論　説

複素解析的Seifertファイバー空間の変形

諏　訪　立　雄

いわゆるSeifertファイバー空間は，曲面上のS^1-束の拡張としてSeifert[18]によって導入，研究された．その後も特に変換群の理論において極めて重要な役割をはたしている(例えば[13], [16], [17]等)．Holmann[6]はこの種のファイバー空間の一般化(底空間とファイバーを一般にする)を行ったが，彼の方法は常に局所表示によるため，あまり扱いやすいとはいえない．Conner-Raymond [4]は，非球状空間の組織的構成に関連し，層係数の群のコホモロジーを用いて，非常に見通しのよい形で一般的なSeifertファイバー空間の構成を与えた．この種のファイバー空間は，上記変換群の理論のほか，ある種の楕円曲面として([9], [10], [19], [20]等)あるいは$\boldsymbol{C}^*$-作用のある特異点に関連して([2], [14], [15]等)自然に現われるものである．

本論では層係数の群のコホモロジーの応用として，複素解析的に構成されたSeifertファイバー空間Mにつき，コホモロジー群$H^1(M,\Theta_M)$ (Θ_MはM上の正則ベクトル場の芽の層)を調べ，Mの小変形を記述する．まず§1で層係数の群のコホモロジー理論を復習する．導入の方法はいろいろあるが([3], [4], [5], [9])ここでは簡潔で一般的なGrothendieckの方法にしたがう．この方法によると同変写像に対するLerayスペクトル列(1.5定理)なども容易に得られる．実際に扱う場合に必要なČech表示も行っておく．§2では複素解析的群作用の変形について考える．群Gが複素多様体Xに作用しているとき，作用(G,X)の無限小変形はGのΘ_X係数のコホモロジー$H^1(G,\Theta_X)$にあることがわかる．ある特別な場合のこの群の解釈も与える．§3でSeifertファイバー空間を構成するが，群の作用の仕方を多少変えたほか，本質的に[4]と同じである．§4では同変Lerayスペクトル列を用いて$H^1(M,\Theta_M)$の4つのベクトル群C, E, F, Hへの分解を与え，§5でそれらの幾何学的意味について考える．§6では，底空間の複素次元が1のときにC, E, F, Hを計算する．最後に§7で$\boldsymbol{C}^*$-Seifertファイバー空間の変形を扱う．紙面の都合で証明はほとんどすべて省かざるを得なかった．詳細については[21], [22], [23]を参照されたい．

§1. 層係数の群のコホモロジー．

以下に見るように，上記コホモロジーは群の空間への作用，あるいはその軌道空間を記述するのに極めて有用である．ここではGrothendieckにしたがって導入し，後で使いやすいようにČech式の表示をしておく．

位相空間Xに群Gが左から連続的に作用しているとする．

1.1. 定義． X上の可換群の層$\mathcal{S}$にGが左から作用していて，

(1)　射影$\mathcal{S}\to X$は同変，

(2) 各 $x\in X$ と $g\in G$ につき，$g: \mathcal{S}_x\to\mathcal{S}_{gx}$ は茎の間の準同型

であるとき，$\mathcal{S}$(および G の作用をあわせたもの)を X 上の G-層という．

2 つの G-層の間の G-同変な層の準同型を G-準同型という．

X から軌道空間 X/G への標準的射影を ϕ とかく．さらに，C_X^G, $C_{X/G}$, C, C^G でそれぞれ，X 上の G-層，X/G 上の可換群の層，可換群，左 G-加群のなす圏を表わす．X 上の G-層 $\mathcal{S}$ に対し，$\mathcal{S}$ の切断のなす群 $\Gamma_X(\mathcal{S})=\Gamma(X,\mathcal{S})$ への G の作用は $(g\sigma)(x)=g\cdot\sigma(g^{-1}x)$ $(g\in G,\ \sigma\in\Gamma_X(\mathcal{S}))$ で与えられ，これは G のコホモロジー $H^\cdot(X,\mathcal{S})$ への自然な作用をひき起す．次の図式中の関手 Γ^G, Γ_X^G および ϕ_*^G は以下のように定義される；

$$\begin{tikzcd} C_X^G \arrow[r, "\Gamma_X"] \arrow[d, "\phi_*^G"'] \arrow[dr, "\Gamma_X^G"] & C^G \arrow[d, "\Gamma^G"] \\ C_{X/G} \arrow[r, "\Gamma_{X/G}"'] & C \end{tikzcd}.$$

G-加群 M に対し，$\Gamma^G(M)=M^G$ (M の G-不変な元のなす部分群)とおく．X 上の G-層 $\mathcal{S}$ に対し，$\Gamma_X^G(\mathcal{S})=\Gamma(X,\mathcal{S})^G$ で，$\phi_*^G(\mathcal{S})$ は前層 $U\mapsto\Gamma(\phi^{-1}(U),\mathcal{S})^G$ から定まる X/G 上の層である．一般に F が共変関手のとき，R^nF で F の n 次右導来関手を表わす．

1.2. 定義． $\mathcal{S}$ が X 上の G-層のとき，G の $\mathcal{S}$ 係数の n 次コホモロジー群 $H^n(G,\mathcal{S})$ を次により定義する：

$$H^n(G,\mathcal{S}) = R^n\Gamma_X^G(\mathcal{S}).$$

このコホモロジーは，2 つのスペクトル列により，X/G のコホモロジーおよび G の $H^\cdot(X,\mathcal{S})$ 係数のコホモロジーと関係づけられる．すなわち，Grothendieck の定理([5] Théorème 2. 4. 1, [8] §8. 2)を 2 つの合成関手 $\Gamma_{X/G}\circ\phi_*^G=\Gamma_X^G=\Gamma^G\circ\Gamma_X$ に適用すると，

1.3. 定理([4], [5])．X 上の G-層 $\mathcal{S}$ に対し，次の 2 つのスペクトル列が存在する．

(1. 1) $$'E_2^{p,q} = H^p(X/G, R^q\phi_*^G(\mathcal{S})) \Longrightarrow H^n(G,\mathcal{S}),$$

(1. 2) $$''E_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X,\mathcal{S})) \Longrightarrow H^n(G,\mathcal{S}).$$

層 $R^q\phi_*^G(\mathcal{S})$ については次のことが知られている([4], [5])．すなわち，作用 (G,X) が次の不連続性条件

(D) 各 $x\in X$ につき，等方部分群 G_x は有限かつ x の近傍 U_x で，G_x に含まれないすべての $g\in G$ に対し $gU_x\cap U_x=\phi$ となるものが存在する．

を満たすならば

(1. 3) $$R^q\phi_*^G(\mathcal{S})_{\phi(x)} = H^q(G_x, \mathcal{S}_x)$$

が成り立つ．

Grothendieck の定理のもう一つの応用として，次の同変写像に対する Leray スペクトル列を得る．

1.4. 定理． X, Y は G-空間で，$f: X\to Y$ は同変写像とする．このとき，X 上の G-層 $\mathcal{S}$ に対し，次のスペクトル列が存在する．

$$E_2^{p,q} = H^p(G, R^qf_*(\mathcal{S})) \Longrightarrow H^n(G,\mathcal{S}).$$

証明は，まず f_* は X 上の単射的 G-層を Y 上の単射的 G-層に写すことを示し，Grothendieck の定理を合成関手 $\Gamma_Y^G\circ f_*=\Gamma_X^G$ に適用すればよい．

