より，補題1から，α は，surjective になる．$\varphi_1, \cdots, \varphi_r$ を $H^0(E, \tilde{\mathcal{E}}_n)$ の $H^0(E, \mathcal{O}_{\bar{X}}/\mathcal{I}^{n+1}\mathcal{O}_{\bar{X}})$ 上の基底，$H^0(E, \tilde{\mathcal{E}}_{n+1})$ の元 $\bar{\varphi}_1, \cdots, \bar{\varphi}_r$ を $\alpha(\bar{\varphi}_i)=\varphi_i$ にとる．そこで，Q を $(\bar{\varphi}_1, \cdots, \bar{\varphi}_r)$ で生成された $\tilde{\mathcal{E}}_{n+1}$ の subsheaf とすると，

$$Q+\mathcal{I}^{n+1}\tilde{\mathcal{E}}_{n+1}=\tilde{\mathcal{E}}_{n+1}.$$

中山の補題から，$Q=\tilde{\mathcal{E}}_{n+1}$．よって，$\tilde{\mathcal{E}}_{n+1}\cong\mathcal{O}^{\oplus r}$ となる．

2. $\pi^*\pi_*\tilde{\mathcal{E}}\cong\tilde{\mathcal{E}}$ を示す．$\pi^*\pi_*\tilde{\mathcal{E}}$ と $\tilde{\mathcal{E}}$ とは，共に階数 r のベクトル束だから，natural morphism $\pi^*\pi_*\tilde{\mathcal{E}}\xrightarrow{\beta}\tilde{\mathcal{E}}$ が surjective であることを示せば十分．さらに，$\tilde{\mathcal{E}}$ は局所的には，global sections で生成されているのだから，補題2から，β は，surjective になる．　（証明終り）

注意．Schwarzenberger は，代数曲面上，階数2のベクトル束を調べる際に，直線束による拡大と，上記の descent をうまく使っている([6], p. 326, [8])．ところで，代数多様体 X 上の階数 r ($<\dim X$) のベクトル束と，余次元 r の部分多様体との間には，密接な関係がある([3])．$\mathcal{E}$ を，十分たくさん global sections を持っている X 上の階数 r のベクトル束とする．s をその一般の section とすると，$\{x\in X\,|\,s(x)=0\}$ は，non-singular，余次元 r の部分多様体になっている([5], Corollary (3.6))．逆に，余次元 r の部分多様体から，階数 r のベクトル束を構成するという問題を考える時に，上述の一般化された定理は役に立つと思われる．例えば，Barth-Van de Ven の定理([1], Theorem (4.2))は，r が2の場合に，部分多様体から，ベクトル束を構成するものであるが，上の結論を使えば，Barth の定理の証明を，より簡単にすることができる．

終りに，補題2の証明は，レフェリーの方の御指摘によるものです．この掌篇を書くにあたり，適切な御教示をいただいた，渡辺敬一氏と日高文夫氏ならびにレフェリーの方に，深く感謝いたします．

文　献

[1] W. Barth and A. Van de Ven, A decomposability criterion for algebraic 2-bundles on projective spaces, Inventiones Math., **25** (1974), 91-106.

[2] A. Grothendieck, Fondements de la géomètrie algébrique Extraits du Séminaire. Bourbaki 1957-1962.

[3] R. Hartshorne, Stable Vector Bundles of Rank 2 on $\boldsymbol{P}^3$, Math. Ann., **238** (1978), 229-280.

[4] 飯高　茂，代数幾何学II，基礎数学講座，1977，岩波書店．

[5] S. L. Kleiman, Geometry on Grassmannianns and applications to splitting bundles and smoothing cycles, Publ. Math. I. H. E. S., **36** (1969), 281-298.

[6] 丸山正樹，代数的ベクトル束について，数学，**29** (1977)，322-333.

[7] D. Mumford, Abelian Varieties, Oxford Univ. Press, Oxford (1970).

[8] R. L. E. Schwarzenberger, Vector bundles on algebraic surface, Proc. London Math. Soc., **11** (1961), 601-622.

