(15) $S_n = 2(T_n-\theta, U_n)$　　$\Phi_n^c\cap[n>N_1]$ 上で

$\quad\;\; = 0$　　　　　　　その他で

と定義するとSchwarzの不等式と(10)により

$$|S_n|^2 \leqq 4\|T_n-\theta\|^2\|U_n\|^2 I_{\Phi_n^c} I_{[n>N_1]}$$
$$\leqq 4K_2\|U_n\|^2$$

(7)によって

(16)　$$\sum E|S_n|^2 < \infty$$

$N_1=N+n_1$ とおくと

$$[n>N_1] = [n-n_1>N] \in \mathfrak{B}_{n-n_1} \subset \mathfrak{B}_n.$$

したがって(15), (10)とSchwarzの不等式により

$$|E[S_n|\mathfrak{B}_n]| = 2|(T_n-\theta, E(U_n|\mathfrak{B}_n))|I_{\Phi_n^c}I_{[n>N_1]}$$
$$\leqq 2\|T_n-\theta\|\|E(U_n|\mathfrak{B}_n)\|I_{\Phi_n^c}I_{[n>N_1]}$$
$$\leqq 2K_2^{1/2}\|E(U_n|\mathfrak{B}_n)\|$$

(8)から

(17)　$$\sum E[S_n|\mathfrak{B}_n] < \infty \quad \text{a. s.}$$

(16), (17)とVenterのLemma 3から

(18)　$\sum S_n$ は a. s. 収束

(2), (11), (15)によって $n>N_1$ に対して $\Phi_n^c\cap\Omega_0$ 上で

$$\|X_{n+1}-\theta\|^2 \leqq (1+\beta_n)\|X_n-\theta\|^2+S_n+\|U_n\|^2-\gamma_n$$

(12)とあわせて $n>N_1$ に対し $\Omega_0$ 上で

$$\|X_{n+1}-\theta\|^2$$
$$\leqq \max[p_n, (1+\beta_n)\|X_n-\theta\|^2+S_n+\|U_n\|^2-\gamma_n]$$

(14), (4), (18), (13), (6)から Derman-Sacks [2] の Lemma 1 を a. s. pointwize に適用することができて結論を得る.

## 文　　献


[1] J. H. Venter, On Dvoretzky stochastic approximation theorems., Ann. Math. Statist. **37** (1966), 1534–1544.

[2] C. Derman and J. Sacks, On Dvoretzky's stochastic approximation theorem, Ann. Math. Statist., **30** (1959), 601–605.

[3] A. Dvoretzky, On stochastic approximation, Proc. Third Berkeley Symp. Math. Statist. Prob., 1 (1956), 39–55.

[4] J. Kiefer and J. Wolfowitz, Stochastic estimation of the maximum of a regression function, Ann. Math. Statist., **23** (1952), 462–466.

[5] H. Robbins and S. Monro, A stochastic approximation method, Ann. Math. Statist., **22** (1951), 400–407.


(1974年9月19日提出, 1976年5月12日再提出)

# Hyperelliptic threefold について

吉原久夫（京大理）

## §1. 序.

$G$ を $\boldsymbol{C}^n$ の固定点なく固有的不連続な affine 変換群で, 軌道空間 $M=\boldsymbol{C}^n/G$ はコンパクトであるとする. $G_0$ を $G$ の移動全体からなる正規部分群であるとして, $G_0$ が有限指数であるとき, $M$ を hyperelliptic manifold, 略して $h$-manifold という. $T=\boldsymbol{C}^n/G_0$ とおくと, $T$ は $M$ の有限不分岐被覆の torus となりもちろん $M$ は Kähler 多様体である. また $H=G/G_0$ とおくと, $H$ は $GL(n, \boldsymbol{C})$ の部分群と同一視でき, これを $H$ の holonomy 表現という. $n=2$ のとき, $H$ は位数 1, 2, 3, 4, 6 の巡回群であった [2]. また $n=3$ のときの $H$ の構造は次の通りである [3]. $H$ が巡回群のときは, $H\cong \boldsymbol{Z}/(d)$, $d=1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12$. $H$ が非巡回可換群のときは, $H\cong\boldsymbol{Z}/(d_1)\oplus\boldsymbol{Z}/(d_2)$, $(d_1, d_2)=(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 12)\cong(4, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (6, 6)$. $H$ が非可換群のときは, $H\cong D_4$; 位数8の二面体群である. 小論では超楕円曲面のときの結果[2]を参照しつつ3次元の $M$ の構造その他について考察する. 記号 $h^i=\dim H^0(M, \Omega^i)$, $i=1, 2, 3$, を全体を通して使う.

