非可換 Hardy 空間とその周辺

斎 藤 吉 助

§1. まえがき

Hardy 空間の理論は良く知られているように，他の分野と密接に結びついて現在も著しい発展を続けている．$1 \leq p \leq \infty$ とする．任意の関数 $f \in L^p(T)$ (T は単位円)は Fourier 級数

$$f(e^{i\theta}) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi}\int f(e^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$$

に一意に展開できる．関数 f のスペクトル $\mathrm{Sp}(f)$ を $\{n \in \boldsymbol{Z} : c_n \neq 0\}$ として定義する(これは§3 での T 上の回転より導入される流れのスペクトルと一致する)．このとき，単位円 T 上の Hardy 空間 $H^p(T)$ は $\{f \in L^p(T) : \mathrm{Sp}(f) \subset (0, 1, 2, \cdots)\}$ によって定義される．このように，$H^p(T)$ を流れのスペクトル部分空間の立場から見直すことにより，われわれは Hardy 空間の理論を作用素環論として取り扱い，非可換 Hardy 空間を構成し，その最近の発展を紹介することを目的とする．

非可換 Hardy 空間の起源は 1950 年代後半にさかのぼる．それは，Helson-Lowdenslager[11], Massani-Wiener[19]による正則行列値関数からなる空間，すなわち，$\{[f_{ij}]_{i,j=1,2,\cdots,n} : f_{ij} \in H^p(T)\}$ である．また，1960 年，Kadison-Singer[13]は三角行列環の一般化として，triangular 環を導入し，von Neumann 環の中で自己共役でない部分環の系統的な研究をした．この 2 つの概念を結ぶものとして，von Neumann 環の中に subdiagonal 環が $*$-弱 Dirichlet 環の非可換版として，1967 年，Arveson[1]によって導入され，作用素環の解析性が研究された．彼は subdiagonal 環の個々の例に対して，分解定理，Jensen の不等式や Szegö の定理について，注目すべき結果を示した．さらに，1970 年代になって，流れによるスペクトル部分空間の研究が Arveson[2]や河村[15]などによってなされ，作用素環の構造(例えば，III型因子の分類など)を知る上で有効な道具になっている．富山[40]の論説でも述べられているように，このスペクトル部分空間が subdiagonal 環に密接に結びついてくるのである．今，G を局所コンパクト可換群で Γ を G の双対で全順序がはいっているものとし，$\Gamma_+ = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \geqq 0\}$ とする．$\{\alpha_t\}_{t \in G}$ を von Neumann 環 M 上の $*$-弱連続一径数 $*$-自己同型群(これを単に M 上の流れと呼ぶ)とする．このとき，M の元のスペクトル(定義は§3)が Γ_+ に含まれる元の集合 $H^\infty(\alpha)$ は自己共役でない σ-弱閉部分環になる．M が G-有限(§3 参照)ならば，$H^\infty(\alpha)$ は M の中で極大な subdiagonal 環になることが，1976 年，河村-富山[16], Loebl-Muhly[18]などによって示された．後に，筆者によって，有限 von Neumann 環において，Segal[35]の非可換積分論を用いることにより非可換 Hardy 空間 H^p $(1 \leq p \leq \infty)$ が構成された．

Hardy 空間の理論の中心課題の一つとして，不変部分空間の構造研究があるが，そのことについては，荷見[6], [7], 中路[27]の論説に詳細に記述してある．ここで，簡単に $L^2(T)$ の不変部分空間について触れる．$\mathfrak{M}$ が $L^2(T)$ の不変部分空間とは $e^{i\theta}\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}$ なる $L^2(T)$ の閉部分空間をいう．$e^{i\theta}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ ならば $\chi_E L^2(T)$ (E は T の可測部分集合で χ_E は E の特性関数)の形にかける(Wermer の定理)；また，$e^{i\theta}\mathfrak{M} \subsetneqq \mathfrak{M}$ ならば $qH^2(T)$ ($q \in L^\infty(T)$ で $|q| = 1$ a. e.)の形にかける(Beurling の定理)．

しかも $L^2(T)$ の不変部分空間はこの型以外にないことが示されている．このことは $L^\infty(T)$ において σ-弱閉部分環としての $H^\infty(T)$ の極大性が不変部分空間の理論を容易にしている．

上で述べたように，流れによって与えられる $H^\infty(\alpha)$ は M の subdiagonal 環として極大であって，σ-弱閉部分環としては極大かどうかわからない．そこで，可換でない von Neumann 環 M において，σ-弱閉部分環として極大な $H^\infty(\alpha)$ は存在するかという問題が生じてくる．この解答として，1977 年，McAsey-Muhly-筆者[21], [22]によって非共役接合積 $\mathcal{L}_+$ が導入され，そこにおいて，$\mathcal{L}_+$ の σ-弱閉部分環としての極大になるための必要かつ十分条件が論ぜられた．さらに，不変部分空間の形の決定がそのままもちこめることを示し関数環の一般化としての概念と作用素環の概念を結びつけた．

そこで，本稿では非可換 Hardy 空間の理論，特に，不変部分空間の研究を中心にして，述べることにする．まず，§2 では subdiagonal 環の定義を述べる．§3 において，流れによって与えられる subdiagonal 環について示す．§4 以下では，有限極大 subdiagonal 環に限定する．§4 では，有限極大 subdiagonal 環から非可換 Hardy 空間を構成し，その性質，分解定理，さらに不変部分空間について示す．§5 では非共役接合積を定義し，その極大性と不変部分空間について示す．最後に，§6 で，Arveson[3] と Arveson-Josephson[4] の結果を非共役接合積に書き直して，エルゴート理論における保測変換の分類と非共役接合積の同型性について考察する．

§2. Subdiagonal 環と準備

H を複素 Hilbert 空間，$B(H)$ を H 上のすべての有界線形作用素の全体とする．今，任意の $\xi_1, \xi_2, \cdots, \eta_1, \eta_2, \cdots \in H$ で $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|\xi_n\|^2 < \infty$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|\eta_n\|^2 < \infty$ をみたすものに対して，

$$T \longmapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(T\xi_n, \eta_n)|$$

は $B(H)$ 上の半ノルムになる．これらの半ノルムによって定義される局所凸位相を σ-弱位相という．これは一般には弱位相よりも強いが $B(H)$ の単位球の中では一致している．$B(H)$ の単位元を含み自己共役で σ-弱位相で閉じた部分環 M を von Neumann 環と呼ぶ．このとき良く知られているように，M は Banach 空間 M_* の共役空間となっているので，M の中に *-弱位相が考えられるが，これは σ-弱位相の M における相対位相と一致している．また，S を $B(H)$ の部分集合とするとき，$S' = \{x \in B(H) : xy = yx\ (\forall y \in M)\}$ とおくと，M が von Neumann 環であることと $M = M''$ は同値である．さらに $M \cap M' = \mathcal{Z}(M)$ とおく．これを M の中心と呼び，特に，$\mathcal{Z}(M) = \boldsymbol{C}1$ のとき，M を因子(factor)という．

まず，subdiagonal 環の定義から始めよう．

定義 2.1. D を M の von Neumann 部分環(M の部分環で von Neumann 環)とする．Φ を M から D の上への σ-弱連続線形写像とする．このとき，Φ が normal expectation とは，$\|\Phi\| = 1$ で Φ の D への制限 $\Phi|_D$ が恒等写像のときをいう．Φ が忠実とは，$\Phi(x^*x) = 0$ をみたす $x \in M$ は 0 に限るときにいう．

定義 2.2. H^∞ を M の σ-弱閉部分環で $1 \in H^\infty$ とする．Φ を M から $H^\infty \cap H^{\infty *}(=D)$ の上への忠実な normal expectation とする．今，H^∞ が Φ に関して，subdiagonal 環であるとは次の(1), (2)が成立するときにいう．

(1)　$H^\infty+H^{\infty *}$ は M で σ-弱稠密である.

(2)　Φ は H^∞ 上乗法的，すなわち，任意の $x, y\in H^\infty$ に対して，$\Phi(xy)=\Phi(x)\Phi(y)$ をみたす.

上のような H^∞ が H^∞ を含む Φ に関する subdiagonal 環が存在しないとき，極大という.

このとき，Arveson[1]で，次のことが示された.

定理 2.3. H^∞ を Φ に関する subdiagonal 環とし，$H_0^\infty=\{x\in H^\infty : \Phi(x)=0\}$，$H_m^\infty=\{x\in M : \Phi(H_0^\infty xH^\infty)=\Phi(H^\infty xH_0^\infty)=0\}$ とおくとき，H_m^∞ は H^∞ を含む Φ に関する極大な subdiagonal 環になる.

この定理から，任意の subdiagonal 環はいつもある極大 subdiagonal 環に含まれることがわかる. そこで，われわれのこれから扱う subdiagonal 環はいつも極大なものを考える.

次に τ を M 上の線形汎関数とする. 任意の $x\in M$ に対して，$\tau(x^*x)\geq 0$ のとき正値という. 正値な線形汎関数で $\tau(1)=1$ のとき状態という. τ が忠実とは $\tau(x^*x)=0$ なる $x\in M$ は 0 に限るときをいう. τ が σ-弱連続のとき normal という. さらに，正値な線形汎関数で，任意の $x, y\in M$ に対して，$\tau(xy)=\tau(yx)$ をみたすとき，τ を有限な trace という. $\forall x\in M$，$x\gneqq 0$ に対して，$\tau(x)\neq 0$ をみたす有限な normal trace が存在するとき，M は有限 von Neumann 環という. M が σ-有限とは M の互いに直交する射影作用素が高々可算のときをいう. もちろん，可分な Hilbert 空間上の von Neumann 環は σ-有限になる. σ-有限な有限 von Neumann 環 M は忠実で有限な normal trace をもち，作用素環の重要な一つのクラスをつくっている.

σ-有限な有限 von Neumann 環において，有効な道具は Segal[35]によって導入された，非可換積分論である. それは忠実で有限な normal trace の存在によって，次のように構成される.