以下，作用(G, X)は条件(D)を満たすとし，軌道空間X/Gはパラコンパクトとする．このとき，X上のG-層$\mathcal{S}$に対し，コホモロジー$H^{\cdot}(G, \mathcal{S})$は次のように構成される$\hat{H}^{\cdot}(G, \mathcal{S})$と標準的に同型になることが示される．まず，$X/G$の局所有限被覆$\mathcal{U}=\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$をとり，$W_\lambda=\psi^{-1}(U_\lambda)$とおくと$\mathcal{W}=\{W_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$は$X$の$G$-不変な被覆である．$C^q(\mathcal{W}, \mathcal{S})$を$\mathcal{W}$上の$\mathcal{S}$係数の$q$-コチェイン全体のなす群とするとこれは自然に$G$-加群の構造をもつ．さらに，$C^{p,q}_{\mathcal{W}}(G, \mathcal{S})=C^p(G, C^q(\mathcal{W}, \mathcal{S}))$を$G$の$C^q(\mathcal{W}, \mathcal{S})$係数の$p$-コチェイン全体のなす群とする．各元$\sigma\in C^{p,q}_{\mathcal{W}}(G, \mathcal{S})$は集り$\{\sigma^{\lambda_0,\cdots,\lambda_q}(x;g_1, \cdots, g_p)\}$として表わせる．ただし，各$(\lambda_0, \cdots, \lambda_q)\in\Lambda^{q+1}$と$(g_1, \cdots, g_p)\in G^p$に対し，$\sigma^{\lambda_0,\cdots,\lambda_q}(\ ;g_1, \cdots, g_p)$は$\mathcal{S}$の$W_{\lambda_0}\cap\cdots\cap W_{\lambda_q}$上の切断である．$C^p_{\mathcal{W}}(G, \mathcal{S})=C^{p,q}_{\mathcal{W}}(G, \mathcal{S})$とおき，コバウンダリ写像$\delta: C^p_{\mathcal{W}}(G, \mathcal{S})\to C^{p+1}_{\mathcal{W}}(G, \mathcal{S})$を次のように定義する．$\sigma\in C^p_{\mathcal{W}}(G, \mathcal{S})$に対し，

$$(1.4)\qquad (\delta\sigma)^{\lambda_0,\cdots,\lambda_{p+1}}(x;g_1, \cdots, g_{p+1}) = g_1\cdot\sigma^{\lambda_1,\cdots,\lambda_{p+1}}(g_1^{-1}x;g_2, \cdots, g_{p+1}) + \sum_{i=1}^{p}(-1)^i\sigma^{\lambda_0,\cdots,\hat{\lambda}_i,\cdots,\lambda_{p+1}}(x;g_1, \cdots, g_ig_{i+1}, \cdots, g_{p+1}) + (-1)^{p+1}\sigma^{\lambda_0,\cdots,\lambda_p}(x;g_1, \cdots, g_p).$$

複体$(C^{\cdot}_{\mathcal{W}}(G, \mathcal{S}), \delta)$のコホモロジーを$H^{\cdot}_{\mathcal{W}}(G, \mathcal{S})$と書き，$\hat{H}^{\cdot}(G, \mathcal{S})=\varinjlim_{\mathcal{U}} H^{\cdot}_{\mathcal{W}}(G, \mathcal{S})$と定義する．ここで右辺は$\mathcal{U}$がすべての局所有限な$X/G$の開被覆を動くときの帰納的極限である．最後に次のことに注意しておく．二重複体$C^{\cdot\cdot}_{\mathcal{W}}(G, \mathcal{S})$の一重化のコホモロジーを$\check{H}^{\cdot}_{\mathcal{W}}(G, \mathcal{S})$とし，$\check{H}^{\cdot}(G, \mathcal{S})=\varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^{\cdot}_{\mathcal{W}}(G, S)$とおくと，$\check{H}^{\cdot}(G, \mathcal{S})$は$H^{\cdot}(G, \mathcal{S})$および$\hat{H}^{\cdot}(G, \mathcal{S})$と同型である．さらに，スペクトル列(1.1)および(1.2)は，$C^{\cdot\cdot}_{\mathcal{W}}(G, \mathcal{S})$に付随した2つのスペクトル列の各項の帰納的極限をとることによって得られる．

§2. 複素解析的群作用の変形.

以後本論では次の記号を用いる．Xを複素多様体とするとき，

$\mathcal{O}_X$：X上の正則関数の芽の層.

$\boldsymbol{T}_X$：Xの正則接束.

$\Theta_X(=\mathcal{O}_X(\boldsymbol{T}_X))$：$X$上の正則ベクトル場の芽の層.

群GがXに複素解析的に作用していれば，$\mathcal{O}_X$およびΘ_Xは自然なG-層の構造をもつ．さらにΘ_XはG-$\mathcal{O}_X$-加群([5]p. 196)である．以後群の作用はすべて複素解析的とする．

Xをn次元複素多様体とし，GをXに(左から)固有不連続に作用している群とする．商空間X/Gは自然な解析空間の構造をもつが，これはコンパクトであると仮定する．

2.1. 定義. 作用(G, X)の変形(の複素解析族)とは次の4つの条件をみたす4つ組$(G, \mathfrak{X}, \varphi, S)$のことをいう．

(1) $\mathfrak{X}$はGが固有不連続に作用している複素多様体で，SはGが自明に作用している複素多様体.

(2) φは$\mathfrak{X}$からSの上への正則な同変しずめこみ．したがって各ファイバー$X_s=\varphi^{-1}(s)$, $s\in S$, は$\mathfrak{X}$の複素G-部分多様体で，φは正則写像$\bar{\varphi}: \mathfrak{X}/G\to S/G=S$をひきおこす.

(3) $\bar{\varphi}$は固有写像.

(4) あるS上の点oに対し，(G, X_o)は(G, X)と同値.

次に[11](6.2)に類似した‘無限小変形写像’

(2.1) $$\rho : \boldsymbol{T}_{S,o} \longrightarrow H^1(G, \Theta_X)$$

を定義する．ここで $\boldsymbol{T}_{S,o}$ は S の o における複素接空間である．まず，[11]と同様に Ψ_X を $\boldsymbol{T}_{\mathfrak{X}}$ の $X_o=X$ への制限の正則切断の芽の層とすると，Ψ_X は層 Θ_X を自然に部分層として含むから $\Lambda_X=\Psi_X/\Theta_X$ とおく．標準的全射 $\Psi_X\to\Lambda_X$ を j で表わしておく．さらに T_X を X 上の定数層 $X\times\boldsymbol{T}_{S,o}$ とすると，これは自然に Λ_X の部分層と考えられる．$\Pi_X=j^{-1}(T_X)$ とおくと次の完全列を得る([11] (4.2)参照).

(2.2) $$0\longrightarrow\Theta_X\longrightarrow\Pi_X\longrightarrow T_X\longrightarrow 0.$$

これから連結写像

$$\partial : H^0(G, T_X)\longrightarrow H^1(G, \Theta_X)$$

を得る．ここで，G は S に自明に作用しているから，$H^0(G, T_X)=\boldsymbol{T}^G_{S,o}=\boldsymbol{T}_{S,o}$ となる．無限小変形写像(2.1)はこの写像として定義される．次にこれをČech表示により具体的に表わしておく．以後本論では次の記法を用いる．

記法. $f_1(z), \cdots, f_m(z)$ が $z=(z_1, \cdots, z_n)$ の関数のとき，$\partial f/\partial z$ で Jacobi 行列 $(\partial f_i/\partial z_j)$ を表わす．さらに $f(z)={}^t(f_1(z), \cdots, f_n(z))$ が列ベクトル値関数のとき，$f\dfrac{\partial}{\partial z}$ でベクトル場 $\sum_{i=1}^n f_i(z)\dfrac{\partial}{\partial z_i}$ を表わす．

まず，S は小多重円板 $\{s\in\boldsymbol{C}^r \mid |s|=\max_i |s_i|<\varepsilon\}$ で，指定された点 o は原点であるとする．標準的射影 $\mathfrak{X}\to\mathfrak{X}/G$ を Ψ で表わし，制限 $\Psi|_{X_0}$ は標準的射影 $\varphi : X\to X/G$ と同一視しておく．次に，$\mathfrak{X}/G$ を有限個の開集合 $\{\mathcal{U}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で，各 $\mathcal{W}_\lambda=\Psi^{-1}(\mathcal{U}_\lambda)$ が $\mathfrak{X}$ 上の座標近傍となるもので覆っておく．各 $\mathcal{W}_\lambda$ 上には座標系 $(z^\lambda, s)=(z_1^\lambda, \cdots, z_n^\lambda,\ s_1, \cdots, s_r)$ で $\varphi(z^\lambda, s)=s$ となるものがあるとしてよい．以後 $z^\lambda={}^t(z_1^\lambda, \cdots, z_n^\lambda)$ を列ベクトルと考える．共通部分 $\mathcal{W}_\lambda\cap\mathcal{W}_\mu$ では z^λ は (z^μ, s) のベクトル値正則関数である；

$$z^\lambda = f^{\lambda\mu}(z^\mu, s).$$

$\mathcal{W}=\{W_\lambda\}$ を $W_\lambda=X\cap\mathcal{W}_\lambda$ で与えられる X の G-不変被覆とする．計算は略すが，$\partial/\partial s_q\in\boldsymbol{T}_{S,o}$, $1\leqslant q\leqslant r$, に対し，$\rho(\partial/\partial s_q)$ は次で与えられる $\mathcal{W}$ 上の1-コサイクル $\theta_q=\{\theta_q^{\lambda\mu}(z;g)\}$, $z\in W_\lambda\cap W_\mu$, $g\in G$, で表わせることがわかる．

