【101】 環状孔を有する剛体床上の弾性層板に関する軸対称接触問題

論文前刷

正 原 利昭 (新潟大) 正 端谷秀一 (東工大)
正 小泉 堯 (東工大) 正 高野英資 (新潟大)

1. 緒言

なめらかな剛体床上に置かれた弾性層板の表面を剛体パンチで押し込む軸対称接触問題についてはこれまでに多くの理論解析に関する研究がなされ，層板の応力状態等が明らかにされている。他方，孔や溝を有する剛体床上に置かれた層板を剛体パンチで押し込む場合の応力解析は，例えば精密機器に使用される緩衝材をはじめ，機械や構造物における各種板材等の強度設計にも関連して重要と思われますが，これまでに扱われた例は極めて少ないようである。著者らの知るところでは，Low[1]，Zakorko[2]やDhaliwal S[3]が第2種フレドホルム型積分方程式を解く問題に帰着する等の方法を用いて扱っているだけのようであり，いずれも数値結果は示されていない。これに対して，孔とパンチの形状が共に円環状の場合については未だ扱われていないようである。そこで，本研究では環状孔を有する剛体床上に置かれた無限層板の表面を円環状剛体パンチで押し込む問題を三次元弾性論に基づいて解析した。解析にあたっては，パンチ接触部の応力と孔部の変位を共に級数表示し，この問題を簡単な無限連立一次方程式を解く問題に帰着させる方法を用いた。また，数値計算を行い，層板両面の接触応力や表面変形を求めるとともに剛体床に孔が存在しない場合の結果[4]と比較して応力状態に及ぼす孔および板厚の影響等についても検討した。

2. 応力関数と解析方法

本研究では層板のねじりの無い軸対称応力状態を扱うために，円柱座標(r,θ,z)における弾性基礎方程式の解であるBoussinesqの調和応力関数$\varphi_0(r,z)$と$\varphi_3(r,z)$を用いる。これらφ_0とφ_3による変位成分(u_r,v_θ,w_z)および応力成分$(\sigma_r,\sigma_\theta,\sigma_z,\tau_{rz},\tau_{\theta z},\tau_{r\theta})$は次の様になる。

$$\left.\begin{aligned}
&2Gu_r=\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}+z\frac{\partial\varphi_3}{\partial r},\quad v_\theta=0,\quad 2Gw_z=\frac{\partial\varphi_0}{\partial z}+z\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}-(3-4\nu)\varphi_3\\
&\sigma_r=\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial r^2}+z\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial r^2}-2\nu\frac{\partial\varphi_3}{\partial z},\quad \sigma_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}+\frac{z}{r}\frac{\partial\varphi_3}{\partial r}-2\nu\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\\
&\sigma_z=\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial z^2}+z\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial z^2}-2(1-\nu)\frac{\partial\varphi_3}{\partial z},\quad \tau_{rz}=\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial r\partial z}+z\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial r\partial z}-(1-2\nu)\frac{\partial\varphi_3}{\partial r},\quad \tau_{\theta z}=\tau_{r\theta}=0
\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

ここで，Gは横弾性係数，νはポアソン比である。

図1に示す様に，内半径r_i，外半径r_oの環状孔を有する剛体床上$(z=0)$に置かれた厚さhの無限弾性層板表面$(z=h)$を孔と同形状の剛体パンチで微小量ε_0だけ押し込む場合を考える。この場合，層板はパンチおよび剛体床になめらかに接触しているものとすれば境界条件は次の様になる。

$$\left.\begin{aligned}
&\text{(i)}\ (w_z)_{z=0}=0 \quad (0\le r\le r_i,\ r_o\le r)\\
&\text{(ii)}\ (w_z)_{z=h}=-\varepsilon_0 \quad (r_i\le r\le r_o)\\
&\text{(iii)}\ (\sigma_z)_{z=0}=0 \quad (r_i<r<r_o)\\
&\text{(iv)}\ (\sigma_z)_{z=h}=0 \quad (0\le r<r_i,\ r_o<r)\\
&\text{(v)}\ (\tau_{rz})_{z=0}=(\tau_{rz})_{z=h}=0 \quad (0\le r)\\
&\text{(vi)}\ \text{無限遠方で全ての応力は消失。}
\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

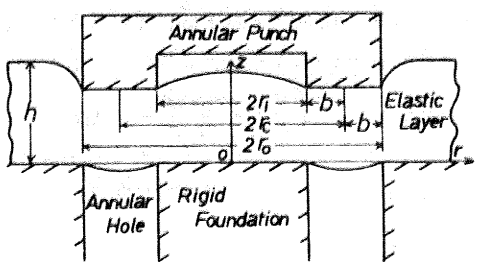

図1 環状孔を有する剛体床上の層板

日本機械学会講演論文集No.827-2日本機械学会・精機学会北陸信越支部共催('82-10-1 新潟)

いま，境界条件(vi)を考慮して応力関数 φ_0 と φ_3 を次の様に選ぶ。

$$2G\varphi_0=\int_0^\infty[A(\lambda)\sinh\lambda z+B(\lambda)\cosh\lambda z]J_0(\lambda r)d\lambda\ ,\quad 2G\varphi_3=\int_0^\infty[C(\lambda)\sinh\lambda z+D(\lambda)\cosh\lambda z]J_0(\lambda r)d\lambda \tag{3}$$