M を Hilbert 空間 H 上の von Neumann 環で忠実で有限な normal trace τ をもつものとする. しかも $\tau(1)=1$ とする. x を H 上の閉作用素(必ずしも有界でない)とする. x が可測とは，M のすべての元と可換な有界作用素の全体 M' のすべての元と可換な場合をいう. 任意の $p\,(1\leq p<\infty)$ に対して

$$L^p(M,\tau)=\{x : \text{可測},\ \tau(|x|^p)<\infty\}$$

とおく. ただし $|x|=\int_0^\infty \lambda de_\lambda$ を $|x|$ のスペクトル分解とするとき，$\tau(|x|^p)=\int_0^\infty \lambda^p d\tau(e_\lambda)$ を意味する. $\|x\|_p=\tau(|x|^p)^{1/p}$ とおくと $L^p(M,\tau)$ はノルム $\|\cdot\|_p$ に関して，Banach 空間になる. 特に $L^2(M,\tau)$ は $(x|y)=\tau(y^*x)$ によって Hilbert 空間になる. 可換な von Neumann 環の場合は可測作用素の概念は可測関数の概念と本質的に一致する. そこで，可換の L^p 空間のもつ性質をこの $L^p(M,\tau)$ はもっている. 例えば，$1<p<\infty$，$1/p+1/q=1$ のとき，$L^p(M,\tau)^*\cong L^q(M,\tau)$ で $L^1(M,\tau)^*\cong M$ が成り立つ. そこで，$L^\infty(M,\tau)$ と M を同一視することにする. また S を $L^p(M,\tau)$ の部分集合とするとき，$[S]_p$ を $L^p(M,\tau)$ における S の L^p-ノルム閉包，$[S]_\infty$ を M における S の σ-弱閉包とする.

M の任意の元 x に対して，$l_x(y)=xy$，$r_x(y)=yx\ (\forall y\in L^2(M,\tau))$ と定義すると，l_x, r_x は $L^2(M,\tau)$ 上の有界作用素になる. しかも $\{l_x\}_{x\in M}=l(M)$，$\{r_x\}_{x\in M}=r(M)$ とおくと，M と $l(M)$ は von Neumann 環として，同型になり，$l(M)'=r(M)$，$r(M)'=l(M)$ をみたす.

定義 2.4. H^∞ が Φ に関する極大な subdiagonal 環とする. H^∞ が有限とは，M 上に $\tau\circ\Phi=\tau$ をみたす忠実で有限な normal trace が存在するときにいう.

§3. 流れによって与えられるsubdiagonal環

MをHilbert空間H上のvon Neumann環，Gを局所コンパクト可換群で$\Gamma=\hat{G}$(Gの双対)で$\Gamma_+=\{\gamma\in\Gamma:\gamma\geq 0\}$によって全順序がはいっているものとする．$\{\alpha_g\}_{g\in G}$を$M$上の$\sigma$-弱連続一径数同型群(われわれはこれを単に$M$上の流れと呼ぶ)とする．しかも$\{\alpha_g\}_{g\in G}$は自明でないとする．まずArveson[2]や河村[15]等におけるようにスペクトル部分空間を定義する．$L^1(G)$の任意の関数fと$x\in M$に対して，

$$\alpha(f)x=\int_G \alpha_g(x)f(g)d\mu(g)$$

として，fとxのたたみこみ(convolution)を定義する．ただし，μはGのHaar measureとする．今$J(x)=\{f\in L^1(G):\alpha(f)x=0\}$とおくと，$\alpha(f)$は$M$上の$\sigma$-弱連続な有界作用素になり，$f\mapsto\alpha(f)$は$L^1(G)$の表現を与えるので，$J(x)$は$L^1(G)$の閉イデアルになる．そこで，$x$のスペクトルとして，$J(x)$のhull，すなわち，

$$\mathrm{Sp}_\alpha(x)=\bigcap_{f\in J(x)}\{\gamma\in\Gamma:\hat{f}(\gamma)=0\}$$

とおく．ただし，$\hat{f}(\gamma)=\int_G\langle g,\gamma\rangle f(g)d\mu(g)$とする．今$\Gamma$の部分集合$E$に対して，流れ$\{\alpha_g\}_{g\in G}$のスペクトル部分空間を

$$M^\alpha(E)=\{x\in M:\mathrm{Sp}_\alpha(x)\subset E\}$$

によって，定義する．このとき，次の基本的な性質が成り立つ．

補助定理 3.1. (1) Γの部分集合Eに対して，$M^\alpha(E)$はMの部分空間になる．

(2) EがΓの閉部分集合ならば，$M^\alpha(E)$はσ-弱閉部分空間になる．

そこで，特に$H^\infty(\alpha)=M^\alpha(\Gamma_+)$, $H_0^\infty(\alpha)$を$M^\alpha(\Gamma_+\backslash\{0\})$の$\sigma$-弱閉包とするとき，この$H^\infty(\alpha)$をわれわれは流れ$\{\alpha_g\}_{g\in G}$によって与えられる非可換Hardy空間と呼ぶことにする．$M(\alpha)=H^\infty(\alpha)\cap H^\infty(\alpha)^*$とおく．

命題 3.2([18]). (1) $H^\infty(\alpha)$はMの自己共役でないσ-弱閉部分環である．

(2) $H_0^\infty(\alpha)$は$H^\infty(\alpha)$の両側イデアルになる．

(3) $H^\infty(\alpha)+H^\infty(\alpha)^*$は$M$で$\sigma$-弱稠密である．

(4) $M(\alpha)=\{x\in M:\alpha_g(x)=x(\forall g\in G)\}=M^\alpha(\{0\})$

定理 3.3([16], [18]). Mから$M(\alpha)$の上への忠実なnormal expectation Φで$\Phi\circ\alpha_g=\Phi\,(\forall g\in G)$なるものが存在するとすれば，$H^\infty(\alpha)$は$\Phi$に関して，極大subdiagonal環になる．しかも$H_0^\infty(\alpha)=\{x\in H^\infty(\alpha):\Phi(x)=0\}$が成り立つ．

証明はLoebl-Muhly[18]，河村-富山[16]に譲ることにする．

注意 3.4. 定理3.3の条件はα_g-不変でnormalな状態が十分にたくさんある，すなわち，$M_+=\{x\in M:x\geq 0\}$とするとき$\forall x\in M_+$, $x\neq 0$に対して$\rho(x)>0$をみたすα_g-不変でnormal状態ρが存在することと同値である．これはG-有限という概念でよく知られており，Kovács-Szücs[17]によって研究された．

次にGをコンパクトとする．任意の$x\in M$, $\gamma\in\Gamma$に対して，

$$\varepsilon_\gamma(x)=\int_G\overline{\langle g,\gamma\rangle}\alpha_g(x)d\mu(g)$$

とする．$M_\gamma=\{x\in M:\alpha_g(x)=\langle g,\gamma\rangle x(\forall g\in G)\}$とおくと，

$$\varepsilon_\gamma(M) = M_\gamma = M^\alpha(\{\gamma\})$$

が成り立つ．特に ε_0 は M から $M(\alpha)$ の上への忠実な normal expectation で $\varepsilon_0\circ\alpha_g=\varepsilon_0$ をみたす．したがって，G がコンパクトのときはいつも M は G-有限になっている．

補助定理 3.5 ([31]). (1) $\forall x\in M$ に対して，

$$\mathrm{Sp}_\alpha(x) = \{\gamma\in\Gamma : \varepsilon_\gamma(x)\neq 0\}.$$

(2) $H^\infty(\alpha)=\{x\in M : \varepsilon_\gamma(x)=0\ (\forall\gamma<0)\}$.

例 3.6. $M=L^\infty(T)$ (T : 単位円) とする．任意の $f\in L^\infty(T)$ に対して

$$\alpha_{e^{it}}f(e^{is}) = f(e^{i(t+s)})$$

とすると $\{\alpha_{e^{it}}\}_{e^{it}\in T}$ は $L^\infty(T)$ 上の流れになる．しかもエルゴート的であることがわかるから，$M(\alpha)=\boldsymbol{C}$ になる．したがって $f\mapsto(1/2\pi)\int f(e^{i\theta})d\theta$ は M から $M(\alpha)$ の上の忠実な normal expectation になる．まえがきでも述べたように，古典的な Hardy 空間 $H^\infty(T)$ と $H^\infty(\alpha)$ は一致する．

例 3.7. M_n を $n\times n$ 行列の全体とする．Helson-Lowdenslager [11] などによって，単位円 T から M_n に値をとる可測関数で本質的に有界なものの全体を $L^\infty(T, M_n)$ とおくとき，解析的行列値関数として，$H^\infty(T, M_n)$ を考えた．ところで，$L^\infty(T, M_n)$ は $L^\infty(T)$ と M_n のテンソル積 $L^\infty(T)\otimes M_n$ と同一視される．そこで，$M=L^\infty(T)\otimes M_n$ とするとき，M 上の流れを例 3.6 の $\{\alpha_{e^{it}}\}_{e^{it}\in T}$ を用いて，$\tilde{\alpha}_{e^{it}}=\alpha_{e^{it}}\otimes 1$ によって定義する．$H^\infty(\tilde{\alpha})=H^\infty(T)\otimes M_n$ が成り立ち，$H^\infty(\tilde{\alpha})$ と $H^\infty(T, M_n)$ は同型になる (cf. [32]).

§4. 非可換 Hardy 空間の性質と不変部分空間

M を von Neumann 環で Φ を M から M の中への忠実な normal expectation とする．H^∞ を Φ に関する有限極大 subdiagonal 環とする．したがって，$\tau\circ\Phi=\tau$ をみたす M 上の忠実な normal trace τ で $\tau(1)=1$ をみたすものが存在する．$1\leq p\leq\infty$ に対して，§2 のように $L^p(M,\tau)$ を構成する．

$$H_0^\infty = \{x\in H^\infty;\ \Phi(x)=0\}$$

とおき，$H^p=[H^\infty]_p$, $H_0^p=[H_0^\infty]_p$ とする．この H^p を非可換 Hardy 空間と呼ぶ．また $H^\infty\cap H^{\infty *}=D$ とおく．まず次の命題が成り立つ．

命題 4.1. (1) $L^2(M,\tau)=H^2\oplus H_0^{2*}=H_0^2\oplus H^{2*}$.