(2.3) $$\theta_q^{\lambda\mu}(z;g)=\left(\frac{\partial z^\lambda\circ g}{\partial z^\lambda}(g^{-1}z^\lambda, 0)\frac{\partial f^{\lambda\mu}}{\partial s_q}(g^{-1}z^\mu, 0)+\frac{\partial z^\lambda\circ g}{\partial s_q}(g^{-1}z^\lambda, 0)\right)\frac{\partial}{\partial z^\lambda}.$$

簡単のため，これを

(2.4) $$\theta_q^{\lambda\mu}(z;g)=\frac{\partial z^\lambda\circ g}{\partial s_q}(g^{-1}z^\mu, 0)\frac{\partial}{\partial z^\lambda}$$

と書いておく．ここで $\theta_q^{\lambda\mu}(z;e)=(\partial f^{\lambda\mu}/\partial s_q)(z^\mu, 0)\cdot(\partial/\partial z^\lambda)$ であることに注意すると次を得る．

2.2. 命題. 次の図式は可換である．

$$\begin{array}{ccc}
\boldsymbol{T}_{S,o} & \xrightarrow{\ \rho\ } & H^1(X, \Theta_X) \\
{\scriptstyle\rho}\downarrow & & \cup\!\!\uparrow \\
H^1(G, \Theta_X) & \longrightarrow & H^1(X, \Theta_X)^G,
\end{array}$$

ここで，上の水平な写像は普通の無限小変形写像で，下の水平な写像は Θ_X に対するスペクトル列(1.2)の辺準同型である．

普通の場合のように，$H^1(G, \Theta_X)$ の元 θ に障害がないとは，ある (G, X) の変形 $(G, \mathfrak{X}, \varphi, S)$ があっ

て，θ は ρ の像に入っていることをいう．以後，θ がある種の変形の ρ の像に入るというかわりに，θ はある種の変形を表わすということにする．

以上では群の作用を固有不連続なものに限ったが，そうでない場合も同様に扱える．また，群の作用のない場合の変形理論の種々の定理，特に倉西の定理を群の作用のある場合に拡張すること，あるいは，具体的な群作用について倉西族を構成することは興味ある問題であろう．

次に，特別な場合について，コホモロジー群 $H^1(G,\Theta_X)$ の意味を考えてみる．まず次の少し一般的な補題を用意しておく．

2.3. 補題. X を複素多様体とし，G を X に固有不連続に作用する群とする．標準的全射 $X\to X/G$ を ψ で表わしておく．このとき，X 上の G-$\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{S}$ に対し，

(1) 標準的同型

$$H^p(G,\mathcal{S})\simeq H^p(X/G,\psi_*^G(\mathcal{S})),\qquad p\geq 0;\qquad H^0(G,\mathcal{S})\simeq H^0(X,\mathcal{S})^G$$

が存在する．

(2) さらに G が有限ならば標準的同型

$$H^p(G,\mathcal{S})\simeq H^p(X,\mathcal{S})^G,\qquad p\geq 0$$

が存在する．

証明には，上の条件の下でスペクトル列(1.1)あるいは(1.2)が退化することを用いればよい．

さて (G,X) を複素多様体への固有不連続な作用とし，$\psi:X\to Y=X/G$ を標準的全射とする．$A=\{x\in X\mid G_x\neq\{e\}\}$ とおくとこれは X の解析的集合である．また X の各点 x は G_x-不変な近傍 U_x をもち，Y の点 $\psi(x)$ は U_x/G_x に同型な近傍をもつ．このとき，

2.4. 命題. 2つの解析空間 Y と A が共に非特異であるためには，X の各点 x に対し，G_x は巡回群で，U_x のある座標系 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ に対し，

$$g_x(z_1,z_2,\cdots,z_n)=(\varepsilon_x z_1,z_2,\cdots,z_n)$$

となる元 g_x で G_x が生成されることが必要十分である．ただし，p_x を G_x の位数として，ε_x は1の原始 p_x 乗根である．

さて，A と Y は共に非特異とし，$B=\psi(A)$ とおくと，上の命題より B は余次元1の Y の複素部分多様体であることがわかる．$\Theta_{Y|B}$ で，Y 上のベクトル場で B に接するものの芽の層とすると次を得る．

2.5. 命題. 標準的同型 $\psi_*^G\Theta_X\simeq\Theta_{Y|B}$ が存在する．

これと2.3補題より，

2.6. 系. $H^1(G,\Theta_X)\simeq H^1(Y,\Theta_{Y|B})$.

対 (Y,B) の変形とは4つ組 $(\mathfrak{Y},\mathfrak{B},\varphi,S)$ で次をみたすものをいう：$\varphi:\mathfrak{Y}\to S$ は Y の変形（$o\in S$ で $\varphi^{-1}(o)=Y$ とする）で，$\mathfrak{B}$ は φ の各ファイバーに横断的な $\mathfrak{Y}$ の部分多様体で $\mathfrak{B}\cap\varphi^{-1}(o)=B$ なるもの．このとき，無限小変形写像 $\rho:\boldsymbol{T}_{S,o}\to H^1(Y,\Theta_Y)$ は次のように分解する．

$$\boldsymbol{T}_{S,o}\longrightarrow H^1(Y,\Theta_{Y|B})\longrightarrow H^1(Y,\Theta_Y).$$

したがってこの場合，$H^1(G,\Theta_X)$ の元は，もし障害がなければ，対 (Y,B) の変形を表わしているといえる．対の変形の詳細については[12]を参照されたい．

§3. 複素解析的Seifertファイバー空間.

Conner-Raymond[4]にしたがって，Seifertファイバー空間を次のように構成する．Wを可算基をもつ複素多様体とし，NをWに左から複素解析的に，かつ固有不連続に作用している群とする．このとき，条件(D)は満たされている．さらに，商空間$V=W/N$は自然な複素解析空間の構造をもち，射影$\nu: W\to V$は正則である．以後Vはコンパクトと仮定する．次に複素k次元トーラス$T=T^k$を考えると，これは自由可換群$\boldsymbol{Z}^{2k}$の複素ベクトル群$\boldsymbol{C}^k$への埋め込みできまる．つまり次の完全列を得る：

$$(3.1)\qquad 0 \longrightarrow \boldsymbol{Z}^{2k} \xrightarrow{\iota} \boldsymbol{C}^k \xrightarrow{\eta} T^k \longrightarrow 0.$$

準同型$\Phi: N\to GL(k,\boldsymbol{C})$で，各$\alpha\in N$に対し，$\Phi(\alpha)$は格子$\Gamma=\iota(\boldsymbol{Z}^{2k})$を不変にするようなものをとる．そうすると$N$は$\boldsymbol{Z}^{2k}, \boldsymbol{C}^k, T^k$に線型に作用する．$W$から$\boldsymbol{Z}^{2k}, \boldsymbol{C}^k$および$T^k$への局所正則写像の芽の層をそれぞれ$\mathcal{Z}^{2k}, \mathcal{O}^k_W$および$\mathcal{T}$で表わす．$\mathcal{S}$をこれらの層のうちのいずれかとするとき，$N$の元$\alpha$と$W$の開集合$U$に対し，$\alpha: \Gamma(U,\mathcal{S})\to\Gamma(\alpha U,\mathcal{S})$を

$$(3.2)\qquad (\alpha\sigma)(w)=\Phi(\alpha)\cdot\sigma(\alpha^{-1}w),\qquad w\in U,\qquad \sigma\in\Gamma(U,\mathcal{S})$$

で定義すると$\mathcal{S}$はW上のN-層となる．N-層の完全列

$$(3.3)\qquad 0\longrightarrow \mathcal{Z}^{2k}\xrightarrow{\iota}\mathcal{O}^k_W\xrightarrow{\eta}\mathcal{T}\longrightarrow 0$$

