第52回自動制御連合講演会
2009年11月21,22日(大阪大学)

DEA において実現可能性を考慮した効率測定

Efficient measures based on careful study of the feasibility in DEA

○ 鷲尾 哲, 山田 修司, 田中 環 (新潟大学), 谷野 哲三 (大阪大学)
Satoshi WASHIO, Syuuji YAMADA, Tamaki TANAKA (Niigata University) and Tetsuzo TANINO (Osaka University)

Abstract In this study, we suggest four kinds of improvement indices based on careful study of the feasibility for inefficient DMUs to become an efficient unit in the CCR model with the minimal change of input and output values. Moreover, we propose an algorithm for calculating the proposed indices based on quadratic programming techniques. Furthermore, we propose four efficient measure models based on careful study of the feasibility.

1 はじめに

本研究では, 包絡分析法（DEA）の効率分析において, 非効率的と評価された意思決定主体（DMU）に対し, 実現可能性を考慮した改善指標とその指標を求めるアルゴリズムを提案する. また, 実現可能性を考慮した効率測定モデルを提案する.

2 DEA

本研究では, m 個の入力, s 個の出力をもつ n 個の DMU を考える. DMU_k $(k \in \{1,\dots,n\})$ の入力ベクトルを $x_k := (x_{1k},\dots,x_{mk})^\top$, 出力ベクトルを $y_k := (y_{1k},\dots,y_{sk})^\top$ とする. また, 次を仮定する.

(A1) $x_k > 0,\ y_k > 0\ \forall k \in \{1,\dots,n\}$.

(A2) $(x_{k_1}^\top, y_{k_1}^\top) \neq (x_{k_2}^\top, y_{k_2}^\top)\ \forall k_1, k_2\ (k_1 \neq k_2)$.

(A3) $n > m + s$.

(A4) $\dim(\{x_1,\dots,x_n\} \times \{y_1,\dots,y_n\}) = m + s$.

このとき, DMU_k $(1 \le k \le n)$ の効率を測定する入力指向の CCR モデル [2] は次のように定式化される.

$$\begin{cases} \text{minimize} & \theta \\ \text{subject to} & \theta x_{ik} - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \ge 0\ i = 1,\dots,m, \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - y_{rk} \ge 0\ r = 1,\dots,s, \\ & \theta \in R,\ \lambda_j \ge 0\ j = 1,\dots,n. \end{cases}$$

また, CCR モデルに対し $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ という制約条件を加えたものが BCC モデル [1] である. 各モデルにおいて, 効率的な DMU が構成するすべての包絡面を効率的フロンティアと呼び, 効率的フロンティア上の DMU は一様に効率的であると評価される. CCR モデル, BCC モデルの生産可能集合は次のように定義される.

$$\mathrm{T_{CCR}} = \left\{ (x,y) : x \ge \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j,\ 0 \le y \le \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \right. \\ \left. \text{for some } \lambda \ge 0 \right\}.$$

$$\mathrm{T_{BCC}} = \left\{ (x,y) : x \ge \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j,\ 0 \le y \le \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j, \right. \\ \left. \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \text{ for some } \lambda \ge 0 \right\}.$$

3 改善指標

本研究では, CCR モデルにおいて非効率的な DMU_k に対して DMU_k から CCR モデルの効率的フロンティア上にある距離が最小となる点を求める. ここで, 距離を半正定値対称行列 $A \in R^{(m+s)\times(m+s)}$ を用いて次のように定義する.

$$||z||_A := \sqrt{z^\top A z},\ z \in R^{m+s}.$$

また, $\mathrm{F_{CCR}}$ を CCR モデルの効率的フロンティアとする.

非効率的な DMU_k に対して $P_k := (x_k^\top, y_k^\top)^\top$ とする. そこで, $d_k^1,\dots,d_k^4$ を次の問題 $(\mathrm{ID}_k^1),\dots,(\mathrm{ID}_k^4)$ の最適解とし, $d_k^1,\dots,d_k^4$ を DMU_k に対する改善指標として提案する.

$$(\mathrm{ID}_k^1) \begin{cases} \min & ||z||_A \\ \text{s.t.} & z \in \mathrm{F_{CCR}} - P_k. \end{cases}$$

$$(\mathrm{ID}_k^2) \begin{cases} \min & ||z||_A \\ \text{s.t.} & z \in \mathrm{F_{CCR}} - P_k, \\ & z \in \mathrm{T_{BCC}} - P_k. \end{cases}$$

$$(\mathrm{ID}_k^3)\begin{cases}\min & ||z||_A\\ \text{s.t.} & z\in \mathrm{F}_{\mathrm{CCR}}-P_k,\\ & \alpha_h\le z_h+P_{h,k}\le\beta_h\\ & h=1,\ldots,m,\end{cases}$$

ただし α,β は意思決定者が決定する制限ベクトル.

$$(\mathrm{ID}_k^4)\begin{cases}\min & ||z||_A\\ \text{s.t.} & z\in \mathrm{F}_{\mathrm{CCR}}-P_k,\\ & ||z_{t_q}-P_{t_q,k}||\le||z_{t_{q+1}}-P_{t_{q+1},k}||\\ & q=1,\ldots,m+s-1,\end{cases}$$

ただし $\{t_1,\ldots,t_{m+s}\}=\{1,\ldots,m+s\}$.