## §2. *M* の性質.

$q$ を $M$ の不正則数$=h^1$ とすると, $H$ の holonomy 表現との関係は次の通りである.

**定理 1.** (1)　$q=3 \Longleftrightarrow H=\langle 1_3\rangle$.

(2)　$q=2 \Longleftrightarrow H=\langle A\rangle$　ただし　$A=1\dotplus 1\dotplus a$, $\operatorname{ord}(a)=2, 3, 4, 6$.

(3)　$q=1 \Longleftrightarrow H=\langle A\rangle$　または　$H=\langle A_1\rangle\oplus\langle A_2\rangle$ ただし $A=1\dotplus a_1\dotplus a_2$, $A_1=1\dotplus a_3\dotplus a_4$, $A_2=1\dotplus a_5\dotplus 1$, $a_i\neq 1$, $i\neq 3$, $\operatorname{ord}(A)=2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12$, $\operatorname{ord}(A_j)=2, 3, 4, 6$, $j=1, 2$.

(4)　$q=0 \Longleftrightarrow H=\langle A_1\rangle\oplus\langle A_2\rangle$ または $H=\langle B_1, B_2\rangle$, ただし　$A_1=1\dotplus(-1)\dotplus(-1)$, $A_2=(-1)\dotplus 1\dotplus(-1)$,

$$B_1=(-1)\dotplus\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad B_2=1\dotplus\sqrt{-1}\dotplus(-\sqrt{-1}).$$

したがって $H$ が位数5, 8, 10, 12の巡回群か, または非巡回群のときは, $h^2=0$ となり $M$ は射影的代数多様体である.

証明. $H$ は $T$ の自己同型群であるから自然に $H^0(T, \Omega^1)$ への作用がきまり $H^0(M, \Omega^1)$ は $H^0(T, \Omega^1)$ の $H$ 不変な元全体のなす部分空間となる. したがって

$$q=\frac{1}{|H|}\sum_{A\in H}\operatorname{tr} A$$

であり，これは $H$ の holonomy 表現の単位指標の重複度に等しい．そこで [3] を参照すると上記の結果は容易に得られる．

系 2. $M$ の構造は次の通り．

(1) $q=3 \Longleftrightarrow$ torus

(2) $q=2 \Longleftrightarrow$ 2 次元 torus 上の自明でない楕円曲線 bundle で $h^2=1$.

(3) $q=1 \Longleftrightarrow$ 楕円曲線上の自明でない bundle で fiber は torus または超楕円曲面，しかも $h^2=h^3$. もし fiber が超楕円曲面なら $h^2=0$.

(4) $q=0 \Longleftrightarrow h^2=0$, $M$ の標準 bundle は自明.

証明. $H$ が定理 1 のように表現されているとして，$M$ からの Albanese 写像を考えればよい．$h^i$ の間の関係には Riemann-Roch の定理によって $h^3-h^2+h^1-1=0$ がなりたつことを使う．(3) について，fiber が超楕円曲面なら定理 1 の $A$ の 2 つの固有値 $a_1, a_2$ については，$\mathrm{ord}(a_1)\neq\mathrm{ord}(a_2)$ であるから $h^2=0$. また $H$ が非巡回群のときはもちろん $h^2=0$ である．

**命題 3.** $H$ が次のいずれかの型のとき，$T$ は 3 個の楕円曲線の直積と同種である．

(1) $H=\langle A\rangle$ ただし $A=1\dotplus a_1\dotplus a_2$, $a_1\neq 1$, $a_2\neq 1$, $\mathrm{ord}(a_1)\neq\mathrm{ord}(a_2)$.

(2) $H$ は非巡回群.