(2) $H^\infty=\{x\in M;\ \tau(xy)=0\ (\forall y\in H_0^\infty)\}$.

証明. (1) $H^\infty+H^{\infty *}=H^\infty+H_0^{\infty *}$ は M で σ-弱稠密であることから示せる．

(2) まず $x\in M$ とする．$\forall y\in H_0^\infty$ に対して，$\tau(xy)=0$ であることと $xH^2\subset H^2$ は同値．そこで

$$\mathfrak{A} = \{x\in M : xH^2\subset H^2\}$$

とおくと，$\mathfrak{A}$ は M の σ-弱閉部分環で $H^\infty\subseteq\mathfrak{A}\subsetneqq M$ であることがわかる．$\mathfrak{A}+\mathfrak{A}^*$ は M で σ-弱稠密ゆえ Φ が $\mathfrak{A}$ 上乗法的であることを示せば，$\mathfrak{A}$ は Φ に関する subdiagonal 環になる．H^∞ の極大性より $\mathfrak{A}=H^\infty$ が成り立つ．何となれば，$\mathfrak{A}_0=\{x\in\mathfrak{A} : \Phi(x)=0\}$ とおくと，$x\in\mathfrak{A}_0$ と $xH^2\subset H_0^2$ なることは同値ゆえ，$\mathfrak{A}_0$ は $\mathfrak{A}$ の両側イデアルになることが示せる． (終)

Hardy 空間において，重要な役割を果たすものとして，分解定理がある．$f\in L^1(T)$ で $\log|f|\in L^1(T)$ ならば，$f=qg$ で $|q|=1$ a. e. をみたす $q\in L^\infty(T)$ と $g\in H^1(T)$ に分解できる．これはよく知られた Szegö の定理の系として示される．非可換 Hardy 空間においてもこれと類似した定理が成り立つ．1967 年に Arveson [1] は $k\in M$ で $k^{-1}\in M$ ならば，$k=ua$, $a^{-1}\in H^\infty$ をみたす M のユニタ

リ作用素 u と $a\in H^\infty$ が存在することを示した．1977年，McAsey-Muhly-筆者[22]によって，$k\in M$ で $k^{-1}\in L^2(M,\tau)$ (k^{-1} は非有界作用素として)ならば，$k=ua$ をみたす M のユニタリ作用素 u と $a\in H^\infty$ が存在することを示した．後に筆者[34]が，この条件のもとで，$a^{-1}\in H^2$ であることを証明した．

定理 4.2 ([22], [34]). $k\in M$ で $k^{-1}\in L^2(M,\tau)$ ならば $k=u_1a_1=a_2u_2$，$a_1^{-1}, a_2^{-1}\in H^2$ をみたす M のユニタリ作用素 u_1, u_2 と $a_1, a_2\in H^\infty$ が存在する．

これを示すために，Arveson[1]で示された次の補助定理が有効である．$x\in L^2(M,\tau)$ が右側酔歩的であるとは $x\perp[xH_0^\infty]_2$ であるときにいう．

補助定理 4.3. $x\in L^2(M,\tau)$ が右側酔歩的であるとする．このとき，$ux\in[D]_2$ で l_{u^*u} が $L^2(M,\tau)$ から $[xM]_2$ の上への射影作用素であるような M の部分等距離作用素 u がある．

定理 4.2 の略証．$k^{-1}\in L^2(M,\tau)$ より，$k\notin[kH_0^\infty]_2$．そこで $p_{[kH_0^\infty]_2}$ を $L^2(M,\tau)$ から $[kH_0^\infty]_2$ の上への射影作用素とする．$y=p_{[kH_0^\infty]_2}k$ とおくとき，$x=k-y$ は右側酔歩的であることがわかる．よって，補助定理 4.3 から $ux\in[D]_2$，l_{u^*u} は $L^2(M,\tau)$ から $[xM]_2$ の上への射影作用素になる M の部分等距離作用素 u がある．このとき，u は M のユニタリ作用素で $ux=a$ とおくとき，$a\in H^\infty$，$a^{-1}\in H^2$ であることが示される．　(終)

この定理 4.2 を用いて，H^p の基本的性質を示そう．命題 4.1 から次の補助定理を得る．

補助定理 4.4. $H^1\cap L^2(M,\tau)=H^2$，$H_0^1\cap L^2(M,\tau)=H_0^2$.

補助定理 4.5. $H^1=\{x\in L^1(M,\tau):\tau(xy)=0\ (\forall y\in H_0^\infty)\}$.

証明．$\subseteq$ は明らか．逆に任意の $y\in H_0^\infty$ に対して，$\tau(xy)=0$ をみたす $x\in L^1(M,\tau)$ で $x\neq0$ をとる．このとき $x=|x^*|v$ を x の極分解とする．ただし，$|x^*|=(xx^*)^{1/2}$ とする．$[0,\infty]$ 上の連続関数 f を

$$f(t)=\begin{cases}1 & (0\leq t\leq1)\\ 1/t & (t>1)\end{cases}$$

と定義する．今 $k=f(|x^*|^{1/2})$ とおくと $k\in M$ で $k^{-1}\in L^2(M,\tau)$ であることがわかる．そこで，定理 4.2 から $k=ua$，$a^{-1}\in H^2$ をみたす M のユニタリ作用素 u と $a\in H^\infty$ がある．しかも $|x^*|^{1/2}=\int_0^\infty\lambda de_\lambda$ とスペクトル分解すると $f(\lambda)\lambda$ は有界ゆえ，

$$k|x^*|^{1/2}=\int_0^\infty f(\lambda)\lambda de_\lambda\in M.$$

したがって，$ax\in L^2(M,\tau)$．任意の $y\in H^\infty$ に対して，

$$(ax,y^*)=\tau(axy)=\tau(xya)=0.$$

したがって，命題 4.1 より，$ax\in H_0^2$ ゆえ，

$$x=a^{-1}ax\in H^2H^2\subset H^1.\qquad(終)$$

$\forall x\in M$ に対して，$\Phi(x)=v|\Phi(x)|\ (v\in D)$ と極分解すると，

$$\|\Phi(x)\|_1=\tau(|\Phi(x)|)=\tau(v^*\Phi(x))=\tau(v^*x)\leq\|x\|_1.$$

これから，Φ を $L^1(M,\tau)$ から $[D]_1$ の上への expectation に一意に拡張できる．この拡張もまた Φ とかく．したがって，次の補助定理が容易に示せる．

補助定理 4.6. $H_0^1=\{x\in L^1(M,\tau):\tau(xy)=0\ (\forall y\in H^\infty)\}=\{x\in H^1:\Phi(x)=0\}$.

定理 4.7. $1\leqq p\leqq\infty$ とする．

(1) $H^1\cap L^p(M,\tau)=H^p$, $H^1_0\cap L^p(M,\tau)=H^p_0$.

(2) $H^p=\{x\in L^p(M,\tau):\tau(xy)=0\ (\forall y\in H^\infty_0)\}$.

(3) $H^p_0=\{x\in L^p(M,\tau):\tau(xy)=0\ (\forall y\in H^\infty)\}$.

証明. (1) 命題4.1と補助定理4.4より $p=\infty$, 2のときはすでに示している. そこで, まず, $1<p<2$, $1/r+1/2=1/p$ とする. このとき, $H^p\subsetneqq H^1\cap L^p(M,\tau)$ は明らか. 任意の $x\in H^1\cap L^p(M,\tau)$ とする. $x=|x^*|v=|x^*|^{p/2}|x^*|^{p/r}v$ とおくとき, 補助定理4.5の連続関数 f を用いて, $k=f(|x^*|^{p/2})$ とおくと, $k\in M$, $k^{-1}\in L^2(M,\tau)$. そこで定理4.2から, $k=ua$, $a^{-1}\in H^2$ をみたす M のユニタリ作用素 u と $a\in H^\infty$ がある. このとき,

$$ax=u^*k|x^*|^{p/2}|x^*|^{p/r}v\in L^r(M,\tau)$$

であり, また,

$$ax\in H^1\cap L^r(M,\tau)\subset H^1\cap L^2(M,\tau)=H^2\subset H^p.$$

そこで

$$x=a^{-1}ax\in H^2ax\subset[H^\infty ax]_p\subset H^p.$$

したがって, $1<p<2$ のとき, $H^1\cap L^p(M,\tau)=H^p$. 同様にして, $H^1_0\cap L^p(M,\tau)=H^p_0$ も成立する.

次に, $2<p<\infty$, $1/p+1/q=1$ とする. $H^p\subset H^1\cap L^p(M,\tau)$ は自明ゆえ, $y\perp H^p$ ならば $\tau(yx)=0$ $(\forall x\in H^\infty)$. よって, 補助定理4.6より

$$y\in H^1_0\cap L^q(M,\tau)=H^q_0.$$

これから, $y\perp H^1\cap L^p(M,\tau)$ がわかる. したがって, $H^p=H^1\cap L^p(M,\tau)$. (2)と(3)は(1)より明らか. (終)

注意 4.8([32]). M を忠実で有限な normal trace τ をもつ von Neumann 環とする. $\tau(1)=1$ とする. $\{\alpha_t\}_{t\in\boldsymbol{R}}$ を M 上の流れで $\tau\circ\alpha_t=\tau$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$ をみたすものとする. このとき, 注意3.4から, M から $M(\alpha)$ の上への忠実な normal expectation Φ で $\Phi\circ\alpha_t=\Phi$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$ をみたすものがある. $H^\infty(\alpha)$ は Φ に関する有限な極大 subdiagonal 環になる. $1\leq p<\infty$ に対して, $\{\alpha_t\}_{t\in\boldsymbol{R}}$ は $L^p(M,\tau)$ 上の等距離作用素からなる強連続な表現に一意に拡張でき, これもまた $\{\alpha_t\}_{t\in\boldsymbol{R}}$ とかくことにする. §3と同様に $L^p(M,\tau)$ 上でも $\{\alpha_t\}_{t\in\boldsymbol{R}}$ に関するスペクトルが考えられるので,

$$H^p(\alpha)=\{x\in L^p(M,\tau):\mathrm{Sp}_\alpha(x)\subset[0,\infty)\}$$

$H^p_0(\alpha)=\{x\in L^p(M,\tau):\mathrm{Sp}_\alpha(x)\subset(0,\infty)\}$ の L^p-ノルム閉包とする. このとき[32]から, Φ を $L^p(M,\tau)$ から $[M(\alpha)]_p$ の上への expectation Φ_p に一意に拡張できる. しかも, $H^p_0(\alpha)=\{x\in H^p(\alpha):\ \Phi_p(x)=0\}$ が成り立つ. これは一般の有限極大 subdiagonal 環では補助定理4.6から, $p=1$ のときだけ示されている. さらに[32]から, $H^p(\alpha)=[H^\infty(\alpha)]_p$ かつ $H^p_0(\alpha)=[H^\infty_0(\alpha)]_p$ が成り立つ.