より，コホモロジー完全列

$$(3.4)\qquad \cdots\longrightarrow H^1(N,\mathcal{O}^k_W)\xrightarrow{\eta_*}H^1(N,\mathcal{T})\xrightarrow{c}H^2(N,\mathcal{Z}^{2k})\longrightarrow\cdots$$

を得る．これは[9]の完全列(11.7)あるいは(14.17)と類似のもので，Ker cは3つ組(Φ, N, W)のPicard群と呼び得るものである．$H^1(N,\mathcal{T})$の元mをとり，これをWの適当なN-不変な被覆$\mathcal{W}=\{W_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$上の1-コサイクル$\{m^{\lambda\mu}(w;\alpha)\}$で表わしておく．各$(\lambda,\mu)\in\Lambda^2$に対し，

$$m^{\lambda\mu}: (W_\lambda\cap W_\mu)\times N\longrightarrow T^k$$

は条件

$$(3.5)\qquad \Phi(\alpha)m^{\mu\nu}(\alpha^{-1}w;\beta)-m^{\lambda\nu}(w,\alpha\beta)+m^{\lambda\mu}(w;\alpha)=0,\qquad ((\lambda,\mu,\nu)\in\Lambda^3,\ (\alpha,\beta)\in N^2)$$

をみたす正則写像である．特に(3.5)で$\alpha=\beta=e$とおくと

$$m^{\lambda\nu}(w;e)=m^{\lambda\mu}(w;e)+m^{\mu\nu}(m;e)$$

を得るから，$\{m^{\lambda\mu}(w;e)\}$より次のように標準的なやり方でW上の主T^k-束$\varpi: B\to W$を構成できる．つまりBは合併$\bigcup_\lambda W_\lambda\times T^k\times\{\lambda\}$を同値関係$(w^\lambda, t^\lambda, \lambda)\sim(w^\mu, t^\mu, \mu)\Longleftrightarrow w^\lambda=w^\mu=w,\quad t^\lambda=t^\mu+m^{\lambda\mu}(w;e)$で割って得られる．局所同型$\varpi^{-1}(W_\lambda)\rightleftarrows W_\lambda\times T^k$を$\varphi_\lambda$で表わしておくと，

$$(3.6)\qquad (\varphi_\lambda\circ\varphi_\mu^{-1})(w,t^\mu)=(w,t^\mu+m^{\lambda\mu}(w;e))$$

となる．次に，Nの$W_\lambda\times T^k$への作用を

$$(3.7)\qquad \alpha(w,t^\lambda)=(\alpha w,\Phi(\alpha)t^\lambda+m^{\lambda\lambda}(\alpha w;\alpha))$$

$(\alpha\in N)$で定義する．この作用をφ_λで引きもどすと$\varpi^{-1}(W_\lambda)$上の作用を得るが，(3.5)を用いると2つの作用$(N,\varpi^{-1}(W_\lambda))$と$(N,\varpi^{-1}(W_\mu))$は，$\varpi^{-1}(W_\lambda\cap W_\mu)$上で一致することが確かめられる．したがって$N$の$B$全体への作用$(N,B)$を得る．コホモロジー類$m\in H^1(N,\mathcal{T})$をほかの1-コサイクルで表わしたとき，上のようにして得られる主T^k-束とNの作用を(N,B')とすると，これは(N,B)と同値であることが確かめられる．作用(N,B)は明らかに固有不連続であるが，次にこの作用が不動点を持たないための条件について考えてみる．まず，射影$\varpi: B\to W$が同変であることに注意す

ると，作用 (N, B) が不動点を持たないための条件は，W の各点 w で，等方部分群 N_w がファイバー $\varpi^{-1}(w)\simeq T^k$ に不動点なしに作用することである．この作用 $(N_w, \varpi^{-1}(w))$ は具体的には(3.7)により，$w\in W_\lambda$, $\alpha\in N_w$ のとき

$$\alpha : t \longmapsto \Phi(\alpha)t + m^{\lambda\lambda}(w\,;\alpha) \tag{3.8}$$

で与えられる．作用 $(N_w, \varpi^{-1}(w))$ はコホモロジー類 $c(m)\in H^2(N, \mathcal{Z}^{2k})$ と次のような関係がある．まず，Φ を N_w に制限することにより，N_w は(3.1)の各群に作用するから，コホモロジー完全列

$$\cdots \longrightarrow H^1(N_w, \boldsymbol{C}^k) \longrightarrow H^1(N_w, T^k) \longrightarrow H^2(N_w, \boldsymbol{Z}^{2k}) \longrightarrow H^2(N_w, \boldsymbol{C}^k) \longrightarrow \cdots$$

を得るが，N_w は有限群だから $H^i(N_w, \boldsymbol{C}^k)=0$, $i\geqslant 1$. したがって同型

$$H^1(N_w, T^k) \simeq H^2(N_w, \boldsymbol{Z}^{2k}) \tag{3.9}$$

があることに注意しておく．次に，W 上の N-層 $\mathcal{Z}^{2k}$ に対しスペクトル列(1.1)の辺準同型

$$H^2(N, \mathcal{Z}^{2k}) \longrightarrow H^0(V, R^2\nu_*^N(\mathcal{Z}^{2k}))$$

を考えると，各類 $c\in H^2(N, \mathcal{Z}^{2k})$ は層 $R^2\nu_*^N(\mathcal{Z}^{2k})$ の大域的切断を定めるが，(1.3)により

$$R^2\nu_*^N(\mathcal{Z}^{2k})_{\nu(w)} = H^2(N_w, \boldsymbol{Z}^{2k})$$

である．したがって c は W の各点 w に対し類 $c_w\in H^2(N_w, \boldsymbol{Z}^{2k})$ を対応させ，さらに c_w は群拡大

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{Z}^{2k} \longrightarrow \pi_w \longrightarrow N_w \longrightarrow 1 \tag{3.10}$$

の同値類を定める．

3.1. 定義. 類 $c\in H^2(N, \mathcal{Z}^{2k})$ が Bieberbach 類であるとは，W の各点 w で群拡大 π_w((3.10))にねじれがないこと．

さて，(N, B) を定めているコホモロジー類 $m\in H^1(N, \mathcal{T})$ は，次のように W の各点 w で，類 $\chi_w\in H^1(N_w, T^k)$ を定める．まず m を表わすコサイクル $\{m^{\lambda\mu}(w\,;\alpha)\}$ をとると N_w の T^k への作用(3.8)を得る．そこで

$$\chi_{w,\lambda} : N_w \longrightarrow T$$

を $\chi_{w,\lambda}(\alpha)=m^{\lambda\lambda}(w\,;\alpha)$ により定義すると(3.5)により $\chi_{w,\lambda}$ は微分(crossed homomorphism)であることがわかる．もし w が W_μ にも含まれれば，$\chi_{w,\mu}$ と $\chi_{w,\lambda}$ の差は内部微分であり，さらに $\{m^{\lambda\mu}(w\,;\alpha)\}$ とコホモログなコサイクルを用いて定義しても差は内部微分であることが示される．したがって m は $H^1(N_w, T)$ の元を定め，さらに同型(3.9)により $H^2(N_w, \boldsymbol{Z}^{2k})$ の元を定める．これを $c(\chi_w)$ と書くことにする．

3.2. 補題([4]). 作用 $(N_w, \varpi^{-1}(w))$ が不動点を持たないためには，$c(\chi_w)$ が定める群拡大 π_w にねじれがないことが必要十分である．このとき，π_w は商空間 $\varpi^{-1}(w)/N_w=T^k/N_w$ の基本群と同型である．

類 m から $c(m)\in H^2(N, \mathcal{Z}^{2k})$ が定まるが，実は $c(m)_w=c(\chi_w)$ であることに注意すると

3.3. 系. 作用 (N, B) が不動点を持たないためには，$c(m)$ が Bieberbach 類であることが必要十分である．

以上から，$c(m)$ が Bieberbach 類であるような類 $m\in H^1(N, \mathcal{T})$ から作用 (N, B) を構成すると，商空間 $M=B/N$ は複素多様体の構造をもち，次の正則写像の図式

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\mu} & M = B/N \\ {\scriptstyle\varpi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi} \\ W & \xrightarrow{\nu} & V = W/N \end{array} \tag{3.11}$$

を得る．写像νには一般に分岐があるが，μは不分岐な被覆写像である．ここで，$\pi: M\to V$を複素解析的 Seifert ファイバー空間とよぶ．点$\nu(w)$上のファイバー$\pi^{-1}(\nu(w))$は$T^k/N_w=\boldsymbol{C}^k/\pi_w$に同型である．$N_w\neq\{e\}$のとき，そのファイバーは，ファイバー空間$M\to V$の特異ファイバーであるといわれる．

§4. $H^1(M,\Theta_M)$の分解.