ここで，$J_n(\lambda r)$ は次の第1種ベッセル関数で，$\sinh\lambda z$ と $\cosh\lambda z$ は双曲線関数，$A(\lambda)$，$B(\lambda)$，$C(\lambda)$ および $D(\lambda)$ は λ のみの未知関数である。

式(3)を式(1)に代入して $(\tau_{rz})_{z=0}$ および $(\tau_{rz})_{z=h}$ をもとめ，境界条件(v)を適用すれば次の関係式を得る。

$$\lambda A(\lambda)=(1-2\nu)D(\lambda)\ ,\quad \lambda B(\lambda)=(1-2\nu-\lambda h\coth\lambda h)C(\lambda)-\lambda h D(\lambda) \tag{4}$$

更に，式(4)の関係を考慮することにより変位と応力は次の様に表示できる。

$$\left.\begin{aligned}
2Gu_r&=-\int_0^\infty[\{(1-2\nu-\lambda h\coth\lambda h)\cosh\lambda z+\lambda z\sinh\lambda z\}C(\lambda)+\{(1-2\nu)\sinh\lambda z+\lambda(z-h)\cosh\lambda z\}D(\lambda)]J_1(\lambda r)d\lambda\\
2Gw_z&=-\int_0^\infty[\{(2-2\nu+\lambda h\coth\lambda h)\sinh\lambda z-\lambda z\cosh\lambda z\}C(\lambda)+\{2(1-\nu)\cosh\lambda z-\lambda(z-h)\sinh\lambda z\}D(\lambda)]J_0(\lambda r)d\lambda\\
\sigma_r+\sigma_\theta&=-\int_0^\infty[\{(1+2\nu-\lambda h\coth\lambda h)\cosh\lambda z+\lambda z\sinh\lambda z\}C(\lambda)+\{(1+2\nu)\sinh\lambda z+\lambda(z-h)\cosh\lambda z\}D(\lambda)]\lambda J_0(\lambda r)d\lambda\\
\sigma_r-\sigma_\theta&=\int_0^\infty[\{(1-2\nu-\lambda h\coth\lambda h)\cosh\lambda z+\lambda z\sinh\lambda z\}C(\lambda)+\{(1-2\nu)\sinh\lambda z+\lambda(z-h)\cosh\lambda z\}D(\lambda)]\lambda J_2(\lambda r)d\lambda\\
\sigma_z&=-\int_0^\infty[\{(1+\lambda h\coth\lambda h)\cosh\lambda z-\lambda z\sinh\lambda z\}C(\lambda)+\{\sinh\lambda z-\lambda(z-h)\cosh\lambda z\}D(\lambda)]\lambda J_0(\lambda r)d\lambda\\
\tau_{rz}&=-\int_0^\infty z\lambda^2(\cosh\lambda z-\coth\lambda h\sinh\lambda z)C(\lambda)J_1(\lambda r)d\lambda
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

式(5)に残りの境界条件(i)～(iv)を適用すれば

$$\left.\begin{aligned}
(w_z)_{z=0}&=-\frac{1-\nu}{G}\int_0^\infty D(\lambda)J_0(\lambda r)d\lambda=0 \qquad (0\le r\le r_i,\ r_o\le r)\\
(w_z)_{z=h}&=-\frac{1-\nu}{G}\int_0^\infty[\sinh\lambda h\,C(\lambda)+\cosh\lambda h\,D(\lambda)]J_0(\lambda r)d\lambda=-\varepsilon_0 \qquad (r_i\le r\le r_o)\\
(\sigma_z)_{z=0}&=-\int_0^\infty[(1+\lambda h\coth\lambda h)C(\lambda)+\lambda h\,D(\lambda)]\lambda J_0(\lambda r)d\lambda=0 \qquad (r_i<r<r_o)\\
(\sigma_z)_{z=h}&=-\int_0^\infty[(\cosh\lambda h+\lambda h/\sinh\lambda h)C(\lambda)+\sinh\lambda h\,D(\lambda)]\lambda J_0(\lambda r)d\lambda=0 \qquad (0\le r<r_i,\ r_o<r)
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

となり，本問題は式(6)の積分方程式を満足する $C(\lambda)$ と $D(\lambda)$ を決定する問題になる。然し乍ら，式(6)を直接解いて $C(\lambda)$ と $D(\lambda)$ を決定することは容易ではない。そのために本研究では，乳部における厚板下面の $(w_z)_{z=0}$ とパンチ接触面における $(\sigma_z)_{z=h}$ を共にフーリエ級数に展開して解析を行う。

いま，r_c をパンチおよび乳の平均半径，$2b$ をパンチおよび乳の幅とし，次の様な変数変換

$$r_i=r_c-b\ ,\quad r_o=r_c+b\ ,\quad r=\sqrt{r_c^2+b^2-2r_cb\cos\phi}\qquad (r_i\le r\le r_o) \tag{7}$$