次に, $\mathfrak{M}$ を $L^p(M,\tau)$ の閉部分空間($p=\infty$ のときは σ-弱閉部分空間)とする. $\mathfrak{M}$ が左側不変(右側不変)とは $H^\infty\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}H^\infty\subseteq\mathfrak{M}$) をみたすときにいう. まず不変部分空間の形の決定を考える前に次の重要なことを示す.

定理 4.9([34]). $1\leq p<\infty$ とする. $\mathfrak{M}$ を $L^p(M,\tau)$ の任意の左側(右側)不変部分空間とするならば, $[\mathfrak{M}\cap M]_p=\mathfrak{M}$, すなわち, $\mathfrak{M}$ は M の有界作用素を稠密に含む.

これは定理4.2, 4.7を用いて示される. 可換の場合に Gamelin-Lumer により示された定理を拡張する.

定理 4.10([43]). $1\leqq p<s\leqq\infty$ とする. $\mathfrak{M}_p$ が $L^p(M,\tau)$ の左側不変部分空間ならば, $\mathfrak{M}_p\cap L^s(M,\tau)$

は $L^s(M,\tau)$ の左側不変部分空間であって，$\mathfrak{M}_p=[\mathfrak{M}_p\cap L^s(M,\tau)]_p$ である．また，$\mathfrak{M}_s$ が $L^s(M,\tau)$ の左側不変部分空間ならば，$\mathfrak{M}_s=[\mathfrak{M}_s]_p\cap L^s(M,\tau)$ である．右側不変部分空間についても同様に成り立つ．

証明．$s=\infty$ のときだけ示せば十分である．前半は定理4.9から示される．$\mathfrak{M}$ を $L^\infty(M,\tau)=M$ の左側不変部分空間とする．$[\mathfrak{M}]_p\cap M=\tilde{\mathfrak{M}}$ とおくとき，$\mathfrak{M}\subseteqq\tilde{\mathfrak{M}}$ は明らかである．そこで，2つの場合にわけて，$\mathfrak{M}\subsetneqq\tilde{\mathfrak{M}}$ として矛盾を導く．

(1) $2\leqq p<\infty$，$1/p+1/q=1$ とする．$\mathfrak{M}\neq\tilde{\mathfrak{M}}$ より，$x\in\tilde{\mathfrak{M}}$ で $x\notin\mathfrak{M}$ なるものがある．Hahn-Banach の定理より，$\tau(ax)=1$，$\tau(ay)=0\,(\forall y\in\mathfrak{M})$ をみたす $a\in L^1(M,\tau)$ が存在する．$a=v|a|=v|a|^{1/q}|a|^{1/p}$ とすると，補助定理4.5の f を用いて，$k=f(|a|^{1/p})$ とおくと，$k=bu$ をみたす $b\in H^\infty$，$b^{-1}\in H^2$ と M のユニタリ作用素 u がある．$k^{-1}\in L^p(M,\tau)$ より，定理4.7を用いて，$b^{-1}\in H^p$ が成り立つ．また，

$$ab=u|a|^{1/q}|a|^{1/p}ku^*\in L^q(M,\tau).$$

しかも，$b\mathfrak{M}\subseteqq\mathfrak{M}$ ゆえ，$\tau(aby)=0\,(\forall y\in\mathfrak{M})$ であるから，任意の $y\in[\mathfrak{M}]_p$ に対して，$\tau(aby)=0$．一方，$b^{-1}x\in H^p\tilde{\mathfrak{M}}\subset[\tilde{\mathfrak{M}}]_p=[\mathfrak{M}]_p$ より，

$$\tau(ax)=\tau(abb^{-1}x)=0.$$

これは矛盾．

(2) $1\leqq p<2$ のとき，$1/r+1/2=1/p$，$1/p+1/q=1$ とする．(1)同様に，$x\in\tilde{\mathfrak{M}}\backslash\mathfrak{M}$ と $a\in L^1(M,\tau)$ をとる．$a=v|a|=v|a|^{1/2}|a|^{1/2}$ として，$k=f(|a|^{1/2})\in M$ とおくと $k^{-1}\in L^2(M,\tau)$ より，(1)と同様に $k=bu$ と分解すると $ab\in L^2(M,\tau)$，また $b\in H^\infty$ かつ，$b^{-1}\in H^2$ となる．さらに，

$$ab=v'|ab|=v'|ab|^{2/q}|ab|^{2/r}$$

とすると，$|ab|^{2/r}\in L^r(M,\tau)\subset L^2(M,\tau)$ ゆえ，前に述べたのと同様にして，$abc\in L^q(M,\tau)$，$c^{-1}\in H^r$ なる $c\in H^\infty$ が存在する．さて，$bc\mathfrak{M}\subseteqq\mathfrak{M}$ より，任意の $y\in\mathfrak{M}$ に対して，

$$\tau((abc)y)=\tau(a(bcy))=0,$$

$(bc)^{-1}=c^{-1}b^{-1}\in H^rH^2\subset H^p$ より

$$(bc)^{-1}x\in H^p\tilde{\mathfrak{M}}\subset[\tilde{\mathfrak{M}}]_p=[\mathfrak{M}]_p$$

であるから，

$$\tau(abc(bc)^{-1}x)=\tau(ax)=0.$$

これは矛盾． (終)

次に，Beurling，Wiener による不変部分空間の定理は *-弱 Dirichlet 環の場合は Srinivasan-Wang[38]，中路[25]などによって，また，Hilbert 空間値関数においては荷見-Srinivasan[8]，大野[28]などの結果があるがここでは有限極大 subdiagonal 環の場合について考える．

定義 4.11. $\mathfrak{M}$ を $L^p(M,\tau)$ の閉部分空間($p=\infty$ ならば σ-弱閉)とする．

(1) $(H^\infty+H^{\infty*})\mathfrak{M}\subseteqq\mathfrak{M}$ ならば，$\mathfrak{M}$ は left doubly invariant (=l. d. i.) という．$\mathfrak{M}(H^\infty+H^{\infty*})\subseteqq\mathfrak{M}$ ならば，right doubly invariant (=r. d. i.) という．

(2) $[H_0^\infty\mathfrak{M}]_p\subsetneqq\mathfrak{M}$ ならば $\mathfrak{M}$ は left simply invariant (l. s. i.) という．$[\mathfrak{M}H_0^\infty]_p\subsetneqq\mathfrak{M}$ ならば，$\mathfrak{M}$ は right simply invariant (=r. s. i.) という．

定理 4.12 ([32])．$1\leqq p\leqq\infty$ とする．$\mathfrak{M}$ を $L^p(M,\tau)$ の閉部分空間($p=\infty$ のとき，σ-弱閉)とする．$\mathfrak{M}$ が l. d. i. (r. d. i.) であるための必要十分条件は $\mathfrak{M}=r_eL^2(M,\tau)\,(=l_eL^2(M,\tau))$ なる M の射影作用

素eが存在することである.

証明. 定理4.10より$p=2$のとき示せば十分である. $\mathfrak{M}$をl.d.i.とする. $P_{\mathfrak{M}}$を$L^2(M,\tau)$から$\mathfrak{M}$の上への射影とする. このとき, $H^\infty+H^{\infty*}$はMでσ-弱稠密でl.d.i.より, $\mathfrak{M}$は$l(M)$-不変になる. そこで, $P_{\mathfrak{M}}\in l(M)'=r(M)$. よって, $P_{\mathfrak{M}}=r_e$をみたすMの射影作用素eがある. したがって,

$$\mathfrak{M}=P_{\mathfrak{M}}L^2(M,\tau)=r_eL^2(M,\tau). \qquad (終)$$

l.s.i.とr.s.i.の研究は, 最初亀井[14]によって$L^1(M,\tau)$と$L^2(M,\tau)$の場合に示された.

定理4.13([14], [32]). $1\leq p\leqq\infty$で$\mathfrak{M}$を$L^p(M,\tau)$の閉部分空間とする. H^∞がantisymmetric, すなわち, $H^\infty\cap H^{\infty*}=\boldsymbol{C}$ならば, $\mathfrak{M}$がl.s.i.(r.s.i.)であるための必要十分条件は$\mathfrak{M}=H^pu\,(=uH^p)$をみたす$M$のユニタリ作用素$u$が存在することである.

証明. $\mathfrak{M}$をl.s.i.とする. $[H_0^\infty\mathfrak{M}]_2\subsetneqq\mathfrak{M}$より, $u\in\mathfrak{M}\ominus[H_0^\infty\mathfrak{M}]_2$で$\|u\|_2=1$にとる. このとき, $x\in H^\infty$ならば, H^∞はantisymmetricより, $x-\tau(x)1\in H_0^\infty$であるから,

$$\tau(u^*ux)=(xu,u)=((x-\tau(x))u,u)+(\tau(x)u,u)=\tau(x)(u,u)=\tau(x).$$

したがって, $\tau(x^*)=\tau(uu^*x^*)$が成り立つ. よって, 任意の$x\in H^\infty+H^{\infty*}$に対して, $\tau(u^*ux)=\tau(x)$. これから, $uu^*=1$. τは忠実であるから, $u^*u=1$. よって, uはMのユニタリ作用素になる. $H^\infty u\subset\mathfrak{M}$で$\mathfrak{M}$は閉より, $\mathfrak{M}\supset H^2u$. $b\in\mathfrak{M}\ominus H^2u$とすると, 任意の$x\in H^\infty$に対して,

$$\tau(bu^*x^*)=(b,xu)=0.$$

また, $H_0^\infty b\subset[H_0^\infty\mathfrak{M}]_2$より, 任意の$c\in H_0^\infty$に対して,

$$\tau(bu^*c)=(cb,u)=0.$$

そこで, 任意の$x\in H^{\infty*}+H_0^\infty$に対して,

$$\tau(bu^*x)=(x,ub^*)=0.$$

これから, $ub^*=0$. したがって, $b=0$ゆえ$\mathfrak{M}=H^2u$. (終)

したがって, $*$-弱Dirichlet環の不変部分空間の研究と同様にH^∞がantisymmetricの場合でもすべての不変部分空間の形の決定は困難であるが, §5でもっと典型的な有限極大subdiagonal環の場合にすべての不変部分空間の形の決定を試みる.