(1979年8月16日提出)

(いしむら　さだお・東京都立大学理学部)

Plückerの関係式の応用

吉　原　久　夫

古典的 Plücker の関係式が飯高[1]によって一般化された．それによるとすべての曲線を扱える様になり，平面曲線に関する若干の新しい結果と問題が出てくるので，これを述べようと思う．C を n ($n\geqq 2$) 次既約な平面代数曲線とする．以下，定義・記号等は[1]にしたがうものとし，射影同値は単に同値ということにする．

§1. 双対曲線について

例1. $(y-x^2)^2=x^3y$，$(y-x^2)^2=xy^3$ の定める $\boldsymbol{P}^2$ 内の4次曲線をそれぞれ C_1, C_2 とする．これらは有理曲線で，2重尖点をおのおの2個および1個もつ．これらの双対曲線を Γ_1, Γ_2 とすると，C_1 と Γ_1 は同値であり，Γ_2 は5次の有理曲線で，2重尖点を4個もち，それらのうち3個は単純尖点である．(詳細は[2], [3]を参照)．

定義2. C とその双対曲線 Γ とが同値のとき，C を自己双対的という．

もちろん，C が非特異のときは，自己双対的である必要十分条件は $n=2$ である．そこで C が特異点をもつとどうなるかというと，次が成立する．

定理1. C は特異点を1個もつと仮定する．このとき，C が自己双対的である必要十分条件は，C が $y=x^n$ (で定義される曲線)に同値になることである．

ところが特異点が2個以上のときは全く分からない．例えば良く知られた $y^e=x^n$，$(e, n)=1$，$2\leqq e\leqq n-2$，などの他に，例1の C_1 が自己双対的である．ごく特別な場合に限れば次が成立する．

命題3. C は有理で特異点は単純尖点のみと仮定する．このとき，C が自己双対的である必要十分条件は，C が $y=x^n$ に同値になることである．

なお，尖点だけもつ有理曲線については次が成立する．

命題 4. C は有理で特異点は尖点だけとして，その個数を m とすると，対数的 2-種類 $\bar{P}_2$ について $\bar{P}_2(\boldsymbol{P}^2-C)\geqq m-1$ がなりたつ．

そこで，m の値はいくつまで可能であるかという問題が起る．$m=3$ の例としては $xy=x^3+y^3$ の双対曲線があげられる．それは 4 次曲線で 3 個の尖点をもつのであった(証明は古典的 Plücker の公式から直ちにでる)．ところが，例 1 の Γ_2 のように $m=4$ の例も存在した．なお Zariski[4]でも尖点の個数を調べているが，C は有理と限らず，また他の種類の特異点も許している．

§2. 自己同型群について

以下 $n\geqq3$ と仮定する．

$G=\{T\in PGL_3\,|\,T(C)=C\}$ とおく．これは代数群である．C が非特異なら ${}^{\sharp}G<\infty$ は良く知られている．($W=3n(n-2)$ より変曲点の個数は $3n$ 以上ある．これらの中にどの 3 点も同一直線上にない 4 点を見つけられるから)．ところが，一般の C については次が成立する．

定理 2. 次の 3 つの条件は同値である．

(1)　${}^{\sharp}G=\infty$.

(2)　$G\cong G_m$.

(3)　C は $y^e=x^n$，$(e,n)=1$，と同値．

つまり，C が $y^e=x^n$ と同値でないなら ${}^{\sharp}G<\infty$ である．

§3. 証明その他

まず定理 1 を証明する．十分性は明らかだから必要性の証明をする．P を C の特異点とするとき，$e=e(P,C)$，$s=s_P$ とおくと，C の級は $2n-2+2g-(e-s)$ だから $e-s=n-2+2g$ を得る．$e=n+2g+(s-2)$ より，$s=1$，$e=n-1$，$g=0$ を得る．つまり C は有理で特異点は尖点でその重複度は $n-1$ である．また $W=3n-6-(2n-4)=n-2$ で，C は自己双対的なのであるから，C の変曲点は 1 個で孤立しており，その位数は $n-2$ である．そこで次の補題を用いればよい．