を行えば，領域 $r_i\le r\le r_o$ は変域 $0\le\phi\le\pi$（$r=r_i$ で $\phi=0$，$r=r_o$ で $\phi=\pi$）に対応し，解析を行う上で都合が良い。

パンチおよび乳が円形の場合(1)(2)を参考にすれば，本問題の乳部における板下面の $(w_z)_{z=0}$ は乳の両端，すなわち $r=r_i$ と $r=r_o$ で零となり，$r_i\le r\le r_o$ では有限且つ連続である。他方，パンチ接触面の $(\sigma_z)_{z=h}$ は剛体床に乳が無い場合(4)と同様の特異性を有し，しかも $r_i<r<r_o$ では有限，連続であると考えられる。従って，$(\sigma_z)_{z=h}$ と $(w_z)_{z=0}$ は一般性を失うことなく次の様なフーリエ級数でそれぞれ表示できる。

$$(\sigma_z)_{z=h}=\frac{1}{\pi r_cb}\sum_{n=0}^{\infty}a_n'\frac{\cos n\phi}{\sin\phi} \qquad (r_i<r<r_o) \tag{8}$$

$$(w_z)_{z=0}=\frac{2}{\pi r_cb}\sum_{n=0}^{\infty}b_n'\sin(n+1)\phi \qquad (r_i\le r\le r_o) \tag{9}$$

更に，$Z_n(\lambda)$ と $F_n(\lambda)$ を

$$Z_n(\lambda)=J_n(\lambda r_c)J_n(\lambda b)\ ,\quad F_n(\lambda)=\lambda\{Z_n(\lambda)-Z_{n+2}(\lambda)\}\qquad (n=0,1,\cdots) \tag{10}$$

とおいて次の積分公式(5)

$$\int_0^\infty \lambda J_0(\lambda r) Z_n(\lambda)\,d\lambda = \begin{cases} 0 & (0\le r<r_i,\ r_0<r) \\ \dfrac{\cos n\phi}{\pi r_i b \sin\eta\phi} & (r_i<r<r_0) \end{cases} \qquad \int_0^\infty J_0(\lambda r) F_n(\lambda)\,d\lambda = \begin{cases} 0 & (0\le r\le r_i,\ r_0\le r) \\ \dfrac{2}{\pi r_i b}\sin(n+1)\phi & (r_i\le r\le r_0) \end{cases} \tag{11}$$

を用いるとともに式(6)の第1式と4式および式(8),(9)をハンケル逆変換すれば，$C(\lambda)$ と $D(\lambda)$ に関する次式

$$C(\lambda) = -\frac{2\sin\eta\lambda}{2\lambda\eta+\sin\eta 2\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{a_n' Z_n(\lambda) - \frac{G}{1-\nu} b_n' F_n(\lambda)\sin\eta\lambda\right\} \quad , \quad D(\lambda) = -\frac{G}{1-\nu}\sum_{n=0}^{\infty} b_n' F_n(\lambda) \tag{12}$$

を得る。$C(\lambda)$ と $D(\lambda)$ が式(12)で与えられるならば任意の a_n', b_n' に対して $(\sigma_z)_{z=\eta}$ と $(w_z)_{z=0}$ の境界条件は常に満たされることになる。そこで，未知係数 a_n' と b_n' を求めるためにパンチ接触部の $(w_z)_{z=\eta}$ と以外における $(\sigma_z)_{z=0}$ の条件を考慮する。式(12)を式(6)の第2式と3式に代入すれば

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty [a_n g_1(\lambda) Z_n(\lambda) + b_n g_2(\lambda) F_n(\lambda)] J_0(\lambda r)\,d\lambda = 1 \qquad (r_i\le r\le r_0) \tag{13}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty [a_n g_2(\lambda) Z_n(\lambda) + b_n g_3(\lambda) F_n(\lambda)]\lambda J_0(\lambda r)\,d\lambda = 0 \qquad (r_i<r<r_0) \tag{14}$$

を得る。ここで

$$g_1(\lambda) = \frac{\cos\eta 2\lambda\eta - 1}{2\lambda\eta+\sin\eta 2\lambda\eta} \quad , \quad g_2(\lambda) = 2\,\frac{\sin\eta\lambda\eta + \lambda\eta\cos\eta\lambda\eta}{2\lambda\eta+\sin\eta 2\lambda\eta} \quad , \quad g_3(\lambda) = \frac{2\lambda^2\eta^2 + 1 - \cos\eta 2\lambda\eta}{2\lambda\eta+\sin\eta 2\lambda\eta}$$
$$a_n = -(1-\nu)a_n'/G\varepsilon_0 \quad , \quad b_n = -b_n'/\varepsilon_0 \tag{15}$$

式(13)と(14)は共に r とは無関係に成立しなければならない。そこで，ゲーゲンバウアーの加法定理

$$J_0(\lambda r) = Z_0(\lambda) + 2\sum_{m=1}^{\infty} Z_m(\lambda)\cos m\phi \qquad (r_i\le r\le r_0) \tag{16}$$