さらに, Arveson[1]ではSzegöの定理, Jensenの不等式のこの場合に対する研究があるが詳細は[1]を参照のこと.

§5. 非共役接合積の極大性と不変部分空間

作用素環の接合積の研究は最初Murry-Neumann[24]において, II型の有限因子(II_1-型という)を構成する方法, Group-measure constructionとして登場した. 以後それが作用素環の研究において, 強力な道具として, また, 力学系とも関連して, 作用素環の構造に寄与していることは周知のことである. ここで対象となっている接合積は自己共役であるが, 自己共役でない接合積の構造を研究することは, $L^\infty(T)$の構造よりも$H^\infty(T)$の構造が複雑で興味があるのと同じ理由によって, 研究する価値があるように思える. 非共役接合積はArvesonによって, 1967年にまず導入された. 彼はその一つとして, 非可換関数環, すなわち, Helson-Lowdenslager, Wiener-Massani等の正則行列値関数のつくる環と関連させて, subdiagonal環のいくつかの注目すべき例の構成をした. また, 詳細は§6で述べるが, [3], [4]において, エルゴート的保測変換の共役性と非共役接合積の同型性を結びつけた. これらの研究は非共役接合積の1つの方向性を与えているように思え

る．

M を忠実で有限な normal trace τ ($\tau(1)=1$) をもつ von Neumann 環とする．$L^2(M,\tau)$ を§2における空間とする．α を M 上の *-同型写像で $\tau\circ\alpha=\tau$ をみたすものとする．このとき，任意の $x\in M$ に対して

$$\|\alpha(x)\|_2^2=\tau(\alpha(x^*x))=\tau(x^*x)=\|x\|_2^2.$$

これから，α は $L^2(M,\tau)$ 上のユニタリ作用素 u に一意に拡張でき，しかも $\alpha(x)=uxu^*$ をみたす．今，接合積を定義するために，新しい Hilbert 空間

$$L^2=\left\{f:\boldsymbol{Z}\longmapsto L^2(M,\tau):\sum_{n=-\infty}^{\infty}\|f(n)\|^2<\infty\right\}$$

とおく．そこで，L^2 上の有界線形作用素を次のようにして定義する．任意の $x\in M$, $f\in L^2$ に対して，

$$(L_x^\alpha f)(n)=xf(n),\quad (R_x^\alpha f)(n)=f(n)\alpha^n(x),\quad (L_\alpha f)(n)=uf(n-1),\quad (R_\alpha f)(n)=f(n-1)$$

と定義する．$\{L_x^\alpha\}_{x\in M}=L^\alpha(M)$, $\{R_x^\alpha\}_{x\in M}=R^\alpha(M)$ とおくと $L^\alpha(M)$, $R^\alpha(M)$ は L^2 上の von Neumann 環になる．しかも L_α, R_α は L^2 上のユニタリ作用素になる．$\mathcal{L}(M,\alpha)$ を $L^\alpha(M)$ と L_α によって生成された von Neumann 環とする．このとき，$\mathcal{L}(M,\alpha)$ は $\left\{\sum_{n=-m}^{m}L_{x_n}^\alpha L_\alpha^n:x_i\in M\right\}$ の σ-弱閉包と一致する．$\mathcal{L}_+(M,\alpha)$ を $L^\alpha(M)$ と L_α の非負べきによって生成された $\mathcal{L}(M,\alpha)$ の σ-弱閉部分環，すなわち，$\left\{\sum_{n=0}^{m}L_{x_n}^\alpha L_\alpha^n:x_n\in M\right\}$ の σ-弱閉包とする．同様にして，$R^\alpha(M)$ と R_δ から $\mathcal{R}(M,\alpha)$ と $\mathcal{R}_+(M,\alpha)$ を構成する．このとき，$\mathcal{L}'=\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'=\mathcal{L}$ が成り立つ．この節では，$\mathcal{L}(M,\alpha)$, $\mathcal{L}_+(M,\alpha)$, $\mathcal{R}(M,\alpha)$, $\mathcal{R}_+(M,\alpha)$ を簡単にそれぞれ $\mathcal{L},\mathcal{L}_+,\mathcal{R},\mathcal{R}_+$ とかくことにする．さらに

$$(W_tf)(n)=e^{int}f(n),\quad f\in L^2,$$

とすると，$\{W_t\}_{t\in\boldsymbol{R}}$ は L^2 上の強連続な一径数ユニタリ群で周期 2π をもつ．そこで，任意の $x\in\mathcal{L}$ に対して，$\beta_t(x)=W_txW_t^*$ とおくと $\{\beta_t\}_{t\in\boldsymbol{R}}$ は周期 2π をもつ $\mathcal{L}$ 上の流れになることがわかる．よって，$\{\beta_t\}_{t\in\boldsymbol{R}}$ は単位円 T 上の流れと考えてよい．ゆえに，§3におけるように

$$\varepsilon_n^\alpha(x)=(1/2\pi)\int_0^{2\pi}e^{-int}\beta_t(x)dt,\quad x\in\mathcal{L},\quad n\in\boldsymbol{Z},$$

が定義できる．ε_0^α は $\mathcal{L}$ から $L^\alpha(M)$ の上への忠実な normal expectation で $\varepsilon_0^\alpha\circ\beta_t=\varepsilon_0^\alpha$ が成り立つ．

命題 5.1. (1) $\mathcal{L}_+=H^\infty(\beta)=\{x\in\mathcal{L}:\varepsilon_n^\alpha(x)=0\ (\forall n<0)\}$.

(2) $\mathcal{L}_+$ は ε_0^α に関する有限極大 subdiagonal 環になる．

ここで，$\mathcal{L}_+$ のいくつかの例を挙げる．

例 5.2. M を任意の σ-有限，有限 von Neumann 環とする．α を M 上の内部自己同型写像，すなわち，$\alpha(x)=uxu^*$ をみたす M のユニタリ作用素 u が存在するものとする．$L_u^{\alpha*}L_\alpha=R_\alpha$ から，$R_\alpha\in\mathcal{L}$ が示せるので，容易に，$\mathcal{L}$ と $L^\infty(T)\otimes M_n$ は同型で，$\mathcal{L}_+$ を $H^\infty(T)\otimes M$ に写像することがわかる．これは例 3.6 で $M=M_n$ に示したものになっている．

例 5.3. $\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_{n-1}\}$ を有限集合とする．$M=l^\infty(\Omega)$ とおき，α を巡回置換 $\omega_0\to\omega_1\to\omega_2\to\cdots\to\omega_{n-1}\to\omega_0$ によって，誘導された $l^\infty(\Omega)$ 上の同型写像とする．$L^\infty(T)\otimes M_n$ の元を $a_{ij}\in L^\infty(T)$ からなる $n\times n$ 行列 $[a_{ij}]$ の全体と同一視でき，このとき，$H^\infty(T)\otimes M_n$ は $a_{ij}\in H^\infty(T)$ からなる $[a_{ij}]$ の全体と同一視できる．今 $\{\omega_k\}$ の特性函数を x_k とおく．このとき，

$$\phi(L^{\alpha}_{x_0})=\begin{bmatrix}0&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&\ddots\\&&&&1\end{bmatrix},\quad \phi(L^{\alpha}_{x_1})=\begin{bmatrix}1&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&\ddots\\&&&&0\end{bmatrix},\quad \phi(L^{\alpha}_{x_2})=\begin{bmatrix}0&&&\\&1&&\\&&0&\\&&&\ddots\\&&&&1\end{bmatrix},\quad \cdots,$$

$$\phi(L^{\alpha}_{x_{n-1}})=\begin{bmatrix}0&&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&1\\&&&&0\end{bmatrix},\quad \phi(L_{\alpha})=\begin{bmatrix}0&0\cdots&&z\\1&0\cdots&&0\\0&1\cdots&&0\\&&\ddots&\\0&&1&0\end{bmatrix}$$

と定義するとこの ϕ は $\mathcal{L}$ から $L^{\infty}(T)\otimes M_n$ の上への同型写像に拡張できる．しかも，$\mathcal{L}_+$ を $a_{ij}(0)=0\,(i=j)$ をみたす $H^{\infty}(T)\otimes M_n\ni[a_{ij}]$ の上に写像する．この例については McAsey [20] によって詳細に研究されている．

例 5.4. (Ω, m) を non-atomic 確率測度空間で $M=L^{\infty}(\Omega)$ とする．$\tilde{\alpha}$ を Ω 上のエルゴード的保測変換で α を $\tilde{\alpha}$ によって誘導される $L^{\infty}(\Omega)$ 上の同型写像とする．この節の最初に述べたように，$\mathcal{L}$ は Murray-von Neumann の群測度環でII型の有限因子になっている．$\mathcal{L}_+$ は Arveson ([3], [4]) で研究した環と密接に関係している．

ここで，$\mathcal{L}_+$ は subdiagonal 環として極大であるが σ-弱閉部分環として極大かどうかということは興味深い問題であるが，まず，不変部分空間の形を決定することから示すことにする．

定義 5.5. $\mathfrak{M}$ を L^2 の閉部分空間とする．

(1) $\mathfrak{M}$ が左側不変とは $\mathcal{L}_+\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}$ のとき．

(2) $\mathfrak{M}$ が右側不変とは $\mathcal{R}_+\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}$.