$c(m)$が Bieberbach 類であるような$m\in H^1(N,\mathcal{T})$をとり，これから前節のようにして構成される Seifert ファイバー空間$\pi: M\to V$を考える．以下次の記号を用いる．

Ξ_B：B上の正則ベクトル場で，$\varpi: B\to W$のファイバーに接するものの芽の層.

Ξ_M：M上の正則ベクトル場で，$\pi: M\to V$のファイバーに接するものの芽の層.

$\varpi^*\Theta_W$：Θ_Wのϖによる解析的逆像([7] Def. 1. 6).

作用(N, B)および(N, W)は，層$\mathcal{O}_B, \Theta_B, \Xi_B, \mathcal{O}_W$および$\Theta_W$上に自然な$N$-層の構造を定める．さらに，$\Theta_B$と$\Xi_B$は$N$-$\mathcal{O}_B$-加群で，$\Theta_W$は$N$-$\mathcal{O}_W$-加群である．$\varpi$が同変であることから$\varpi^*\Theta_W$もやはり$N$-$\mathcal{O}_B$-加群である．次の完全列

(4. 1) $$0\longrightarrow\Xi_B\longrightarrow\Theta_B\longrightarrow\varpi^*\Theta_W\longrightarrow 0$$

があるが，$\varpi: B\to W$が局所自明で同変であるから，次もN-$\mathcal{O}_W$-加群の完全列である．

(4. 2) $$0\longrightarrow R^q\varpi_*(\Xi_B)\longrightarrow R^q\varpi_*(\Theta_B)\longrightarrow R^q\varpi_*(\varpi^*\Theta_W)\longrightarrow 0,\qquad q\geqslant 0.$$

ϖのファイバーはコンパクトであるから，$\varpi_*(\varpi^*\Theta_W)=\Theta_W$であることに注意しておく．同変 Leray スペクトル列(1. 4 定理)を(4. 1)の各層に対して考え，(4. 2)を考慮に入れると，次の各行と列が完全な可換図式を得る．

(4. 3)
$$\begin{tikzcd}
 & {} & {} & {} & \\
 & H^2(N,\varpi_*\Xi_B) \arrow[u] \arrow[r, "l"] & H^2(N,\Xi_B) \arrow[u] & {} & \\
0 \arrow[r] & H^1(N,\Theta_W) \arrow[u, "\partial^1"] \arrow[r, "k"] & H^1(N,\varpi^*\Theta_W) \arrow[u, "\varepsilon^1"] \arrow[r, "h"] & H^0(N,R^1\varpi_*(\varpi^*\Theta_W)) \arrow[u] \arrow[r] & {} \\
0 \arrow[r] & H^1(N,\varpi_*\Theta_B) \arrow[u, "\varphi^1"] \arrow[r, "j"] & H^1(N,\Theta_B) \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, "g"] & H^0(N,R^1\varpi_*(\Theta_B)) \arrow[u, "\chi"] \arrow[r] & {} \\
0 \arrow[r] & H^1(N,\varpi_*\Xi_B) \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "i"] & H^1(N,\Xi_B) \arrow[u, "\kappa"] \arrow[r, "f"] & H^0(N,R^1\varpi_*(\Xi_B)) \arrow[u] \arrow[uuull, bend right, "a"'] & \\
0 \arrow[r] & H^0(N,\Theta_W) \arrow[u, "\partial^0"] \arrow[r] & H^0(N,\varpi^*\Theta_W) \arrow[u, "\varepsilon^0"] \arrow[r] & 0 \arrow[u] & \\
0 \arrow[r] & H^0(N,\varpi_*\Theta_B) \arrow[u, "\varphi^0"] \arrow[r] & H^0(N,\Theta_B) \arrow[u] \arrow[r] & 0 & \\
 & {} \arrow[u] & {} \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

4. 1. 補題. SがN-$\mathcal{O}_B$-加群のとき，次の標準的同型がある．

$$\nu_*^N(R^p\varpi_*(S))\simeq R^p\pi_*(\mu_*^N(S)),\qquad p\geqslant 0.$$

証明は，Grothendieck の定理を 2 つの合成関手$\nu_*^N\circ\varpi_*=\pi_*\circ\mu_*^N$に適用して得られる 2 つのスペクトル列を比べればよい．

さて，$\mu: B\to M$は不分岐被覆であるから，標準的同型

(4. 4) $$\Theta_M\simeq\mu_*^N(\Theta_B),\qquad \Xi_M\simeq\mu_*^N(\Xi_B).$$

がある．2.3 補題，4.1 補題および(2.4)より

4.2. 定理． 次の標準的同型がある．

$$H^p(N, \Theta_B) \simeq H^p(M, \Theta_M), \qquad H^p(N, \Xi_B) \simeq H^p(M, \Xi_M),$$
$$H^p(N, R^q\varpi_*(\Theta_B)) \simeq H^p(V, R^q\pi_*(\Theta_M)),$$
$$H^p(N, R^q\varpi_*(\Xi_B)) \simeq H^p(V, R^q\pi_*(\Xi_M)), \qquad p, q \geqslant 0.$$

次に，$C=\mathrm{Coker}\,\delta^0$, $D=\mathrm{Coker}\,\varepsilon^0$, $E=\mathrm{Ker}\,a$, $F=\mathrm{Ker}\,(\varepsilon^1\circ k)=\mathrm{Ker}\,(l\circ\delta^1)$, $G=\mathrm{Im}\,\phi$, $H=\mathrm{Im}\,(h\circ\phi)$ $=\mathrm{Im}\,(\chi\circ g)$ とおくと，次の列および行が完全な図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & & \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r, "k"] & G \arrow[u] \arrow[r, "h"] & H \arrow[r] & 0 \\
 & & H^1(M, \Theta_M) \arrow[u, "\phi"] & & \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "\bar{i}"] & D \arrow[u, "\bar{\kappa}"] \arrow[r, "\bar{f}"] & E \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

ここで，$\bar{i}, \bar{f}$ および $\bar{\kappa}$ はそれぞれ i, f および κ からひき起こされた準同型である．

§5. 群 C, E, F, H.

I) C. まず，次が成り立つ．

5.1. 補題． 層 $\varpi_*\Xi_B$ は標準的に $\mathcal{O}^k_W$ に N-同型である．

5.2. 系． 次の標準的同型がある．

$$\pi_*\Xi_M \simeq \nu^N_*\mathcal{O}^k_W, \qquad H^1(N, \varpi_*\Xi_B) \simeq H^1(N, \mathcal{O}^k_W).$$