を式(13),(14)に代入すれば

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty [a_n g_1(\lambda) Z_n(\lambda) + b_n g_2(\lambda) F_n(\lambda)]\left[Z_0(\lambda) + 2\sum_{m=1}^{\infty} Z_m(\lambda)\cos m\phi\right] d\lambda = 1 \tag{17}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty [a_n g_2(\lambda) Z_n(\lambda) + b_n g_3(\lambda) F_n(\lambda)]\lambda\left[Z_0(\lambda) + 2\sum_{m=1}^{\infty} Z_m(\lambda)\cos m\phi\right] d\lambda = 0 \tag{18}$$

となり，式(17)と(18)の両辺の ϕ に関する係数を等置して

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty [a_n g_1(\lambda) Z_n(\lambda) + b_n g_2(\lambda) F_n(\lambda)] Z_m(\lambda)\,d\lambda = \delta_{0m} \\ &\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty [a_n g_2(\lambda) Z_n(\lambda) + b_n g_3(\lambda) F_n(\lambda)]\lambda Z_m(\lambda)\,d\lambda = 0 \end{aligned}\right\} \quad (m=0,1,\cdots) \tag{19}$$

を得る。従って，本問題は式(19)の無限連立一次方程式を解く問題に帰着されたことになる。式(19)の計算を行う上で，第2式における m 番目から $m+2$ 番目の式を順次差し引けば無限連立一次方程式の係数行列は対称になって都合が良く，本問題は結局次の様な無限連立一次方程式を解く問題になる。

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty [a_n g_1(\lambda) Z_n(\lambda) + b_n g_2(\lambda) F_n(\lambda)] Z_m(\lambda)\,d\lambda = \delta_{0m} \\ &\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty [a_n g_2(\lambda) Z_n(\lambda) + b_n g_3(\lambda) F_n(\lambda)] F_m(\lambda)\,d\lambda = 0 \end{aligned}\right\} \quad (m=0,1,\cdots) \tag{20}$$

ここで，δ_{0m} $(m=0,1,\cdots)$ はクロネッカデルタである。式(20)を解いて a_n と b_n を求めれば，式(12)より $C(\lambda)$ と $D(\lambda)$ は

$$C(\lambda) = \frac{G\varepsilon_0}{1-\nu} g_1(\lambda)\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sin\eta\lambda\eta} a_n Z_n(\lambda) - b_n F_n(\lambda)\right\} \quad , \quad D(\lambda) = \frac{G\varepsilon_0}{1-\nu}\sum_{n=0}^{\infty} b_n F_n(\lambda) \tag{21}$$

となり，式(5)および式(21)を用いて全ての変位と応力が求められる。

なお，本問題において $b_n=0$ とすれば，式(20)に対応する無限連立一次方程式は

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^\infty g_1(\lambda) Z_m(\lambda) Z_n(\lambda)\,d\lambda = \delta_{0m} \quad (m=0,1,\cdots) \tag{22}$$

となり，なめらかな剛体床上に置かれた厚板の表面を円環状剛体パンチで押し込む場合[4]，すなわち本問題の孔の無い場合に一致し，更に $t \to \infty$ とすれば，得られる無限連立一次方程式は

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} Z_{m(\lambda)} Z_{n(\lambda)} d\lambda = \delta_{0m} \tag{23}$$

となって半無限体表面を円環状剛体パンチで ε_0 だけ押し込む場合[5]に一致する。

3. 厚板両面の変位と応力および孔の縁における応力拡大係数

厚板上面($z=h$)と下面($z=0$)における変位と応力は式(21)を式(5)に代入し，それぞれ $z=h$，$z=0$ とすれば得られるが，次の様にすれば更に容易に求めることができる。

いま，λ が十分に大きければ，式(10)と(15)より

$$\left.\begin{aligned} &\lambda F_{n(\lambda)} \longrightarrow -\frac{2(n+1)}{\pi r_0 b\sqrt{r_0 b}}\left\{(-1)^n r_0 \cos\lambda r_0 + r_i \sin\lambda r_i\right\} \\ &g_{1(\lambda)} \longrightarrow 1\ ,\ g_{2(\lambda)} \longrightarrow 0\ ,\ g_{3(\lambda)} \longrightarrow -1 \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

であることを考慮して

$$\lambda F_{n(\lambda)} J_0(\lambda r) = \left[\lambda F_{n(\lambda)} + 2(n+1)\frac{(-1)^n r_0 \cos\lambda r_0 + r_i \sin\lambda r_i}{\pi (r_0 b)^{3/2}}\right] J_0(\lambda r)$$

$$- \frac{2(n+1)}{\pi (r_0 b)^{3/2}}\left\{(-1)^n r_0 \cos\lambda r_0\, J_0(\lambda r) + r_i \sin\lambda r_i\, J_0(\lambda r)\right\} \tag{25}$$

