SA-1-4

要求値との差の最大値を最小化するフローネットワークの実現について

Minimax-realization of flow networks from matrices

田村裕*, Hiroshi Tamura*, 仙石正和**, Masakazu Sengoku**, 篠田庄司***, Shoji Shinoda***, 阿部武雄* Takeo Abe*

*新潟工科大学, *Niigata Institute of Technology, **新潟大学工学部, **Faculty of Engineering Niigata University, ***中央大学理工学部 ***Faculty of Science and Engineering Chuo University

1.はじめに

ネットワーク上で定式化される対象物の中で，特に輸送網のように流れという現象が工学上しばしば問題になる．フローネットワークは，この流れという現象をモデル化したものである．各２点間の最大流量は，その２点間の関係を表す基本的な量である．最大流量を行列の形で表現したものを端子容量行列と呼ぶ．先に行列を与えた場合，それが端子容量行列となるようフローネットワーク上に実現する問題は，古くから研究されており，無向フローネットワークの場合，実現できるための必要十分条件やその実現法等多くの成果が得られている[1],[2]．しかしながら実際には，与えられる要求値からなる行列が，端子容量行列とはならない場合もあるであろう．この場合，要求値とその実現となるフローネットワーク上の最大流量との間に，ある程度の差が生じることとなる．筆者らは以前に，各２点間の容量の上限と下限を設けた場合，それらを満足するような無向フローネットワークが存在するための必要十分条件を示した[3]．本報告では，この結果を用いて，要求値と実現となるネットワーク上の最大流量との差の最大値を最小化すると問題について考察する．

2.準備

本報告では，無向フローネットワークについて考察する．$N=(V(N),E(N),w_N)$を無向フローネットワークとし，$V(N),E(N),w_N$をそれぞれ，点集合，辺集合，辺重みとする．v_i と v_j をNの点としたとき，$g_N(v_i,v_j)$を２点間の最大流量（以降では容量と呼ぶ）を表わすものとする．特に，$g_N(v_i,v_i)=\infty$と定める．ij成分が$g_N(v_i,v_j)$であるような$n\times n$行列（nはNの点数）をNの端子容量行列と呼ぶ．また，そのようなNが存在するような行列を単に端子容量行列と呼ぶ．

今，対称行列の対を[A,B]（但し，A,Bのij成分をそれぞれa_{ij}，b_{ij}とすると，$a_{ij}\leq b_{ij}$,かつ各対角成分は∞）とすると，任意のi,jに対して，$a_{ij}\leq g_N(v_i,v_j)\leq b_{ij}$なる無向フローネットワークNが存在するとき，[A,B]は区間実現可能であるという．区間実現に関しては次の結果が得られている．

[定理1][3]

[A,B]が区間実現可能であるための必要十分条件は以下の式が成り立つことである．

$$b_{ij}\geq g_{T_A}(v_i,v_j) \tag{1}$$

ここで，T_Aは，n点の完全グラフで辺(v_i,v_j)の重みがa_{ij}であるものの最大木を表わす．

なお，T_Aがその実現である □

3.要求値との差の最大値の最小化

[補題1]

Mを$n\times n$対称行列（対角成分は∞）とする．Nをn点からなる無向フローネットワークとしたとき，以下の不等式が成り立つ．

$$\max\{|g_N(v_i,v_j)-m_{ij}|\,|1\leq i,j\leq n\}$$
$$\geq \max\left\{\frac{g_{T_M}(v_i,v_j)-m_{ij}}{2}\,\middle|\,1\leq i,j\leq n\right\} \tag{2}$$

□

(2)式の右辺の値をc_Mしたとき，次のような$n\times n$行列を考える（対角成分は∞）．

$A_M=[a_{ij}]$　　但し，$a_{ij}=\max\{m_{ij}-c_M,0\}$

$B_M=[b_{ij}]$　　但し，$b_{ij}=m_{ij}+c_M$

以上の定義と補題により次が成り立つ．

[補題2]