以上から $H^1(N, \varpi_*\Xi_B)$ は完全列(3.4)に現われる $H^1(N, \mathcal{O}^k_W)$ に同型であるが，この群(の η_* による像)は直線束における Picard 多様体と同様の働きをもつものである．m を (N, B) を定める $H^1(N, \mathcal{T})$ の元とし，M を $H^1(N, \mathcal{O}^k_W)$ の任意の元とする．W の適当な N-不変被覆 $\mathcal{W}=\{W_\lambda\}$ をとり，m, M を $\mathcal{W}$ 上のコサイクル $\{m^{\lambda\mu}(w;\alpha)\}$, $\{M^{\lambda\mu}(w;\alpha)\}$ で表わしておく．(N, B) の変形 $(N, \mathfrak{B}, \beta, \boldsymbol{C})$ を次のようにつくる．$\mathfrak{B}$ は合併 $\bigcup_\lambda (W_\lambda\times T^k\times\boldsymbol{C}\times\{\lambda\})$ を同値関係 $(w^\lambda, t^\lambda, s^\lambda, \lambda)\sim(w^\mu, t^\mu, s^\mu, \mu)\Longleftrightarrow w^\lambda=w^\mu=w$, $s^\lambda=s^\mu=s$ および $t^\lambda=t^\mu+m^{\lambda\mu}(w;e)+\eta(sM^{\lambda\mu}(w;e))$ (η は(3.1)の準同型)で割ったもの．各 λ に対し，N の $W_\lambda\times T^k\times\boldsymbol{C}$ への作用を $\alpha(w, t^\lambda, s)=(\alpha w, \Phi(\alpha)t^\lambda+m^{\lambda\lambda}(\alpha w;\alpha)+\eta(sM^{\lambda\lambda}(\alpha w;\alpha)), s)$ と定義すると，これは上の同値関係を両立することがわかり，作用 $(N, \mathfrak{B})$ を定める．$\beta:\mathfrak{B}\to\boldsymbol{C}$ は，$(w, t^\lambda, s, \lambda)$ の同値類を s に写す．各 $s\in\boldsymbol{C}$ に対し，$B_s=\beta^{-1}(s)$ は W 上の N の作用のある主 T^k-束である．作用 (N, B_s) はコホモロジー類 $m+\eta(sM)\in H^1(N, \mathcal{T})$ から定められたもので，$c(m+\eta(sM))$ $=c(m)$ であるから，$c(m+\eta(sM))$ も Bieberbach 類である．したがって商 $\mathfrak{M}=\mathfrak{B}/N$ は $V=W/N$ 上の Seifert ファイバー空間達 $M_s=B_s/N$ の複素解析族となる．$\mathfrak{M}$ を M の‘ねじれ変形’という．C を $H^1(M, \Theta_M)$ の部分群 $\bar{\kappa}\bar{i}(C)$ と同一視する．

5.3. 定理． C の各元には障害がない．実際各元は M のねじれ変形を表わす．

証明は，$C=H^1(N, \varpi_*\Xi_B)/\mathrm{Im}\,\delta^0=H^1(N, \mathcal{O}^k_W)/\mathrm{Im}\,\delta^0$ であるから，$H^1(N, \mathcal{O}^k_W)$ の各元 M に対し，上のようにして作った複素解析族の無限小変形写像による $\partial/\partial s$ の像が $\kappa i(M)$ と一致することにより示

される．

II)　E. 群 N の B, W および T^k への作用は，N の層 $R^1\varpi_*\Xi_B$, $\mathcal{O}_W$ およびコホモロジー群 $H^1(T, \Theta_T)$ への作用をひき起こす．このとき次が成り立つ．

5.4.　補題． N-$\mathcal{O}_W$-加群の標準的同型

$$R^1\varpi_*\Xi_B \simeq \mathcal{O}_W \underset{C}{\otimes} H^1(T, \Theta_T)$$

が存在する．

5.5 系． 表現 $\Phi : N \to GL(k, \boldsymbol{C})$ の核 K が N の中で指数有限ならば，次の標準的同型が存在する．

$$H^0(N, R^1\varpi_*\Xi_B) \simeq H^1(T, \Theta_T)^N \simeq H^1(N/K, \Theta_T).$$

以後この節では，K は N の中で指数有限と仮定しておく．$H^1(T, \Theta_T)^N$ の任意の元 θ をとると，作用 $(N/K, T)$ の変形 $(N/K, \mathfrak{T}, \tau, S)$ で，$S=\{s\in\boldsymbol{C} \mid |s|<\varepsilon\}$ は小円板，かつ無限小変形写像 $\boldsymbol{T}_{S,o} \to H^1(N/K, \Theta_T)$ と，上の同型 $H^1(N/K, \Theta_T) \simeq H^1(T, \Theta_T)^N$ の合成による $\partial/\partial s$ の像が θ に一致するものが構成できる．上の $(N/K, \mathfrak{T}, \tau, S)$ に対し，(N, B) の変形 $(N, \mathfrak{B}, \beta, S)$ で次の条件をみたすものを構成することを試みる．

(1)　β は次のように分解する．

$$\mathfrak{B} \xrightarrow{\Pi} W \times S \xrightarrow{p} S,$$

ここで，Π は同変正則写像で，p は射影．

(2)　各 $s\in S$ に対し，$\Pi|_{B_s} : B_s \to W\times\{s\}$ は W 上の主 $T_s\,(=\tau^{-1}(s))$ 束．

各 s に対し，$\mathcal{T}_s$ を W から T_s への局所正則写像の芽の層とする．上の目的のためには，(N, B) を定める類 $m\in H^1(N, \mathcal{T})$ の拡張 $\boldsymbol{m}(s)$ (各 s につき $\boldsymbol{m}(s)\in H^1(N, \mathcal{T}_s)$ で，$\boldsymbol{m}(s)$ は s に複素解析的に依る) を求めることを考える．(4.3) に現われる写像 $a : H^0(N, R^1\varpi_*(\Xi_B)) \to H^2(N, \varpi_*\Xi_B)$ を用いると $\boldsymbol{m}(s)$ の存在条件は次のようになる．

5.6.　定理． m の拡張 $\boldsymbol{m}(s)$ が存在するためには，$a(\theta)=0$ となることが必要十分である．

さて，m の拡張 $\boldsymbol{m}(s)$ が存在したとすると，$c(m)$ が Bieberbach 類だから，十分小さいすべての s に対し，$c(\boldsymbol{m}(s))$ も Bieberbach 類である．したがって $\mathfrak{B}$ を N で割ると，Seifert ファイバー空間 M の変形 $\chi : \mathfrak{M} \to S$ を得る．各 $s\in S$ に対し，$M_s=\chi^{-1}(s)$ は $\boldsymbol{m}(s)$ から定まる $V=W/N$ 上の Seifert ファイバー空間で，一般のファイバーは T_s である．このような $\mathfrak{M}$ を M の‘ファイバー変形’ということにする．このとき次の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
H^1(N, \Theta_B) & \boldsymbol{T}_{S,o} \arrow[l, "\rho"'] \arrow[dl, dashed, "\rho'"'] \arrow[drr, "\rho"] & & \\
H^1(N, \Xi_B) \arrow[u, "\kappa"] \arrow[r, "f"] & H^0(N, R^1\varpi_*\Xi_B) \arrow[r, phantom, "\simeq"] & H^1(T, \Theta_T)^N. &
\end{tikzcd}$$

準同型 $\rho' : \boldsymbol{T}_{S,o} \to H^1(N, \Xi_B)$ で，$\kappa\circ\rho'=\rho$, $f\circ\rho'=\rho$ をみたすものが存在することを示すのは容易である．対応 $\theta \mapsto \rho'(\partial/\partial s)$ は分裂

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{\bar{i}} D \underset{\sigma}{\overset{\bar{f}}{\rightleftarrows}} E \longrightarrow 0$$

を定める．E を $H^1(M, \Theta_M)$ の部分群 $\bar{\kappa}\sigma(E)$ と同一視すると上の定理より次を得る．

5.7.　系． E の各元には障害がない．実際各元は M のファイバー変形を表わす．

III)　F. 作用 (N, W) の変形 $(N, \mathfrak{W}, \omega, S)$ が与えられたとする．ここで，$S=\{s\in\boldsymbol{C} \mid |s|<\varepsilon\}$ は小

円板，で $(N, W_0)\,(=(N, \omega^{-1}(0)))$ は (N, W) に同値であるとする．このとき，次の(A), (B)を見つけることを考える．

(A)　$(N/K, T)$ の変形 $(N/K, \mathfrak{T}, \tau, S)$ で $(N/K, T_0)=(N/K, T)$ となるもの．

(B)　(N, B) の変形 $(N, \mathfrak{B}, \beta, S)$ で次をみたすもの．

(1)　$(N, B_0)=(N, B)$,

(2)　β は $\mathfrak{B}\xrightarrow{\Pi}\mathfrak{W}\xrightarrow{\omega}S$ と分解される，ここで Π は同変正則写像,