と書換えることにより，例えば厚板下面の $(\sigma_z)_{z=0}$ は次の様に表示できる。

$$-\frac{1-\nu}{G\varepsilon_0}(\sigma_z)_{z=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[g_{2(\lambda)} a_n Z_{n(\lambda)} + \left\{1+g_{3(\lambda)}\right\} b_n F_{n(\lambda)}\right] \lambda J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_0^{\infty} \left[\lambda F_{n(\lambda)} + \frac{2(n+1)}{\pi (r_0 b)^{3/2}}\left\{(-1)^n r_0 \cos\lambda r_0 + r_i \sin\lambda r_i\right\}\right] J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$+ \frac{2}{\pi (r_0 b)^{3/2}}\left\{\frac{r_0 H(r-r_0)}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) b_n + \frac{r_i H(r_i - r)}{\sqrt{r_i^2 - r^2}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_n\right\} \tag{26}$$

ここで，$H(x)$ はヘビサイドのステップ関数である。式(26)の無限積分は，λ の増加とともにその第1項の被積分関数は急速に零に収束し，第2項のそれは $\lambda^{-3/2}$ のオーダで小さくなるから数値積分によっていずれも有限値となる。従って，$(\sigma_z)_{z=0}$ は環状孔の両縁で特異性を有し，$r \to r_i - 0$ と $r \to r_0 + 0$ でいずれも無限大になることがわかる。その他の変位や応力も同様にして求められるが，ここでは表面変形および接触応力に関連する変位と応力成分に限って示すことにすれば，次の様になる。

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(w_z)_{z=0}}{\varepsilon_0} = \begin{cases} 0 & (0 \le r \le r_i\ ,\ r_0 \le r) \\ -\dfrac{2}{\pi r_0 b}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(n+1)\phi & (r_i \le r \le r_0) \end{cases} \\ &\frac{(w_z)_{z=h}}{\varepsilon_0} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\left\{1-g_{1(\lambda)}\right\} a_n Z_{n(\lambda)} - g_{2(\lambda)} b_n F_{n(\lambda)}\right] J_0(\lambda r) d\lambda - \sum_{n=0}^{\infty} a_n I_0^n & (0 \le r < r_i\ ,\ r_0 < r) \\ -1 & (r_i \le r \le r_0) \end{cases} \\ &-\frac{1-\nu}{G\varepsilon_0}(\sigma_z)_{z=h} = \begin{cases} 0 & (0 \le r < r_i\ ,\ r_0 < r) \\ \dfrac{1}{\pi r_0 b \sin\phi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\phi & (r_i < r < r_0) \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

ここで，I_0^n は文献(6)と同様にして容易に計算できる。

円環状剛体パンチを ε_0 だけ押し込むのに要する全荷重 P は式(27)の第3式を用いて

$$P=-2\pi\int_{r_0}^{r_i}(\sigma_z)_{z=0}\,r\,dr=\frac{2G\varepsilon_0}{1-\nu}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^{\pi}\cos n\phi\,d\phi=\frac{2\pi G\varepsilon_0}{1-\nu}a_0 \tag{28}$$

となり，Pは係数a_0のみに依存する。

パン子接触部における$(\sigma_z)_{z=0}$と剛体床接触部における$(\sigma_z)_{z=0}$は式(27),(26)より明らかなようにいずれもパン子面端と孔の両縁でそれぞれ特異性を有し，応力拡大係数を考えることもできるが，ここでは特に剛体床の環状孔両縁における応力拡大係数に限って考慮することにして内外径縁におけるK_{Ii}とK_{Io}を

$$K_{Ii}=\lim_{r\to r_i-0}\sqrt{2\pi(r_i-r)}\,(\sigma_z)_{z=0}\quad,\quad K_{Io}=\lim_{r\to r_o+0}\sqrt{2\pi(r-r_o)}\,(\sigma_z)_{z=0} \tag{29}$$

でそれぞれ定義すれば

$$-\frac{(1-\nu)\sqrt{r_o}}{G\varepsilon_0}K_{Ii}=\frac{2}{r_o b}\sqrt{\frac{r_o r_i}{\pi r_i b}}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_n\quad,\quad -\frac{(1-\nu)\sqrt{r_o}}{G\varepsilon_0}K_{Io}=\frac{2r_o}{r_o b\sqrt{\pi r_o b}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)b_n \tag{30}$$

となる。

4. 数値結果

a_nとb_nを決定するためには式(20)の係数を求めなければならず，それらを次の様にして求めた。いま，未知係数をいずれも有限な項数Nで打ち切って解くものとすれば，$2N$元の連立一次方程式を解かなければならない。そこで，係数行列のm行n列目の値を$A_{m,n}$とすれば

$$A_{m,n}=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\infty}\{g_1(\lambda)-1\}Z_m(\lambda)Z_n(\lambda)\,d\lambda+\int_0^{\infty}Z_m(\lambda)Z_n(\lambda)\,d\lambda & (m\leqq N\ ,\ n\leqq N)\\ \displaystyle\int_0^{\infty}g_2(\lambda)\,Z_m(\lambda)F_n(\lambda)\,d\lambda & (m\leqq N\ ,\ n\geqq N+1)\\ \displaystyle\int_0^{\infty}g_2(\lambda)\,F_m(\lambda)Z_n(\lambda)\,d\lambda & (m\geqq N+1\ ,\ n\leqq N)\\ \displaystyle\int_0^{\infty}\{g_3(\lambda)+1\}F_m(\lambda)F_n(\lambda)\,d\lambda-\int_0^{\infty}F_m(\lambda)F_n(\lambda)\,d\lambda & (m\geqq N+1\ ,\ n\geqq N+1)\end{cases} \tag{31}$$