(3) $\mathfrak{M}$ が両側不変とは $(\mathcal{L}_++\mathcal{R}_+)\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}$.

(4) $\mathfrak{M}$ が pure とは $\bigcap_{n>0} L^n_{\alpha}\mathfrak{M}=(0)$ をみたすこと．

(5) $\mathfrak{M}$ が full とは $\bigcup_{n<0} L^n_{\alpha}\mathfrak{M}$ が L^2 で稠密である．

$H^2=\{f\in L^2 : f(n)=0\ (\forall n<0)\}$ とおくと，$H^2=[\mathcal{L}_+]_2=[\mathcal{R}_+]_2$ で，H^2 は pure かつ full な両側不変部分空間になる．われわれは Beurling の定理を一般化し，どんなときに成り立つかを考える．

$\mathfrak{M}$ を左側不変部分空間とすると，L_{α} は $\mathfrak{M}$ 上の等距離作用素になる．そこで，$\mathcal{F}=\mathfrak{M}\ominus L_{\alpha}\mathfrak{M}$ を考える．$n\neq m$ のとき，$L^n_{\alpha}\mathcal{F}$ と $L^m_{\alpha}\mathcal{F}$ は直交するので $\mathcal{F}$ を $\mathfrak{M}$ の酔歩空間と呼ぶことにする．このとき，作用素論でよく知られているように，

$$\mathfrak{M}=\bigcap_{n\geq 0} L^n_{\alpha}\mathfrak{M}\oplus\sum_{n=0}^{\infty}\oplus L^n_{\alpha}\mathcal{F}$$

とかける．明らかに $\bigcap_{n\geq 0} L^n_{\alpha}\mathfrak{M}$ は l. d. i. すなわち，$\mathcal{L}$-不変になるので，§4 から eL^2 (e は $\mathcal{R}$ の射影作用素) の形にかけることがわかる．一方，$\sum_{n=0}^{\infty}\oplus L^n_{\alpha}\mathcal{F}$ は pure 左側不変部分空間になる．そこで $\mathfrak{M}$ が pure と仮定して十分である．

定義 5.6. N を von Neumann 環とする．p, q を N の射影作用素とする．$u^*u=p$, $uu^*=q$ をみたす N の部分等距離作用素 u があるとき，p と q は N で同値といい，$p\sim q$ とかく．p が q の部分射影作用素 q' と N において $p\sim q'$ ならば $p\precsim q$ とかく．M が有限のとき $p\sim q\leqq p$ ならば，$p=q$ が成り立つことはよく知られている．

補助定理 5.7. $i=1, 2$ とする．$\mathfrak{M}_i$ を L^2 の pure 左側不変部分空間とする．p_i を L^2 から $\mathfrak{M}_i\ominus$

$L_\alpha\mathfrak{M}_i$ の上への射影作用素とする．このとき，$p_i\in L^\alpha(M)'$．もしも $L^\alpha(M)'$ において，$p_2\precsim p_1$ ならば $\mathfrak{M}_2=V\mathfrak{M}_1$ をみたす $\mathcal{R}$ の部分等距離作用素 V がある．

証明．$L^\alpha(M)$ が自己共役で $L_\alpha\mathfrak{M}$ が左側不変部分空間であることから，$p_i\in L^\alpha(M)'$ がわかる．仮定から，$p_2=ww^*$，$w^*w\leqq p_1$ をみたす $L^\alpha(M)'$ の部分等距離作用素 w がある．$K_i=[\bigcup_{n\in \boldsymbol{Z}} L_\alpha^n\mathfrak{M}_i]_2$ は l. d. i. であるから，V を K_i 上で定義すればよい．$\mathfrak{M}_i$ は pure ゆえ，$K_i=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\oplus L_\alpha^n(\mathfrak{M}_i\ominus L_\alpha\mathfrak{M}_i)$．そこで

$$V\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} L_\alpha^n\xi_n\Big)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} L_\alpha^n w\xi_n \qquad (\xi_n\in\mathfrak{M}_1\ominus L_\alpha\mathfrak{M}_1)$$
$$V|_{K_1^\perp}=0$$

とすると容易に V は $\mathcal{R}$ の部分等距離作用素で $\mathfrak{M}_2=V\mathfrak{M}_1$ をみたすことがわかる．　　(終)

系 5. 8. $\mathfrak{M}=VH^2$（V は $\mathcal{R}$ の部分等距離作用素）とする．このとき，$\mathfrak{M}$ が full であることと V がユニタリ作用素であることは同値.

証明．(⇐) は明らかより (⇒) を示す．$\mathfrak{M}$ が full であるとすると

$$VL^2=V[\bigcup_{n<0} L_\alpha^n H^2]_2=[\bigcup_{n<0} L_\alpha^n VH^2]_2=[\bigcup_{n<0} L_\alpha^n\mathfrak{M}]_2=L^2.$$

となって，V は全射より，V はユニタリ作用素になる．　　(終)

L^2 のすべての pure 左側不変部分空間が VH^2（V は $\mathcal{R}$ の部分等距離作用素）にかけるとき，Beurling の定理が成り立つという．どんなとき，Beurling の定理が成り立つか興味がある．

定理 5. 9([23])．α が M の中心 $\mathcal{Z}(M)$ 上で自明，すなわち，任意の $z\in\mathcal{Z}(M)$ に対して，$\alpha(z)=z$ であることと Beurling の定理が成り立つことは同値である．

証明(⇒)．α が $\mathcal{Z}(M)$ 上で自明と仮定．$\mathfrak{M}$ を L^2 の pure な左側不変部分空間とする．P を L^2 から $\mathfrak{M}\ominus L_\alpha\mathfrak{M}$ の上への射影，P_0 を L^2 から $H^2\ominus L_\alpha H^2$ の上への射影とする．$P, P_0\in L^\alpha(M)'$ ゆえ，比較定理[30]を用いて，$L_z^\alpha P\succsim L_z^\alpha P_0$ かつ $(1-L_z^\alpha)P\precsim(1-L_z^\alpha)P_0$ をみたす $\mathcal{Z}(M)$ の射影作用素 z がある．α が $\mathcal{Z}(M)$ 上自明ゆえ，$L_z^\alpha\in\mathcal{Z}(\mathcal{L})$ に属する．そこで，$L_z^\alpha\mathfrak{M}$，$L_z^\alpha H^2$ は pure 左側不変部分空間ゆえ，補助定理 5. 7 から，$L_z^\alpha H^2=V_1L_z^\alpha\mathfrak{M}$ をみたす $\mathcal{R}$ の部分等距離作用素 V_1 がある．同様にして $(1-L_z^\alpha)\mathfrak{M}=V_2(1-L_z^\alpha)H^2$ をみたす $\mathcal{R}$ の部分等距離作用素 V_2 がある．ところが，H^2 が full であることと $\mathcal{R}$ の有限性により，$V_1V_1^*=V_1^*V_1=L_z^\alpha$ が成り立つ．そこで，$L_z^\alpha\mathfrak{M}=V_1^*L_z^\alpha H^2$ をみたすので $V=V_1^*L_z^\alpha+V_2(1-L_z^\alpha)$ とおくと，V は $\mathcal{R}$ の部分等距離作用素で $\mathfrak{M}=VH^2$ をみたす．

(⇐)　今，α が $\mathcal{Z}(M)$ 上で自明でないとすると $\alpha(e)e=0$ をみたす $\mathcal{Z}(M)$ の射影作用素 e がある．そこで，

$$\mathfrak{M}=\{f\in L^2 : f(n)=0\,(\forall n\leq -2),\ \ ef(-1)=f(-1)\}$$

とおくと，$\mathfrak{M}$ は pure かつ full 左側不変部分空間でさらに，$L_e^\alpha L_\alpha^*\mathfrak{M}\subseteqq\mathfrak{M}$ をみたす．今 $\mathfrak{M}=VH^2$（V は $\mathcal{R}$ の部分等距離作用素）の形にかけたとすると，$\mathfrak{M}$ は full ゆえ，系 5. 8 から，V はユニタリ作用素になる．そこで，

$$L_e^\alpha L_\alpha^* H^2=L_e^\alpha L_\alpha^* V^*\mathfrak{M}=V^*L_e^\alpha L_\alpha^*\mathfrak{M}\subset V^*\mathfrak{M}=H^2.$$

これは矛盾する．　　(終)

次に，$\mathcal{L}_+$ が極大になるための必要十分条件を示す．

定理 5. 10.　次のことは同値.

(1)　M は因子である．

(2) $\mathcal{L}_+$ は $\mathcal{L}$ の σ-弱閉部分環として極大である.

(3) L^2 のすべての $\mathcal{L}\mathfrak{M}\subsetneqq\mathfrak{M}$ なる両側不変部分空間は $VH^2=WH^2$(V は $\mathcal{R}$ のユニタリ作用素, W は $\mathcal{L}$ のユニタリ作用素)にかける.

(4) H^2 のすべての両側不変部分空間は full かつ pure である.

(5) Beurling の定理が成り立ち, かつ $L^\alpha(M)\cap\mathcal{Z}(\mathcal{L})=\boldsymbol{C}$.

これを示すために2つの補助定理を必要とする.

補助定理 5.11 ([22]). M を因子とする. $\mathfrak{B}$ を $\mathcal{L}_+$ を含む $\mathcal{L}$ の $\{\beta_t\}_{t\in\boldsymbol{R}}$-不変 σ-弱閉部分環とすると, $\mathfrak{B}=\mathcal{L}_+$ または $\mathfrak{B}=\mathcal{L}$ が成り立つ.