$[A_M,B_M]$が区間実現可能であれば，その実現となるネットワークNは，Nにおける容量と行列Mの値との差の最大値が最小の実現である． □

定理1を用いることで，次の結果を得た.
[定理2]

$[A_M, B_M]$は区間実現可能であり，T_{A_M}がその実現である. □

例：Mとして次の行列を考える.

$$M=\begin{bmatrix} \infty & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & \infty & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 6 & \infty & 4 \\ 4 & 2 & 5 & 4 & \infty \end{bmatrix}$$

すると，

$$c_M=\max\left\{ \frac{g_{T_M}(v_i,v_j)-m_{ij}}{2} \middle| 1 \leqq i,j \leqq 5 \right\}$$

$$=\frac{g_{T_M}(v_1,v_4)-m_{14}}{2}=(5-1)/2=2$$

よって，行列A_M，B_Mは以下の様になる.

$$A_M=\begin{bmatrix} \infty & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & \infty & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & \infty & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & \infty & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & \infty \end{bmatrix}, B_M=\begin{bmatrix} \infty & 7 & 5 & 3 & 6 \\ 7 & \infty & 7 & 4 & 4 \\ 5 & 7 & \infty & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 8 & \infty & 6 \\ 6 & 4 & 7 & 6 & \infty \end{bmatrix}$$

T_{A_M}がその実現となるので，図1が要求値との差の最大値が最小となる無向フローネットワークである.

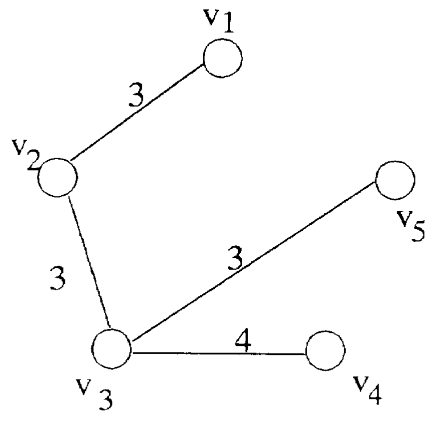

図1　無向フローネットワークT_{A_M}

さて，行列Mの値と実現値との差が最大となる点対は，要求した値と最も離れたものであるので，この点対の数が少ない方が，よりよい実現とも考えられる．ここで，次のような問題を考える.

Problem MINMAX
Instance:行列M,自然数k
Question:Mの値と2点間の容量の差の最大値が最小となる無向フローネットワークで，差が最大となる点対がk個以下のものが存在するか？

この問題に対して次の結果を得た.
[定理3]

頂点被覆 (vertex cover) 問題[4]は，MINMAX問題に多項式変換できる．よって，MINMAX問題はNP-完全である. □

4.おわりに

本報告では，端子容量行列とは限らない行列を与えた場合に，無向フローワーク上へ実現する問題について考察した．結果として，2点間の容量と行列の値との差の最大値が最小となる無向フローネットワークの実現法を示した．次いで，2点間の容量と行列の値との差が最大となる点対の数を最小化する問題についても考察し，この問題は，NP-完全問題であることを示した.

参考文献

[1] R.E.Gomory and T.C.Hu:" Multi-terminal network flows", J. Soc. Indust. Appl. Math., 9, 4, pp.551-570, 1961.

[2] L.R.Ford,Jr. and D.R.Fulkerson:" Flow in networks," Princeton University Press, 1962.

[3]H. Tamura, M. Sengoku, S. Shinoda and T. Abe: "Realization of a Network from the Upper and Lower Bounds of the Distances (or Capacities) between Vertices," Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems(ISCAS'93), vol. 4, pp. 2545-2548, May 1993.

[4]A.V.Aho,J.E.Hopcroft and J.D.Ullman: "The Design and Analysis of Computer Algorithms," Addison-Wesley, 1974.