の様に二つの項に分けることができる。式(31)の右辺の第1項はいずれも被積分関数がλの増加とともに急速に零に近づくから数値積分によって容易に求めることができ，第2項は共に文献(7)と同様に十分大きなλまでは数値積分を行い，さらに大きなλに対する積分はベッセル関数の漸近近似式を用いて求めることができる。表1は，板厚を$t/r_o=1$とし，$r_i/r_o=0.25,0.5,0.75$の場合における係数a_nとb_nを示したものであり，r_i/r_oが小さくなると収束は共に遅くなる傾向がある。項数の影響を調べるために，例えば$r_i/r_o=0.25$では$N=12$とすれば変位と応力は十分に収束し，$r_i/r_o=0.5$の場合には$N=8$，$r_i/r_o=0.75$の場合には$N=6$とすれば十分であることをあらかじめ確めた。

表1　係数 a_n と b_n $(t/r_o=1)$

r_i/r_o	0.25		0.5		0.75	
n	a_n	b_n	a_n	b_n	a_n	b_n
0	1.01111507	0.21499097	1.14689826	0.10834378	1.08677577	0.02551199
1	-0.68577468	0.06127605	-0.44092100	0.01807675	-0.20880365	0.00186767
2	-0.05964313	0.02101292	-0.05285298	0.00304072	-0.01818894	0.00010520
3	-0.02114303	0.00915766	-0.00981166	0.00070146	-0.00150939	0.00000897
4	-0.01194468	0.00436883	-0.00361092	0.00018904	-0.00019738	0.00000100
5	-0.00640468	0.00217253	-0.00100281	0.00005315	-0.00000456	0.00000015
6	-0.00295748	0.00111173	-0.00028017	0.00001486		
7	-0.00136492	0.00058176	-0.00004053	0.00000440		
8	-0.00069738	0.00030886				
9	-0.00031551	0.00016665				
10	-0.00021629	0.00009006				
11	-0.00004845	0.00004981				

図2は，$h/r_0=0.5$で一定とし，板厚の変化によって層板上面の$(w_z)_{z=h}$(一点鎖線)とパンチ接触部の$(\sigma_z)_{z=h}$(実線)がどの様に変るかを調べたものである。また，剛体床の環状孔がこれらの分布にいかなる影響を与えるかについて調べるため剛体床に孔が無い場合の結果を破線と点線で各々示し，合わせて$r\to\infty$すなわち半無限体の結果についても示した。パンチ非接触部における$(w_z)_{z=h}$は孔の無い場合と同様の分布傾向を呈し，板が薄い程値は小さく，板厚が増加するとともに変位量も大きくなって半無限体の結果に漸近する。板厚が小さい場合の$(w_z)_{z=h}$は孔の影響を受けて孔の無い場合よりも値は大きく，その差は板が薄い程大きいが，板が厚くなるとともに小さくなり，$r/r_0\geq 5$となればほぼこれらの値は一致して孔の影響は消失することがわかる。他方，パンチ接触部の$(\sigma_z)_{z=h}$はパンチの両縁でいずれの板厚の場合も無限大になり，板が薄い程接触圧力は大きくなって孔の無い場合と同様な分布傾向を示すが，板厚が小さい場合には孔の影響を受けて孔の無い場合よりも接触圧力は小さく，板が薄い程両者の差は大きくなる。板が厚くなるにしたがって$(\sigma_z)_{z=h}$は半無限体の結果に漸近するが，$r/r_0\geq 5$となれば孔の無い場合の結果にほぼ一致し，孔の影響は消失する。

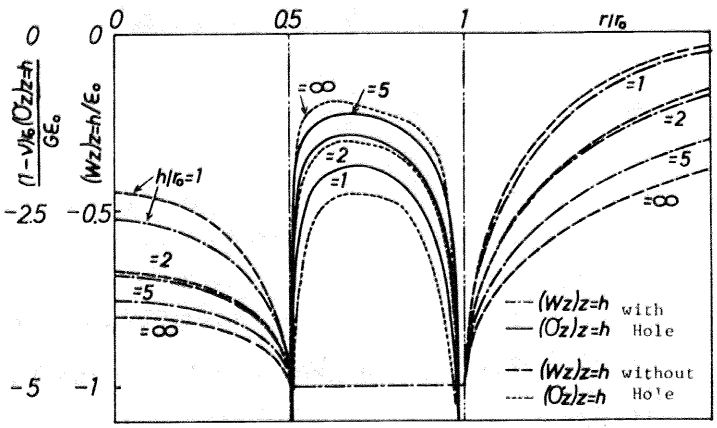

図2　$(w_z)_{z=h}$と$(\sigma_z)_{z=h}$の分布　($h/r_0=0.5$)

