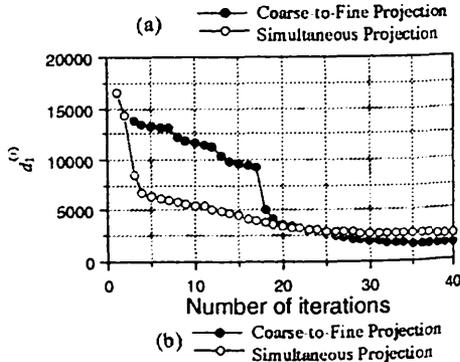
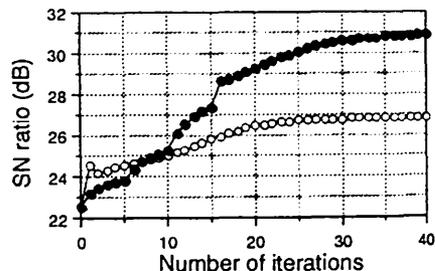


図2. 復元精度