証明. $\mathfrak{B}\neq\mathcal{L}_+$ と仮定. $\mathfrak{B}$ は $\{\beta_t\}_{t\in\boldsymbol{R}}$-不変ゆえ, 任意の $x\in\mathfrak{B}$ に対して, $\varepsilon_n^\alpha(x)\in\mathfrak{B}$. そこで, $\mathfrak{B}\neq\mathcal{L}_+$ ゆえ $\varepsilon_n(x)\neq0$ をみたす $x\in\mathfrak{B}$ と $n<0$ がある. したがって, $\varepsilon_n^\alpha(x)=L_y^\alpha L_\alpha^n\,(y\in M)$ の形にかける. しかし,

$$L^\alpha(M)L_y^\alpha L^\alpha(M)L_\alpha^n=L^\alpha(M)L_y^\alpha L_\alpha^n L^\alpha(M)\subseteq\mathfrak{B}.$$

$L^\alpha(M)L_y^\alpha L^\alpha(M)$ は $L^\alpha(M)$ の両側イデアルゆえ, また M は因子ゆえ, $L^\alpha(M)L_y^\alpha L^\alpha(M)$ は $L^\alpha(M)$ で σ-弱稠密である. そこで, $L^\alpha(M)L_\alpha^n\subseteq\mathfrak{B}$ より $L_\alpha^n\in\mathfrak{B}$. これから, $L_\alpha^*=L_\alpha^{-1}\in\mathfrak{B}$. よって, $\mathfrak{B}=\mathcal{L}$. (終)

補助定理 5.12 ([22]). M が因子で, $\mathcal{L}$ が因子でないとする. このとき, $\mathcal{Z}(\mathcal{L})$ と $L^\infty(T)$ は同型で, $\mathcal{Z}(\mathcal{L})\cap\mathcal{L}_+$ を $H^\infty(T)$ に写す. したがって, $\mathcal{Z}(\mathcal{L})\cap\mathcal{L}_+$ は $\mathcal{Z}(\mathcal{L})$ の σ-弱閉部分環として極大である.

定理 5.10 の証明. 証明のなかでもっとも困難な(1)⇒(2)を示そう. $\mathfrak{B}$ を $\mathcal{L}_+\subset\mathfrak{B}\subsetneqq\mathcal{L}$ をみたす σ-弱閉部分環とする. 定理 4.10 より $[\mathfrak{B}]_2\neq L^2$. 明らかに $[\mathfrak{B}]_2$ は1を含むから, $\mathcal{L}[\mathfrak{B}]_2\subsetneqq[\mathfrak{B}]_2$ なる両側不変部分空間である. $[\mathfrak{B}]_2=VH^2$(V は $\mathcal{R}$ のユニタリ作用素)の形にかけることを示せば十分である. 何となれば, $V^*[\mathfrak{B}]_2=H^2$ より,

$$[\mathfrak{B}]_2=V^*V[\mathfrak{B}H^2]_2=V^*[V\mathfrak{B}H^2]=V^*[\mathfrak{B}VH^2]_2=V^*[\mathfrak{B}[\mathfrak{B}]_2]_2=V^*[\mathfrak{B}]_2=H^2.$$

これから, $\mathfrak{B}=\mathcal{L}_+$ を得る.

$[\mathfrak{B}]_2=VH^2$ を示すには系 5.8 と定理 5.9 より, $[\mathfrak{B}]_2$ が full かつ pure であることを示せば十分. $H^2\subseteq[\mathfrak{B}]_2$ ゆえ, $[\mathfrak{B}]_2$ は full であるから, $[\mathfrak{B}]_2$ が pure を示す. そこで, P を L^2 から $\bigcap_{n\geq0}L_\alpha^n[\mathfrak{B}]_2$ の上への射影とする. このとき, $p=0$ を示そう. $\bigcap_{n\geq0}L_\alpha^n[\mathfrak{B}]_2$ は l. d. i. ゆえ, $p\in\mathcal{L}'=\mathcal{R}$. さらに, $R_\alpha[\mathfrak{B}]_2\subseteq[\mathfrak{B}]_2$ ゆえ $R_\alpha pR_\alpha^*\leqq p$. そこで, $\mathcal{R}$ は有限であるから, $R_\alpha pR_\alpha^*=P$. また, $R^\alpha(M)[\mathfrak{B}]_2\subseteq[\mathfrak{B}]_2$ より, $\bigcap_{n\geq0}L_\alpha^n[\mathfrak{B}]_2$ は r. d. i. である. そこで, $p\in\mathcal{R}'=\mathcal{L}$. これから, $p\in\mathcal{Z}(\mathcal{L})$. さらに,

$$p=p\cdot1\in pL^2=\bigcap_{n\geq0}L_\alpha^n[\mathfrak{B}]_2\subset[\mathfrak{B}]_2.$$

よって, 定理 4.10 より, $[\mathfrak{B}]_2\cap\mathcal{L}=\mathfrak{B}$ ゆえ,

$$p\in\mathcal{Z}(\mathcal{L})\cap[\mathfrak{B}]_2=\mathcal{Z}(\mathcal{L})\cap\mathfrak{B}.$$

今, $\mathcal{L}$ が因子ならば $p=0$. よって, $\mathcal{L}$ が因子でないとする. $\mathcal{Z}(\mathcal{L})\cap\mathfrak{B}$ は $\mathcal{Z}(\mathcal{L})\cap\mathcal{L}_+$ を含む σ-弱閉部分環であるので, 補助定理 5.12 から, (i) $\mathcal{Z}(\mathcal{L})\cap\mathfrak{B}=\mathcal{Z}(\mathcal{L})\cap\mathcal{L}_+$, または (ii) $\mathcal{Z}(\mathcal{L})\cap\mathfrak{B}=\mathcal{Z}(\mathcal{L})$ が成り立つ. (i)の場合, $p\in\mathcal{Z}(\mathcal{L})\cap\mathcal{L}_+\cong H^\infty(T)$ ゆえ, $p=0$. (ii)の場合, $\mathfrak{B}\supseteqq\mathcal{Z}(\mathcal{L})$ ゆえ, $\mathcal{L}$ を $\mathcal{L}_+$ と $\mathcal{Z}(\mathcal{L})$ によって, 生成された $\mathcal{L}$ の σ-弱閉部分環とする. このとき, $\mathcal{L}_+\subsetneqq\mathfrak{C}\subseteqq\mathfrak{B}\subsetneqq\mathcal{L}$ をみたす $\mathcal{L}$ の $\{\beta_t\}$-不変な σ-弱閉部分環であるから, これは補助定理 5.11 に矛盾する. (終)

例 5.2 より, α が内部自己同型写像であるならば, $\mathcal{L}\cong L^\infty(T)\otimes M$, $\mathcal{L}_+\cong H^\infty(T)\otimes M$. そこで, この仮定のもとでは次の系を得る.

系 5.13. M が因子であることと $H^\infty(T)\otimes M$ が $L^\infty(T)\otimes M$ の σ-弱閉部分環として極大であることは同値である.

定理 5.9, 5.10 より, Beurling の定理が成り立てば, α は $\mathcal{Z}(M)$ 上で自明である. したがって, $\mathcal{Z}(M)$ が十分小さくなるときの方が不変部分空間の決定はやさしくなる. そこで, M が可換な von Neumann 環の場合, 例えば, 例 5.3, 5.4 の場合の方が不変部分空間の形の決定は困難になるのは興味深い. このことについては, McAsey [20] の研究がある.

最後に, 有限極大 subdiagonal 環がどんなとき, 非共役接合積に表わせるかを考えてみる. Φ を M から M の中への忠実な normal expectation とする. H^∞ を Φ に関する有限極大 subdiagonal 環とする. したがって, $\tau\circ\Phi=\tau$ をみたす忠実で有限な normal trace τ がある. $D=H^\infty\cap H^{\infty *}$ とおく.

定理 5.14. $L^2(M,\tau)$ のすべての両側不変部分空間が H^2v (v は M のユニタリ作用素) の形にかけたとすると, D 上に τ-不変な $*$-同型写像 α が存在して, M は D と α による接合積 $\mathcal{L}$ に同型で, H^∞ は $\mathcal{L}_+$ に写される.

これと定理 5.10 から,

系 5.15. D は因子になる.

したがって両側不変部分空間の形の決定ができる有限極大 subdiagonal 環は非共役接合積にかぎることを示している.

§6. 非共役接合積における同型写像

Arveson [3] と Arveson-Josephason [4] において, ノルムの意味で閉じた自己共役でない部分環を考え, その同型性とエルゴート的保測変換の共役性を結びつけた. 彼等の議論は C^*-環の枠のいわば, C^*-subdiagonal 環の場合であるが, von Neumann 環の場においても, エルゴート的よりも弱い自由に作用する保測変換の分類が考えられる. この節ではこのことについて紹介したい. 記号は §5 のものをそのまま用いることにする.

定義 6.1. M を non-atomic で可換な von Neumann 環とする. α を M 上の $*$-同型写像とする. $\{\alpha^n\}_{n\in Z}$ が M 上自由に作用するとは, 任意の $n\neq 0$ と任意の射影作用素 $p(\neq 0)\in M$ に対して, $0\lneqq q\leqq p$ なる射影作用素 $q\in M$ があって, $\alpha^n(q)q=0$ をみたすことである. また, α がエルゴート的であるとは, $\alpha(p)=p$ なる M の射影作用素 p は 0 と 1 以外にないときにいう. このとき, α がエルゴート的ならば, $\{\alpha^n\}_{n\in Z}$ は自由に作用することはよく知られている.

補助定理 6.2 ([4]). M を non-atomic von Neumann 環で $\{\alpha^n\}_{n\in Z}$ は M 上で自由に作用するならば, $L^\alpha(M)$ は $\mathcal{L}(M,\alpha)$ において, 極大可換部分環である. すなわち, $L^\alpha(M)'\cap\mathcal{L}(M,\alpha)=L^\alpha(M)$ が成り立つ.

以下, M, N を non-atomic で可換な von Neumann 環とする. τ, τ' をそれぞれ M, N 上の faithful normal state で, α, β を M, N 上の $*$-自己同型写像で $\tau\circ\alpha=\tau$, $\tau'\circ\beta=\tau'$ をみたすとする. §5 におけるように, $\mathcal{L}(M,\alpha)$, $\mathcal{L}(N,\beta)$, $\mathcal{L}_+(M,\alpha)$, $\mathcal{L}_+(N,\beta)$ などを定義する. まず, 次のことが成り立つ.