図3は，板厚一定で$h/r_0=1$とし，$h/r_0=0.25, 0.5, 0.75$の場合における板上面の$(w_z)_{z=h}$と$(\sigma_z)_{z=h}$の分布を示した図である。h/r_0が小さい程パンチ内側における$(w_z)_{z=h}$は大きく，孔の影響を強く受けて孔の無い場合との差も大きくなる。パンチ両縁における$(w_z)_{z=h}$の半径方向勾配はいずれのh/r_0の場合も無限大である。よるr_0における$(w_z)_{z=h}$は$h/r_0=0.25$および0.5の場合にはほぼ一致した分布になるが，$h/r_0=0.75$の場合には孔の無い場合の結果に極めて近いものとなり，他のh/r_0の結果と異なる。他方，$(\sigma_z)_{z=h}$は孔の無い場合よりもいずれも値は小さく，h/r_0が大きくなる程孔の影響を強く受けてこれらの差は大きくなる。従って，板厚が一定ならば，孔およびパンチの幅が小さくなってh/r_0が大きくなる程表面変形と接触圧力に及ぼす孔の影響は減少することになる。

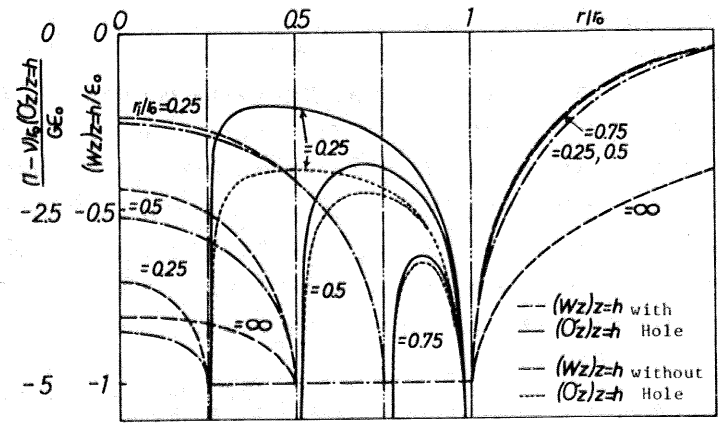

図3　$(w_z)_{z=h}$と$(\sigma_z)_{z=h}$の分布　($h/r_0=1$)

図4は，$h/r_0=0.5$で一定とし，孔部における層板下面の$(w_z)_{z=0}$および剛体床接触部の$(\sigma_z)_{z=0}$の板厚による変化を示した図であり，縦軸にはいずれも式(28)によるパンチ押し付け力Pで順次元化した値を用いた。孔部における$(w_z)_{z=0}$は板が薄い程大きく，板が厚くなるとともに変形量は減少する。これに対して$(\sigma_z)_{z=0}$は板が薄い程大きく，孔の両縁，$r\to r_0-0$と$r\to r_0+0$で無限大になるが，無限大への漸近のしかたは板が厚く

なる程著しくなるとともに孔の両縁の影響も局部的になることがわかる。本結果ではいずれの板厚の場合も$(\sigma_z)_{z=0}$は負で圧縮応力であるが，板が更に薄くなれば環状孔の外側領域の一部で$(\sigma_z)_{z=0}$は引張応力になることも予想され，その場合は板下面が剛体床から離れることを意味し，本解析は適用範囲外となる。

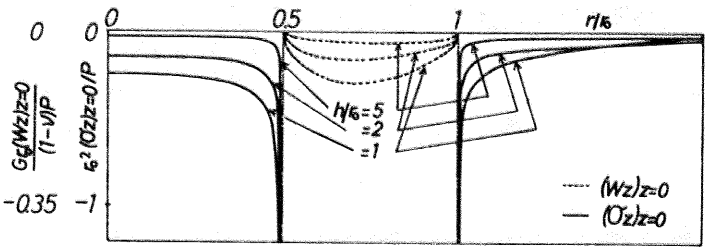

図4　$(w_z)_{z=0}$と$(\sigma_z)_{z=0}$の分布　($h/r_0=0.5$)

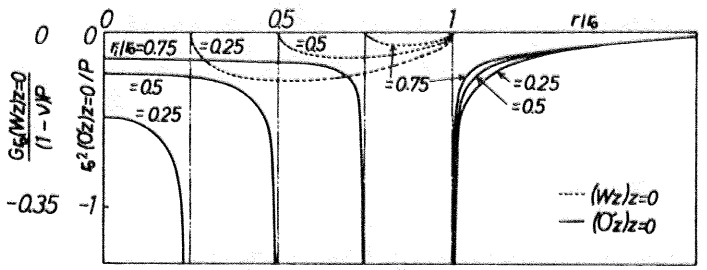

図5　$(w_z)_{z=0}$と$(\sigma_z)_{z=0}$の分布　($h/r_0=1$)

図5は，板厚一定で$h/r_0=1$とし，$a/r_0=0.25, 0.5, 0.75$の場合における板下面の$(w_z)_{z=0}$と$(\sigma_z)_{z=0}$の分布を示した図である。孔部における$(w_z)_{z=0}$の分布形状はいずれも対称ではなく，a/r_0が小さくなって孔の幅が大きくなる程孔部における板下面の変形量は大きくなる。接触圧力$(\sigma_z)_{z=0}$は孔の内側においてもa/r_0が大きくなって孔の幅が小さくなる程値は小さく，孔の外径縁近傍においても同様な傾向を示すが，$h/r_0\geq 1$ではいずれも接触圧力はほぼ一致した値になってa/r_0，すなわち環状孔の幅の大小には無関係になることがわかる。

