木状のグラフへのいくつかの辺彩色と色数について
Consideration of edge colorings of trees and the number of colors for the edge colorings

田村裕[1]　山崎忠和[1]　仙石正和[2]　篠田庄司[3]
Hiroshi Tamura[1]　Tadakazu Yamazaki[1]　Masakazu Sengoku[2]　Shoji Shinoda[3]

[1]新潟工科大学　[2]新潟大学　[3]中央大学
[1]Niigata Inst. Tech.　[2]Niigata Univ.　[3]Chuo Univ.

1. まえがき

辺彩色は、グラフ理論における大変よく知られた問題の一つである．ここでは、通常の辺彩色と、より制限を強くした強辺彩色（strong edge coloring）の中間の性質を持つ辺彩色を定義し、木状のグラフにおける辺彩色数について考察する．

2. 辺彩色問題の定義

G を無向グラフとし、隣接辺には異なる色を塗るのが通常の辺彩色である．強辺彩色とは、隣接辺に異なる色を塗り、かつ二辺 e,e'に共通の辺が存在する場合、e,e'に異なる色を塗るものである．強辺彩色は通常の辺彩色でもある．

本文では、この中間の性質を持つ辺彩色を以下のように定義し、ここでは中間辺彩色と呼ぶこととする．

1) 中間辺彩色は辺彩色である．
2) 長さ 4 の道の辺を順に e_1,e_2,e_3,e_4 とすると、「e_1 の色と e_3 の色が同じでかつ e_2 の色と e_4 の色が同じ」とはならない．

つまり、中間辺彩色とは、辺に色が順に A,B,A,B とは塗られていない辺彩色である．強辺彩色が中間辺彩色であり、中間辺彩色が通常の辺彩色であることは容易にわかる．中間辺彩色は、無線通信におけるチャネル割当に関連するのであるが、これについては[1]に譲る．

このような中間の性質をもつ辺彩色は他にいくつか見られる．例えば、adjacent strong edge coloring[2]とは、通常の辺彩色であり、かつ G の各辺(u,v)に対して、点 u に接続する辺の色集合と点 v に接続する色集合が異なるような塗り方である．こちらも、強辺彩色が adjacent strong edge coloring であり、adjacent strong edge coloring が通常の辺彩色であることは容易にわかる．

3. 中間辺彩色の性質

ここでは、木状のグラフ T への辺彩色を考える．T への通常の辺彩色で最小となる色数を $\chi_c(T)$ で表し、強辺彩色の場合 $\chi_s(T)$、中間辺彩色の場合 $\chi_m(T)$ で表すとする．T の最大次数を Δ とすると、

$\chi_c(T)=\Delta,\quad \chi_s(T)=2\Delta-1$

であることが知られている[3]．よって、中間辺彩色に対して、

$\Delta \le \chi_m(T) \le 2\Delta-1$

となる．ここで、次の定理が得られた．

[定理]

n を木の最大次数とするとき、任意の n に対して

$\chi_m(T) \ge [3n/2]$　（ただし、[ ]は切り捨て関数）

なる T が存在する．

(略証)

n を偶数（n=2k）とする．点 v に点 u_i が辺 e_i で隣接し（i=1,2,...,2k）点 u_i に点 v 以外の点 $w_{i,j}$ が辺 $f_{i,j}$ で隣接する（j=1,2,...,2k-1）木 T を考える(図 1)．今 T が 3k-1 色で中間辺彩色が可能であるとする．ここで、$e_1,e_2,...e_{2k}$ には、それぞれ色 1,2,...,2k を塗るとしてよい．色 2k+1,...,3k-1 は、それぞれ 2k 個の辺 $f_{i,j}$ に塗ることができる．つまり、合計 2k(k-1)個の辺に色が塗られる．辺 $f_{i,j}$ の残りは

$2k(2k-1)-2k(k-1)=2k^2$

となるので、色 1,...,2k のうち、k 個の $f_{i,j}$ に塗られる色が存在する．この色を 1 としてよい．また、色 1 が塗られた辺に接続する点は、u_1 の他、$u_2,...,u_{k-1}$ としてよい．ここで、u_1 に接続する辺 $f_{1,1},...,f_{1,2k-1}$ に塗られる色を考えると、この 2k-1 個の辺のうち、k-1 個には、色 2k+1,...,3k-1 が塗られている．残りの k 個には、色 2,...,k+1 を塗ることはできない．なぜなら、例えば 2,1,2,1 と塗られた道ができてしまうからである．したがって、色 k+2,...,2k を塗ることになるが、これらの色は全部で k-1 個であるので、k 個の辺すべてに塗ることはできない．したがって、3k-1 色で中間辺彩色はできない．なお、n が奇数の場合も同様に証明可能である．□

4. おわりに

本文では、通常の辺彩色と強辺彩色の中間の性質をもつ辺彩色を取り上げ、木における彩色数を考察した．より厳密な彩色数の算出が今後の課題である．

[謝辞]本研究は科研費（22560396）の助成を受けたものである．

参考文献

[1]H.Tamura, M.Sengoku and S.Shinoda, On an edge coloring between conventional edge coloring and strong edge coloring for wireless communications, Proc. ITC-CSCC2011, 57-60, 2011.

[2]Z. Zhang, L. Liu, and J. Wang, Adjacent strong edge coloring of graphs. Appl. Math. Lett., 15(5):623–626, 2002.

[3] R. J. Faudree, R. H. Schelp, A. GyWas, and Z. Tuza, The strong chromatic index of graphs, *Ars Combin.* 29B 205-211, 1990.

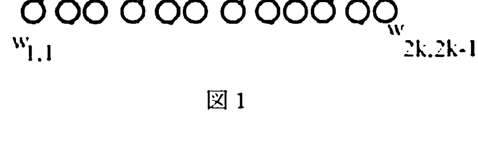

図 1

2011/9/13～16　札幌市