さらに，$H\cong \boldsymbol{Z}/(6)\oplus\boldsymbol{Z}/(6)$ のときは，$T$ 自身が 3 個の楕円曲線の直積からなる．

証明. まず上記の型の $H$ のとき，$T$ は Abel 多様体であることに注意する．さて，$A\in H$ によって $\varphi z=(A-1_3)\cdot z$ を考えると，$\varphi$ は $T$ の自己準同型写像で，$A\neq 1_3$ なら，$\varphi(T)\neq 0$, $\neq T$ である．$\varphi$ の像も単純でないことが同様に示せるから前半は証明された．$H$ が (6, 6) 型可換群のときは，$H=\langle A_1\rangle\oplus\langle A_2\rangle$ ただし $A_1=1\dotplus\zeta\dotplus 1$, $A_2=1\dotplus 1\dotplus\zeta$, $\zeta$ は 1 の原始 6 乗根，と表現できる．$a={}^t(a_1, a_2, a_3)\in G_0$ とすると，$(A_1-1_3)a\in G_0$ かつ $(A_2-1_3)a\in G_0$ より ${}^t(0, a_2, 0)\in G_0$ かつ ${}^t(0, 0, a_3)\in G_0$ となるから torus の周期は直積に分解する．

**命題 4.** $H$ が命題 3 にあげたいずれかの型であるか，または $H=\langle A\rangle$, $A=1\dotplus 1\dotplus a$, $a\neq 1$ のとき，$M$ は射影直線 $\boldsymbol{P}^1$ 上の fiber 空間 $f: M\to\boldsymbol{P}^1$ の構造をもち次の性質を満す．

(1) 一般 fiber $f^{-1}(u)$, $u\in\boldsymbol{P}^1$, は互いに双正則同型な曲面からなり，それは $q\neq 1$ のとき torus であり，$q=1$ のとき超楕円曲面である．

(2) 特異 fiber は重複 fiber $mS$ のみで，$S$ は $m$ 次の不分岐被覆に一般 fiber と双正則同型な曲面をもつ．

(3) 特異 fiber $m_iS_i$ の重複度 $m_i$, $i=1, \cdots, r$, のあいだに $\sum_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{m_i}\right)=2$ という関係がある．

証明. $q\neq 2$ のときは，命題 3 より $T$ は 3 個の楕円曲線 $E_i$, $i=1, 2, 3$, の直積と同種である．$K_i=\{g'\in\mathrm{Aut}(E_i)\mid g'z^i=gz^i,\ g\in G_0\}$, $\Delta_i=E_i/K_i$ とすると射影 $E_1\times E_2\times E_3\to E_i$ により $\varphi_i: T\to\Delta_i$ が導かれる．これは fiber が Abel 曲面の bundle である．さらに適当な $i$ に対しては $G_i=\{g'\in\mathrm{Aut}(\Delta_i)\mid g'z^i=gz^i,\ g\in G\}$ がうまく定義できて，$\Delta_i/G_i$ は $\boldsymbol{P}^1$ であり，上記の fiber 空間が得られる．$q=2$ のときも，$E$ を楕円曲線，$T_0$ を $M$ の Albanese torus の有限被覆 torus として，$M$ は有限不分岐被覆に $E\times T_0$ があることがわかるから射影 $E\times T_0\to E$ を用いて上と同様にして得られる．