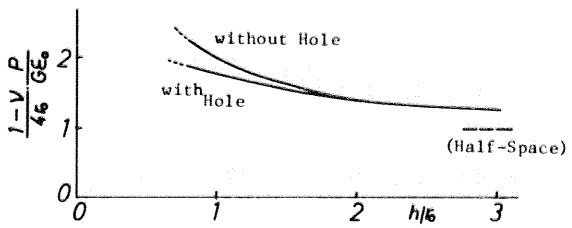

図6　パンチ押し付け力の板厚による変化($a/r_0=0.5$)

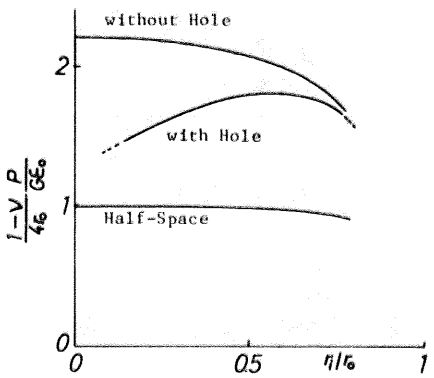

図7　パンチ押し付け力とa/r_0の関係
($h/r_0=1$)

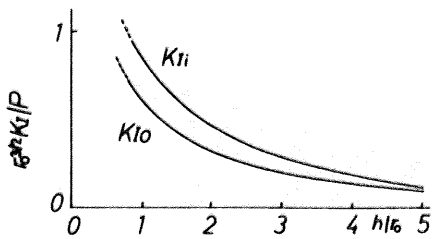

図8　K_Iの板厚による変化($a/r_0=0.5$)

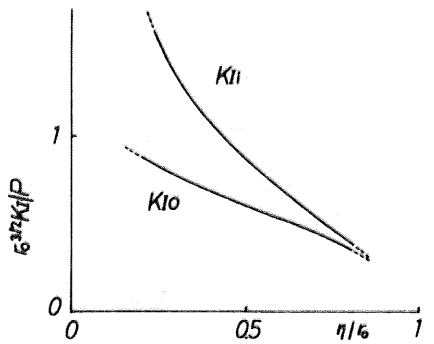

図9　K_Iとr_i/r_0の関係($h/r_0=1$)

図6と7は，$a/r_0=0.5$で一定とした場合のパンチ押し付け力Pの板厚による変化および板厚一定で$h/r_0=1$とした場合のPとa/r_0の関係をそれぞれ示した図である。図6では，板厚が小さい場合には孔の無い場合よりもPの値は小さく，板が厚くなるとともに両者は漸

近し，板厚が $h/b_0 \geq 2$ となればこれらはほぼ一致した値になり，パンチ押し付け力に及ぼす孔の影響は消失することがわかる。図7では，孔の無い場合よりも常に P の値は小さく，b/b_0 とともに単調に減少する。

図8と9は，$b/b_0 = 0.5$ で一定とした場合の式(30)による環状孔の内外径縁における応力拡大係数 K_{II} と K_{I0} の板厚による変化および $h/b_0 = 1$ で板厚を一定にした場合の応力拡大係数と b/b_0 の関係をそれぞれ示した図である。なお，これらの図の縦軸にはいずれもパンチ押し付け力 P による無次元化した値を用いた。図8においては，板厚による変化は共に同様な傾向を示して板厚の増加とともに単調に減少するが，K_{II} は K_{I0} よりも大きく，板が薄い程その差は大きい。また図9では，K_{II} は常に K_{I0} よりも大きく，b/b_0 が小さくなって孔の幅が大きくなるにしたがってこれらの値は共に増加するが，K_{I0} は穏やかに増加するのに対し，K_{II} は急激に大きくなる。

5. 結 言

環状孔を有する剛体床上に置かれた無限厚板の表面を円環状剛体パンチで押し込む場合を三次元弾性論に基づいて解析し，板の上下両面における表面変位および接触圧力の分布等を示すとともにこれらに及ぼす板厚の影響を調べた。更には，剛体床に孔が存在しない場合の結果と比較することによって応力拡散等に及ぼす孔の影響についても合わせて明らかにした。

参 考 文 献

(1) Low, R. D., Quart. Appl. Math., XXII,(1964),153.

(2) Zakorko, V. N., P M M., 38-1(1974),131.

(3) Dhaliwal, R. S. and Singh, B. M., Int. J. Engng Sci., 15(1977),421.

(4) 田中・澤谷・小泉・中原., 機論, 41-349(昭50-9),2567.

(5) Erdelyi, A., Tables of Integral Transforms, (1965), McGraw-Hill.

(6) 原・澤谷・小泉・中原., 機論, 43-372(昭52-8), 2858.

(7) 原・澤谷・小泉・中原., 機論, 45-399(昭54-11), 1382.