各指標 $d_k^1,\ldots,d_k^4$ は問題 $(\mathrm{ID}_k^1),\ldots,(\mathrm{ID}_k^4)$ を解くことで得られる. このとき $P_k+d_k^1$ は $\mathrm{F}_{\mathrm{CCR}}$ 上で P_k から最短距離となる点である. 2 番目の指標 d_k^2 を求める問題 (ID_k^2) は問題 (ID_k^1) に対して制約条件 $z\in\mathrm{T}_{\mathrm{BCC}}-P_k$ を加えることによって構成される. この制約を加える理由は $\mathrm{T}_{\mathrm{BCC}}$ が DMUs にとって実現可能な領域であると考えたからである. 問題 (ID_k^3) の実行可能領域は問題 (ID_k^1) の実行可能領域を制約条件 $\alpha_h\le z_h+P_{h,k}\le\beta_h,\ h=1,\ldots,m$ を満たしている領域に限定することによって定義される. この制約を加えることによって意思決定者は入力の変化量を調節できる. さらに, 制約 $\alpha_h\le z_h+P_{h,k}\le\beta_h,\ h=1,\ldots,m$ を $\alpha_h\le z_h+P_{h,k}\le\beta_h,\ h=m+1,\ldots,m+s$ に置き換えることによって出力の変化量を調節できる. 問題 (ID_k^4) は問題 (ID_k^1) に対して制約条件 $||z_{t_q}-P_{t_q}||\le||z_{t_{q+1}}-P_{t_{q+1}}||\ q=1,\ldots,m+s-1$ を加えることによって構成される. また, $\{t_1,\ldots,t_{m+s}\}$ を決定することによって意思決定者は入出力の変化量を調節できる.

ここで, $\mathrm{F}_{\mathrm{CCR}}$ を形成する方程式の添え字集合を S_c とし, S_c の要素数を N_c とする. また, 任意の $j\in S_c$ に対して $\mathrm{F}_{\mathrm{CCR}}$ を形成する方程式は次で与えられるものとする.

$$U_j^\top y-V_j^\top x=0$$

ただし, $U_j\in R^s,\ V_j\in R^m$ である. このとき, 問題 $(\mathrm{ID}_k^1),\ldots,(\mathrm{ID}_k^4)$ に対して次のアルゴリズムを提案する.

アルゴリズム ICCR

ステップ 0

$j\leftarrow 1$ として ステップ 1 へ.

ステップ 1

$w_j:=(-V_j^\top\ U_j^\top)^\top$ とする.

$$(\mathrm{C}_j^k)\begin{cases}\min & ||z||_A\\ \text{s.t.} & z^\top w_j+P_k^\top w_j=0.\end{cases}$$

問題 (C_j^k) の制約条件に対象とする問題の制約条件を加える. 問題 (C_j^k) の最適解を OC_j^k とする. $j=N_c$ ならばステップ 2 へ. そうでなければ $j\leftarrow j+1$ としてステップ 1 へ.

ステップ 2

$j'\in\arg\min\{||OC_j^k||_A : j\in S_c\}$ とし, アルゴリズムを終了する.

アルゴリズム ICCR によって計算された $OC_{j'}^k$ は対象問題の最適解となる.

4 効率測定

本研究では 3 章で提案した改善指標を基にした効率測定モデルを提案する. 実現可能性を考慮した実行可能領域内で CCR 効率となるための変化量によって効率を評価する. 改善指標 d_k^1 に基づくモデルとして次の数理モデルを提案する.

$$\begin{cases}\max & \theta=1-\dfrac{1}{m+s}||z||_A\\ \text{s.t.} & z\in\mathrm{F}_{\mathrm{CCR}}-P_k.\end{cases}$$

この問題の最適解は d_k^1 となり, 効率値は $1-\dfrac{1}{m+s}||d_k^1||_A$ となる. その他の改善指標に対しても同様に考えることができる.

5 おわりに

本研究では, 非効率的と評価された DMU に対し, 効率的フロンティアを形成する方程式を用いて, 実現可能性を考慮した改善指標を提案した. また, その改善指標を基にした効率測定モデルを提案した.

参考文献

[1] Banker, R.D., Charnes, A., Cooper W.W. : "Some models for Estimating Technical and Scale Inefficinecies in Data Envelopment Analysis", Management Scinece 30, pp.1078–1092, 1984.

[2] Charns, A., Cooper, W.W., Rhodes, E. : "Measuring Efficiency of Decision Making Units", European Journal of Operations Research 2, pp.429–444, 1978.