**注意 5.** $|H|=5, 8, 10$ のときは，$M$ は上記の fiber 空間の構造をもちえない．

**注意 6.** $M=\boldsymbol{C}^3/G$, $M'=\boldsymbol{C}^3/G'$ を 2 つの $h$-manifold とする．$q\neq 1$ のときは，$M$ と $M'$ が同相なら両者の多種数は等しい．なぜなら，$H=G/G_0$ と $H'=G'/G_0'$ は同型になり [3]，$q\neq 1$ のときは，$M$ の多種数は $H$ の群構造で決定されるからである．ところが $q=1$ のときは，次の例のように $M$ と $M'$ が同相でも種数が異なることがある．これは曲面の時と大きな相異点である [2]．$\boldsymbol{C}^3$ の affine 変換 $g$ は次のように表わされるとする．$gz=A(g)z+a(g)$, $z\in\boldsymbol{C}^3$, $A(g)\in GL(3, \boldsymbol{C})$, $a(g)\in\boldsymbol{C}^3$. さて $\omega$ を 1 の原始 3 乗根として，$G, G'$ を次のように定義する．$G=\langle g, l_1, \cdots, l_6\rangle$, $A(g)=1\dotplus\omega\dotplus\omega$, $a(g)={}^t(1/3, 0, 0)$, かつ $l_j$, $j=1, \cdots, 6$ は移動で，$a(l_1)={}^t(1, 0, 0)$, $a(l_2)={}^t(0, 1, 0)$, $a(l_3)={}^t(0, 0, 1)$, $a(l_4)={}^t(\omega, 0, 0)$, $a(l_5)={}^t(0, \omega, 0)$, $a(l_6)={}^t(0, 0, \omega)$ とする．また $G'=\langle g', l_1', \cdots, l_6'\rangle$ は，$A(g')=1\dotplus\omega\dotplus\omega^2$, $a(g')={}^t(1/3, 0, 0)$ かつ $l_j'$, $j=1, \cdots, 6$ は移動で $l_1'=l_1, \cdots, l_5'=l_5$, $a(l_6')={}^t(0, 0, \omega^2)$ とする．このとき $M$ と $M'$ は同相である．なぜなら，$\boldsymbol{C}^3$ を $\boldsymbol{R}^6$ と $(z^1, z^2, z^3)\mapsto(x^1, x^2, x^3, y^1, y^2, y^3)$, $z^i=x^i+\sqrt{-1}\,y^i$ によって同相とみなす．$A(g)=A(g)_1+\sqrt{-1}A(g)_2$, $a(g)=a(g)_1+\sqrt{-1}a(g)_2$, $A(g)_i$ と $a(g)_i$ はおのおの実行列と実ベクトルと表わして，

$$\hat{g}u=\begin{pmatrix}A(g)_1 & -A(g)_2\\ A(g)_2 & A(g)_1\end{pmatrix}u+\begin{pmatrix}a(g)_1\\ a(g)_2\end{pmatrix},\qquad u\in\boldsymbol{R}^6$$

によって $\boldsymbol{R}^6$ の実 affine 変換 $\hat{g}$ を定義する．そこで，$\hat{G}=\{\hat{g}\mid g\in G\}$ とする．このとき $P=1_5\dotplus(-1)$ によって $\hat{G}'=P\hat{G}P^{-1}$ となるから $M$ と $M'$ は同相である．明らかに $M$ と $M'$ は射影的代数多様体であり，$\dim H^0(M, \Omega^3)\neq\dim H^0(M', \Omega^3)$ かつ $\dim H^0(M, \Omega^2)\neq\dim H^0(M, \Omega^2)$ である．

**注意 7.** $\Theta$ を $M$ 上の正則ベクトル場の芽の作る層として，$d=\dim H^1(M, \Theta)$ とおく．このとき

$$d=\frac{1}{|H|}\sum_{A\in H}(\mathrm{tr}\,A)^2$$

であり，$q=3\Leftrightarrow d=9$，$q=2\Rightarrow d=5$ または 4，$q=1\Rightarrow d=5,3,2$ または 1，$q=0\Rightarrow H$ が可換のとき $d=3$，非可換のとき $d=2$．ところが 4 次元の $h$-manifold で変形をもたない例があることを注意しておく．

**命題 8.** 射影的代数多様体 $V$ が命題 4 の fiber 空間の構造をもてば，$V$ は $h$-manifold である．

証明．楕円曲線 $E$ と分岐被覆 $r: E\to \boldsymbol{P}^1$ が存在して $f: V\to \boldsymbol{P}^1$ から導かれる fiber 空間 $f^*: V^*\to E$ は特異 fiber なしで，すべての fiber は互いに同型な Abel 曲面からなっている．しかも $V^*$ は $V$ の不分岐被覆であるから，$V$ は $h$-manifold である．

**命題 9.** $M$ の代数次元が 1 のときは，$M$ からの algebraic reduction $M\to\Delta$ で，$\Delta$ は $q\neq 2$ のときは楕円曲線，$q=2$ のときは有理曲線であり，一般 fiber は torus であるものが存在する．

証明．$q=3$ のときは明らかである．$q=2$ のときは命題 4 の fiber 空間が上記の性質をもつことがわかる．$q=1$ のときは，Albanese 写像によって上記の fiber 空間が得られることが容易にわかる．なお $q=0$ となることはない．