(3)　$\varpi_s=\Pi|_{B_s}: B_s\to W_s$ は主 T_s-束．

上のような変形が見つかったら，$\mathfrak{B}$ を N で割ると Seifert ファイバー空間 M の変形 $\chi: \mathfrak{M}\to S$ を得る．各 $s\in S$ に対し，$M_s=\chi^{-1}(s)$ は W_s/N 上の Seifert ファイバー空間で，一般のファイバーは T_s である．$\mathfrak{M}$ を M の‘変底形’ということにする．上の目的のために (N, B) を定める類 $m\in H^1(N, \mathcal{T})$ の拡張 $\boldsymbol{m}(s)$ を求める．つまり各 s に対し，$\boldsymbol{m}(s)\in H^1(N, \mathcal{T}_s)$ ($\mathcal{T}_s=W_s$ から T_s への局所正則写像の芽の層)でかつ，$\boldsymbol{m}(s)$ は s に‘複素解析的に’依る．m から $\boldsymbol{m}(s)$ を作るとき，可算個の障害が存在するが，第一障害は次のような意味がある．まず与えられた変形 $(N, \mathfrak{W}, \omega, S)$ に対して，無限小変形写像

$$\rho: \boldsymbol{T}_{S,o} \longrightarrow H^1(N, \Theta_W)$$

を考えると，

5. 8. 定理. もし $\rho(\partial/\partial s)$ が $F=\mathrm{Ker}\,(l\circ\delta^1)$ の中にあれば，m を拡張するための第一障害は消える．

IV)　H. 以上の考察から，H の 0 でない元は，もしそれに障害がなければ，Seifert ファイバー空間 $\pi: M\to V$ のファイバー構造をなくす変形を表わすことがわかる．次が成り立つ．

5. 9. 補題. N-$\mathcal{O}_W$-加群の標準的同型

$$R^1\varpi_*(\varpi^*\Theta_W) \simeq \Theta_W \underset{C}{\otimes} H^1(T, \mathcal{O}_T)$$

が存在する．

5. 10. 系. 次の標準的同型が存在する．

$$H^0(N, R^1\varpi_*(\varpi^*\Theta_W)) \simeq (H^0(W, \Theta_W)^K \underset{C}{\otimes} H^1(T, \mathcal{O}_T))^{N/K},$$

ただし K は表現 Φ の核である．

5. 11. 系. W 上に K-不変正則ベクトル場が存在しなければ，$H=0$.

§6. $\dim_C W=1$ の場合.

このとき，M はコンパクト Riemann 面 $V=W/N$ 上の Seifert ファイバー空間である．まず，

6. 1. 補題. $\mathcal{S}$ が連接的 N-$\mathcal{O}_B$-加群なら，

$$H^p(N, \varpi_*\mathcal{S}) = 0, \qquad p \geqslant 2.$$

6. 2. 系. $H^2(N, \varpi_*\Xi_B)=H^2(N, \varpi_*\Theta_B)=H^2(N, \Theta_W)=0$.

一般性を失うことなく([4](3. 11)) W は単連結と仮定してよい．この節ではさらに $\Phi: N\to GL(k, \boldsymbol{C})$ の各等方部分群 $N_w\,(w\in W)$ への制限は自明であると仮定する(この条件は $k=1$ なら常にみたされている)．そうすると[4](2. 4) Lemma により，層 $\nu_*^N\mathcal{O}_W^k$ は階数 k の局所自由な $\mathcal{O}_V$-加群である．したがって V 上の階数 k のベクトル束 Q が存在して，$\nu_*^N\mathcal{O}_W^k$ は Q の正則切断の芽の層 $\mathcal{O}_V(Q)$ に同型である．束 Q は基本群 $\pi_1(V)$ の表現で定義され，この表現は，N の表現 Φ から標準的にひき起こされることに注意しておく([4](3. 6) Lemma, および同 p. 141 参照)．以下ベクトル群 C, E, F

および H を計算する．$\boldsymbol{D}$ を単位円板，$\boldsymbol{P}^1$ を射影直線とし，Riemann 面 V の種類を g で表わす．写像 ν による集合 $\{w\in W|N_w\neq\{e\}\}$ の像は V 上の有限個の点 $p_1,\cdots,p_r$ よりなるが，d で因子 $\sum_{i=1}^{r} p_i$ を表わし，$\Theta_{V|d}$ で V 上のベクトル場で d で消えるものの芽の層を表わす．2.3 補題と 2.5 命題により，$H^p(N,\Theta_W)=H^p(V,\Theta_{V|d})$，$p\geqslant 0$，である．

まず C については，ベクトル束 Q に対する Riemann-Roch の定理を用いると次を得る．

6.4. 定理.

$$\dim C=\begin{cases}\dim H^0(W,\mathcal{O}_W^k)^N-1, & g=1,\ r=0\ \text{かつ写像}\ \varphi^0\ \text{が零写像のとき,}\\ \dim H^0(W,\mathcal{O}_W^k)^N+k(g-1), & \text{その他のとき.}\end{cases}$$

$\dim H^0(W,\mathcal{O}_W^k)^N$ は次のような場合容易に求められる．$l=\dim\{v\in\boldsymbol{C}^k|\Phi(\alpha)v=v,\ \forall\alpha\in N\}$ とし，K を Φ の核とする．

6.5. 補題. K が N の中で指数有限なら，

$$\dim H^0(W,\mathcal{O}_W^k)^N=l.$$

6.6. 系. Φ が自明なら，

$$\dim C=\begin{cases}k-1, & g=1,\ r=0\ \text{で写像}\ \varphi^0\ \text{が零写像のとき,}\\ kg, & \text{その他のとき.}\end{cases}$$

6.7. 系. $W=\boldsymbol{P}^1$ なら，$\dim C=0$.

φ^0 が零写像になるための条件については[21]を参照されたい．次に M_k を k 次複素正方行列全体とすると，

6.8. 定理. K が N の中で指数有限なら，

$$E=H^1(T,\Theta_T)^N=\{A\in M_k|A\overline{\Phi(\alpha)}=\Phi(\alpha)A,\ \forall\alpha\in N\}.$$

6.9. 系. Φ が自明なら，$\dim E=k^2$.

F と H については次のようになる．

6.10. 定理.

$$\dim F=\dim H^1(V,\Theta_{V|d})=\begin{cases}0, & g=0\ \text{かつ}\ r\leqslant 3\ \text{のとき.}\\ 1, & g=1\ \text{かつ}\ r=0\ \text{のとき.}\\ 3g-3+r, & \text{その他のとき,}\end{cases}$$

6.11. 定理. K が H の中で指数有限なら，

$$\dim H=\begin{cases}k(3-r), & g=0\ \text{かつ}\ r<3\ \text{のとき,}\\ 0, & \text{上の場合と,}\ g=1\ \text{かつ}\ r=0\ \text{以外のほかの場合.}\end{cases}$$

種々の例については[21]を参照されたい．

§7. C^*-Seifert ファイバー空間の変形.

§3 の Seifert ファイバー空間の構成において，トーラス T^k を複素乗法群 $\boldsymbol{C}^*=\boldsymbol{C}-\{0\}$ でおきかえても議論を平行にすすめられる．まず (N,W) を§3と同じとし，(3.1)の代りに指数列

$$0\longrightarrow\boldsymbol{Z}\xrightarrow{\ \iota\ }\boldsymbol{C}\xrightarrow{\ e\ }\boldsymbol{C}^*\longrightarrow 1 \tag{7.1}$$

$(e(z)=\exp(2\pi iz))$ を考える．この節では Φ は自明な準同型にとっておく．(7.1)より W 上の N-層の完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \mathcal{O}_W \xrightarrow{e} \mathcal{O}_W^* \longrightarrow 1 \tag{7.2}$$

を得，これよりコホモロジー完全列

$$\cdots \longrightarrow H^1(N, \mathcal{O}_W) \xrightarrow{e_*} H^1(N, \mathcal{O}_W^*) \xrightarrow{c} H^2(N, \mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots \tag{7.3}$$

を得る．Ker c を作用 (N, W) の Picard 群とよぶ．$H^1(N, \mathcal{O}_W^*)$ の元 m で $c(m)$ が Bieberbach 類となるようなものをとると，W 上の主 $\boldsymbol{C}^*$-束 B と不動点なしの固有不連続な作用 (N, B) が構成され，図式(3.11)を得る．$\pi: M \to V$ を $\boldsymbol{C}^*$-Seifert ファイバー空間という．点 $\nu(w)$ 上のファイバー $\pi^{-1}(\nu(w))$ は $\boldsymbol{C}^*/N_w$ に同型である．われわれの場合，Φ は自明であるとしたから，実は主 $\boldsymbol{C}^*$-束 B への $\boldsymbol{C}^*$ の自然な作用は N の作用と両立し，これは M への $\boldsymbol{C}^*$-作用をひき起こす．しかも明らかに V は作用 $(M, \boldsymbol{C}^*)$ の軌道空間でもある．M はコンパクトでないので，$\boldsymbol{C}^*$-Seifert ファイバー空間の変形を考えるときは次のようなものに限る．