定理 6.3 ([4], [39]). λ は M から N の上の $*$-同型写像で $\lambda\circ\alpha=\beta\circ\lambda$ をみたすならば, $\mathcal{L}(M,\alpha)$ から, $\mathcal{L}(N,\beta)$ への $*$-同型写像 ρ で,

$$\rho\left(\sum_{k=m}^{n} L^{\alpha}_{x_k} L^{k}_{\alpha}\right)=\sum_{k=m}^{n} L^{\beta}_{\lambda(x_k)} L^{k}_{\beta}$$

なるものが一意に存在して，しかも，ρ は $\mathcal{L}_+(M,\alpha)$ を $\mathcal{L}_+(N,\beta)$ の上に等長にかつ同型に写す．

そこで，この逆を考える．すなわち，$\mathcal{L}_+(M,\alpha)$ と $\mathcal{L}_+(N,\beta)$ が同型のときに M から N の上への $*$-同型写像 λ で $\lambda\circ\alpha=\beta\circ\lambda$ をみたすものがあるかを考える．$\{\alpha^n\}_{n\in Z}$，$\{\beta^n\}_{n\in Z}$ が M, N 上でそれぞれ自由に作用すると仮定する．

命題 6.4. ρ を $\mathcal{L}_+(M,\alpha)$ から $\mathcal{L}_+(N,\beta)$ の上への代数的同型写像とする．このとき，$A\rho(L^\alpha(M))A^{-1}\subset L^\beta(N)$ をみたす $A\in\mathcal{L}_+(N,\beta)\cap\mathcal{L}_+(N,\beta)^{-1}$ が存在する．

そこで，$\forall T\in\mathcal{L}_+(M,\alpha)$ に対して，

$$\sigma(T)=A\rho(T)A^{-1}$$

とおくと，σ は $\mathcal{L}_+(M,\alpha)$ から $\mathcal{L}_+(N,\beta)$ の上への同型写像で $\sigma(L^\alpha(M))\subset L^\beta(N)$ をみたす．よって，この σ について考察するとよい．$\{\alpha^n\}_{n\in Z}$ は M 上自由に作用するから，任意の $n\neq 0$ に対して，$\sum p_\lambda=1$, $\alpha^n(p_\lambda)p_\lambda=0$ をみたす M の互いに直交する射影作用素 $\{p_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ がある．$L^\alpha(M)$ は $\mathcal{L}_+(M,\alpha)$ で極大可換部分環ゆえ，$\sigma(L^\alpha(M))$ は $\mathcal{L}_+(N,\beta)$ で σ-弱閉になる．一般に，可換な C^*-環から可換な C^*-環の中への同型写像は $*$-同型写像であるので，$\sigma(L^\alpha(M))$ は自己共役，したがって，可換な von Neumann 環になる．よって，σ は $L^\alpha(M)$ 上で σ-弱連続になる．よって，$\sum\sigma(L^\alpha_{p_\lambda})=1$ をみたす．これを用いることにより，次の補助定理を得る．

補助定理 6.5([4]). (1) 任意の $x\in M$ に対して，

$$\varepsilon_0^\beta\circ\sigma(L_x^\alpha L_\alpha)=0.$$

(2) $\mathcal{L}_+(M,\alpha)$ 上で $\varepsilon_0^\beta\circ\sigma=\sigma\circ\varepsilon_0^\alpha$.

(3) $\sigma(L^\alpha(M))=L^\beta(N)$.

(4) $L_\beta\in\sigma(\mathcal{L}_+(M,\alpha)L_\alpha)$.

(5) $\sigma(L^\alpha(M)L_\alpha)\subset L^\beta(N)L_\beta$.

定理 6.6. $\mathcal{L}_+(M,\alpha)$ から $\mathcal{L}_+(N,\beta)$ の上への代数的同型写像が存在するとき，M から N の上への $*$-同型写像 γ で $\gamma\circ\alpha=\beta\circ\gamma$ をみたすものがある．

次に，例 5.4 について考える．定理 6.3, 6.6 から，次の系を得る．

系 6.7. (Ω, m) を non-atomic な確率測度空間で，$M=L^\infty(\Omega)$ とする．$\tilde{\alpha},\tilde{\beta}$ を Ω 上のエルゴート的保測変換で，α,β をそれぞれ，$\tilde{\alpha},\tilde{\beta}$ を $L^\infty(\Omega)$ 上に誘導した同型写像とする．このとき，$\mathcal{L}_+(M,\alpha)$ と $\mathcal{L}_+(N,\beta)$ が代数的に同型であることと，$L^\infty(\Omega)$ 上の同型写像 λ が存在して，$\lambda\circ\alpha=\beta\circ\lambda$ をみたすことは同値である．

文　　献

[1] W. B. Arveson, Analyticity in operator algebras, Amer. J. Math., **89** (1967), 578–642.

[2] ——, On groups of automorphisms of operator algebras, J. Funct. Anal., **15** (1974), 217–243.

[3] ——, Operator algebras and measure preserving automorphisms, Acta Math., **118** (1967), 95–109.

[4] W. B. Arveson and K. B. Josephson, Operator algebras and measure preserving automophisms II, J. Funct. Anal., **4** (1969), 100–134.

[5] P. A. Fillmore, Notes on operator theory, Van Nostrand Reinhold, 1970.

[6] M. Hasumi, Shift invariant subspace について，数学，**17** (1966), 214–224.

[7] ——, 不変部分空間について，数学，**28** (1976), 47–57.

[8] M. Hasumi and T. P. Srinivasan, Doubly invariant subspaces II, Pacific J. Math., **14** (1964), 525–535.

[9] H. Helson, Lectures on invariant subspaces, Academic Press, 1964.

[10] ——, Analyticity on compact abelian groups, Algebras in analysis, Academic Press, 1975, 1–62.

[11] H. Helson and D. Lowdenslager, Prediction

theory and Fourier series in several variables, Acta Math., **99** (1958), 165-202; II, Acta Math., **106** (1961), 175-213.

[12] K. Hoffman, Banach spaces of analytic functions, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962.

[13] R. Kadison and I. M. Singer, Triangular operator algebras, Amer. J. Math., **82** (1960), 227-259.

[14] N. Kamei, Simply invariant subspaces theorems for antisymmetric finite subdiagonal algebras, Tôhoku Math. J., **21** (1969), 467-473.

[15] S. Kawamura, On the commutation relation and the spectral condition of weakly continuous representations of a locally compact abelian group on Banach spaces, Bull. Yamagata Univ., **8** (1975), 479-489.

[16] S. Kawamura and J. Tomiyama, On subdiagonal algebras associated with flows in oper ator algebras, J. Math. Soc. Japan, **29** (1977), 73-90.

[17] I. Kovács and J Szücs, Ergodic type theorems in von Neumann algebras, Acta Sci. Math., **27** (1966), 233-246.

[18] R. I. Loebl and P. S. Muhly, Analyticity and flows in von Neumann Algebras, J. Funct. Anal., **29** (1978), 214-252.

[19] P. Masani and N. Wiener, The prediction theory of multivariate stochastic processes, Acta Math., **98** (1957), 111-150; II, Acta Math., **99** (1958), 93-137.

[20] M. McAsey, Invariant subspaces of non-self-adjoint crossed products, Doctor Thesis, Univ. of Iowa, 1978.

[21] M. McAsey P. S. Muhly and K. -S. Saito, Nonself-adjoint crossed products, in Lecture Notes in Math., 693 (Springer, Berlin, 1978), 121-124.

[22] ——, Non-self-adjoint crossed products (Invariant subspaces and maximality), Trans. Amer. Math. Soc., **248** (1979), 381-409.

[23] ——, Non-self-adjoint crossed products II, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[24] F. J. Murray and J. von Neumann, On rings of operators, Ann. of Math., **37** (1936), 116-229.

[25] T. Nakazi, Invariant subspaces of weak*-Dirichlet algebras, Pacific J. Math., **69** (1977), 151-167.

[26] ——, Extended weak*-Dirichlet algebras, Pacific J. Math., **81** (1979), 493-513.

[27] ——, *-弱 Dirichlet 環の不変部分空間について, 数学, **30** (1978), 207-217.

[28] Y. Ohno, Simply invariant subspaces, Tôhoku Math. J., **19** (1967), 368-378.

[29] T. Oshikane, On isomorphisms of non-self-adjoint crossed products, in preparation.

[30] S. Sakai, C^*-algebras and W^*-algebras, Ergebnisse der Math., 60, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1971.

[31] K. -S. Saito, The Hardy spaces associated with a periodic flow on a von Neumann algebra, Tôhoku Math. J., **29** (1977), 69-75.

[32] ——, On non-commutative Hardy spaces associated with flows on finite von Neumann algebras, Tôhoku Math. J., **29** (1977), 585-595.

[33] ——, On maximality of $H^\infty(\alpha)$ in finite von Neumann algebras, Sci. Rep. Niigata Univ. A **14** (1977), 1-3.

[34] ——, A note on invariant subspaces for finite maximal subdiagonal algebras, Proc. Amer. Math. Soc., **77** (1979), 348-352.

[35] I. E. Segal, A non-commutative extension of abstract integration, Ann. of Math., **57** (1953), 401-457.

[36] T.P. Srinivasan, Simply invariant subspaces, Bull. Amer. Math. Soc., **69** (1963), 706-709.

[37] ——, Doubly invariant subspaces, Pacific J. Math., **14** (1964), 701-707.

[38] T. P. Srinivasan and J. K. Wang, Weak*-Dirichlet algebras, Proc. Int. Symp. Function algebras (Tulane Univ. 1965), 216-249, Scott-Foresman, 1966.

[39] M. Takesaki, Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III, Acta Math., **131** (1973), 249-310.

[40] J. Tomiyama, 関数環と flow について, 数学, **26** (1976), 35-46.

[41] G. Zeller-Maier, Produits croisés d'une C^*-algèbre par un groupe d'automorphismes, J. Math. Pures et Appl., **47** (1968), 101-239.

[42] T. W. Gamelin, Uniform algebras, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1969.

[43] K. -S. Saito, Invariant subspaces for finite maximal subdiagonal algebras, preprint.

(1979年6月18日提出)

(さいとう きちすけ・新潟大学理学部)