$C(M)$ を $M$ 上の有理型関数全体の作る体とすると，上の命題より次のことが言えている．

**系 10.** $M$ の代数次元が 1 のとき，$q=2\Leftrightarrow \boldsymbol{C}(M)$ は有理関数体である．

**補足．** 最近の論説[1]で井上氏が‘微分構造は同じでも変形で移れない二種以上の複素構造をもつ射影的代数多様体の例’を探しておられたが，注意 6 の $M$ と $M'$ はちょうどその例になっている．なぜなら，torus の変形は torus という事実を用いて，$h$-manifold の変形では族はすべて Kähler 多様体であり，したがって種数 $=h^3$ は一定であるからである．さらに強く次のことが成立することを注意しておく．‘$h$-manifold の変形はやはり $h$-manifold で，holonomy 表現は変形で不変である，ただし同値な表現は同じとみなす．’この結果によれば井上氏の求められる例は $h$-manifold の中にいくらでもあることがわかる．

### 文　　献

[1] 井上政久，解析曲面の一実例，数学，27 (1975)，358–364.
[2] T. Suwa, On hyperelliptic surfaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I, XVI (1970), 469–476.
[3] K. Uchida and H. Yoshihara, Discontinuous groups of affine transformations of $\boldsymbol{C}^3$, Tôhoku Math. J., 28 (1976), 89–94.

(1975 年 11 月 18 日提出)

# 記　　　録

## Y. T. Siu 教授講演記録

### Extension of meromorphic maps

(1975 年 10 月 2 日，函数論分科会特別講演)

$\Omega$ を $C^n$ 上の Riemann の領域，$\tilde{\Omega}$ をその正則被とする．$M$ が compact Kähler manifold で，$f:\Omega\to M$ が有理型のとき，$f$ は $\tilde{\Omega}\to M$ に有理型接続できるか？　この問題を論じる．Griffiths は $\tilde{\Omega}$ が $C^n$ の単位開球，$\Omega=\tilde{\Omega}-\{0\}$，$f$ が正則のとき，この問題を肯定的に解いた．教授は近刊の論文で，$X$ が compact manifold，$A$ が余次元 $\geqq 1$ の $X$ の subvariety，$G$ を $A$ の余次元 1 のすべての枝と交わる開集合とするとき，$\Omega=(X-A)\cup G$ に対して，また，$X$ が $n$ 次元の complex manifold で $A$ が zero Hausdorff $(2n-3)$-measure をもつ $X$ の closed subset のとき，$\Omega=X-A$ に対して，問題を解いた．さらに，最近，擬凹状の境界を越えて接続し，問題の完全な解答に肉薄した．

### The general Levi problem

(1975 年 10 月 6 日，於九州大学)

Levi の問題とは，境界に対する exhaustion function による strict pseudoconvexity，または，局所 Stein 性をもつ complex space の正則凸性または Stein 性を示すことである．前者での Levi の問題の解は Grauert と Narasimhan による．後者での一般の Levi の問題は次の如し：$\pi: X\to Y$ を正則写像，$Y$ を Stein とし，$\pi^{-1}(U)$ が Stein であるような $Y$ の開被覆 $\{U\}$ があれば，$X$ は Stein か？　この問題は正しいと思うが，主な困難点は $X$ の正則凸性を示すことにある．多くの研究者の結果の紹介の後に，教授の次の結果が紹介された：Fibre が $C^n$ の 1st Betti number が zero であるような有界 Stein 領域のとき，および，fibre が $C^n$ の有界 Stein 領域で，その構造群が fibres の automorphism group の単位元の連結成分であるとき，Stein space 上の正則 fibre bundle は Stein である．

### Problem of Levi

(1975 年 12 月 20 日，於京都大学)

Complex space $X$ 上の連続関数 $\varphi$ は，$X$ の regular point で多重劣調和のとき，弱多重劣調和という．教授は，$X$ が弱多重劣調和 exhaustion function をもてば，$X$ は弱でないそれをもつ．方法は $\bar{\partial}$ の $L^2$-estimate により，余次元 $\geqq 1$ の subvariety を越えて $L^2$ 正則関数が接続されることを示し，Cousin 問題に帰着させる．$f(z)$，