7.1. 定義． $\boldsymbol{C}^*$-Seifert ファイバー空間 $\pi: M \to V$ の変形は次の(A), (B)よりなる．

(A)　作用 (N, W) の変形 $(N, \mathfrak{W}, \omega, S)$, $((N, W_o)=(N, W))$,

(B)　作用 (N, B) の変形 $(N, \mathfrak{B}, \beta, S)$ で $(N, B_o)=(N, B)$ かつ β は $\mathfrak{B} \xrightarrow{\Pi} \mathfrak{W} \xrightarrow{\omega} S$ と分解されるもの，ただし，$\Pi: \mathfrak{B} \to \mathfrak{W}$ は ϖ を拡張する N-同変な主 $\boldsymbol{C}^*$-束写像．

(A), (B)より図式

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathfrak{M} = \mathfrak{B}/N \arrow[rr] \arrow[dr, "\chi"'] & & \mathfrak{W}/N = \mathfrak{V} \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

を得るが，これを $M \to V$ の変形と考えることができる．

上の定義において，$\mathfrak{B} \to \mathfrak{W} \to S$ は Kodaira-Spencer [11] の意味で主 $\boldsymbol{C}^*$-束の変形であるから次の層基本図式([11](4.2)p)を得る．

$$\begin{tikzcd} & 0 & 0 & 0 & \\ 0 \arrow[r] & \Theta_W \arrow[r] \arrow[u] & \Pi_W \arrow[r] \arrow[u] & T_W \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Sigma_W \arrow[r] \arrow[u] & \Gamma_W \arrow[r] \arrow[u] & T_W \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Xi_W \arrow[r] \arrow[u] & \Xi_W \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[u] & \\ & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & & \end{tikzcd} \tag{7.4}$$

ここで，第1列は W 上の束基本列([1])

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{T}_{B/W}/\boldsymbol{C}^* \longrightarrow \boldsymbol{T}_B/\boldsymbol{C}^* \longrightarrow \boldsymbol{T}_W \longrightarrow 0$$

($\boldsymbol{T}_{B/W}$ は，B の接ベクトルのうち $\varpi: B \to W$ のファイバーに接するもののなすベクトル束)の各束の正則切断の芽の層をとって得られるもので，T_W は W 上の定数層 $W \times \boldsymbol{T}_{S,o}$ である．(7.4)の各層は自然な N-層の構造を持っている．第2行より，連結写像

$$\partial: H^0(N, T_W) \longrightarrow H^1(N, \Sigma_W)$$

を得るが，$H^0(N, T_W) = H^0(W, T_W)^N = \boldsymbol{T}_{S,o}^N = \boldsymbol{T}_{S,o}$ だから，$\boldsymbol{C}^*$-Seifert ファイバー空間の無限小変形写像

$$\eta : \boldsymbol{T}_{S,o} \longrightarrow H^1(N, \Sigma_W)$$

を得る(cf. [11] p. 371). 次にコホモロジー群 $H^1(N, \Sigma_W)$ をもう少し調べる. (7.4)の第1列より次のコホモロジー完全列を得る.

$$\cdots\longrightarrow H^0(N, \Theta_W) \xrightarrow{\partial_0} H^1(N, \Xi_W) \xrightarrow{\varphi} H^1(N, \Sigma_W) \xrightarrow{\psi} H^1(N, \Theta_W) \xrightarrow{\partial_1} H^2(N, \Xi_W) \longrightarrow \cdots.$$

ここで $C=\mathrm{Im}\,\varphi=\mathrm{Coker}\,\partial^0$, $F=\mathrm{Im}\,\psi=\mathrm{Ker}\,\partial^1$ とおくと完全列

$$(7.5)\qquad 0\longrightarrow C \longrightarrow H^1(N, \Sigma_W) \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

を得る. ここで C と F は§5におけるのと同様の意味をもつ. まず Ξ_W は N-層として $\mathcal{O}_W$ と同型であることに注意すると, C は $\boldsymbol{C}^*$-Seifert ファイバー空間 $M\to V$ の'ねじれ変形'を表わすことがわかり, また F は $M\to V$ の'底変形'を表わしている. また, $\dim W=1$ のときの C, F の計算も§6と同様にできる.

X を $\boldsymbol{C}^n$ の中の原点のみに特異点があり, $\boldsymbol{C}^*$ 作用を持つアファイン代数多様体とすると, $M=X-0$ は $\boldsymbol{C}^*$-Seifert ファイバー空間の構造をもつ. 大体において, M の $\boldsymbol{C}^*$-Seifert 変形は $(X, 0)$ の変形のうち, X の $\boldsymbol{C}^*$ 作用が安定なもの(Schlessinger の T^1_X に自然な grading $T^1_X=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} T^1_X(\nu)$ を与えたときの $T^1_X(0)$)と一致する([23]).

文　献

[1] M. Atiyah, Complex analytic connections in fibre bundles, Trans. Amer. Math. Soc., **85** (1957), 181–207.

[2] E. Brieskorn, Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten, Invent. Math., **2** (1969), 1–14.

[3] P. E. Conner, Lectures on the Action of a Finite Group, Lecture Notes in Math. No. 73, Springer-Verlag, (1968).

[4] P. E. Conner and F. Raymond, Holomorphic Seifert fiberings, Proc. of the Second Conf. on Compact Transformation Groups, Part II, Lecture Notes in Math. 299, Springer-Verlag, (1972), 124–204.

[5] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku Math. J., **9** (1957), 119–227.

[6] H. Holmann, Seifertsche Faserräume, Math. Ann., **157** (1964), 138–166.

[7] L. Kaup, Das topologische Tensorprodukt kohärenter analytischer Garben, Math. Z., **106** (1968), 273–292.

[8] 河田敬義, ホモロジー代数 II, 岩波講座基礎数学, 岩波書店, 1977.

[9] K. Kodaira, On compact analytic surfaces, II, III, Ann. of Math., **77** (1963), 563–626, **78** (1963), 1–40.

[10] ——, On the structure of compact complex analytic surfaces, II, Amer. J. Math., **88** (1966), 682–721.

[11] K. Kodaira and D. C. Spencer, On deformations of complex structures, I, II, Ann. of Math., **67** (2) (1958), 328–466.

[12] 牧尾一彦, 相対的変形の理論, 赤城山代数幾何学シンポジウム(1970), 51–88.

[13] P. Orlik and F. Raymond, Actions of $SO(2)$ on 3-manifolds, Proc. of the Conf. on Transformation Groups, Springer-Verlag, (1968), 297–318.

[14] P. Orlik and P. Wagreich, Isolated singularities of algebraic surfaces with $\boldsymbol{C}^*$-action, Ann. of Math., **93** (1971), 205–227.

[15] ——, Seifert n-manifolds, Invent. Math., **28** (1975), 137–159.

[16] R. von Randow, Zur Topologie von dreidimensionaler Baummannigfaltigkeiten, Bonner Math. Schriften 14, 1962.

[17] F. Raymond, Classification of the action of the circle on 3-manifolds, Trans. Amer. Math. Soc., **131** (1968), 51–78.

[18] H. Seifert, Topologie dreidimensionale gefaserter Räume, Acta Math., **60** (1933), 147–238.

[19] T. Suwa, On hyperelliptic surfaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I, **16** (1970), 469–476.

[20] ——, Compact quotiant spaces of $\boldsymbol{C}^2$ by affine transformation groups, J. Diff. Geom., **10** (1975), 239–252.

[21] ——, Deformations of holomorphic Seifert fiber spaces, Invent. Math., **51** (1979), 77–102.

[22] ——, Deformations of holomorphic group actions, Math. Ann., **240** (1979), 281–286.

[23] ——, Deformations of $\boldsymbol{C}^*$-Seifert fibrations, to appear.

(1978年5月6日提出)

(すわ　たつお・北海道大学理学部)