補題 5. C の特異点は尖点が 1 個のみで，その重複度が $n-1$ かつ変曲点が 1 個だけなら，C は $y=x^n$ と同値である．

証明．C の定義方程式を尖点を中心に表わして，

$$F(X_0,X_1,X_2)=X_0^{n-1}X_2\sum_{+i+j=n}c_{ij}X_1^iX_0^j$$

とする．射影変換 T で $X_0=0$ と $(0{:}0{:}1)$ を固定しかつ変曲点を $(1:0:0)$ に移すものがあるから，それによって定義式は次の形にできる．

$$f(x,y)=y+\sum_{\substack{i+j=n\\ i\geqq1}}c_{i,j}x^i,$$

$$x=X_1/X_0,\qquad y=X_2/X_0.$$

変曲点での接線は $y+c_{1,n-1}\,x=0$ であるから，変曲点の位数が $n-2$ より，$c_{n-1,1}=\cdots=c_{2,n-2}=0$ でなければならない．よって

$$f(x,y)=y+c_{n,0}x^n+c_{1,n-1}x,\qquad c_{n,0}\neq0,$$

となり，これは適当な射影変換で $y-x^n$ にできる．

なお，上と同様にして次も証明できる．

注意 6. 対数的小平次元 $\bar{\kappa}$ について，$\bar{\kappa}(\boldsymbol{P}^2-C)=\bar{\kappa}(\boldsymbol{P}^2-\Gamma)=-\infty$ である必要十分条件は C が $y=x^n$ と同値になることである．

また，補題に関する注意として，

注意 7. C の特異点が尖点 1 個のみで，その重複度が $n-1$ でも，もちろん自己双対的でない曲線が沢山存在する．例えば $y^4+x^5+x^2y^3=0$ は 3 個の変曲点と 3 本の複接線をもち，したがって双対曲線は 5 次で単純 2 重尖点と通常 2 重点を 3 個ずつもつことがわかる．

さて，次に命題 3 の証明をしよう．十分性は明らかだから必要性の証明をする．C の特異点を $\{P_1,\cdots,P_k\}$ $(k\geqq2)$ と仮定する．このとき級公式より

$$n=2n-2-\sum_{i=1}^{k}(e_i-1),\qquad e_i=e(P_i,C),$$
$$i=1,\cdots,k$$

ゆえに

$$\sum_{i=1}^{k}e_i=n-2+k \tag{1}$$

を得る．一方 C は有理だから

$$(n-1)(n-2)=\sum_{i=1}^{k}e_i(e_i-1)$$

したがって

$$\sum_{i=1}^{k}e_i^2=n^2-2n+k \tag{2}$$

となる．ところが(1), (2)の関係は同時には成立しえない．なぜなら(1)を満たす $e_1^2+\cdots+e_k^2$ の上限は $4(k-1)+(n-k)^2$ であり，(2)と比べて，

$$4(k-1)+(n-k)^2\geqq n^2-2n+k$$

よって $2n\leqq k+4$ を得る．これは矛盾である．つまり $k=1$ である．すると定理 1 より C は $y=x^n$ に同値である．

次に命題4の証明の概略を述べる．m 個の尖点を P_i, $i=1,\cdots,m$, としてその無限に近い特異点まで考えた重複度列を $(e_{i,1},\cdots,e_{i,k_i})$ として，P_i にて正規交叉になるまで2次変換したときの例外曲線を $E_{i,1},\cdots,E_{i,k_i},E_{i,k_i+1},\cdots,E_{i,l_i}$ とし，$'$ によって固有像を表わすとする．このとき，H を直線とすれば

$$nH\sim C=C'+\sum_{\substack{1\leqq i\leqq m\\1\leqq j\leqq k_i}}e_{ij}E_{ij}+\sum_{\substack{1\leqq i\leqq m\\k_i+1\leqq j\leqq l_i}}E_{ij}$$

（～は線形同値を表す）

がなりたつ．そこで

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_r=&(e_{r,1}-1)E_{r,1}+\cdots+(e_{r,k_r-1}-1)E_{r,k_r-1}\\&+(e_{r,k_r}-2)E_{r,k_r}+E_{r,k_r+1}+\cdots+E_{r,l_r-2}\\&+\sum_{\substack{i\neq r\\1\leqq j\leqq k_i}}(e_{ij}-1)E_{i,j},\quad r=1,\cdots,m,\end{aligned}$$

とおくと，$(n-1)(n-2)=\sum_{i,j}e_{ij}(e_{ij}-1)$, $l_i-k_i=e_{i,k_i}$ に注意して，[5]の補題より，$l((n-3)H-\mathcal{E}_r)\geqq 1$ を得る．そこで $(n-3)H\sim\mathcal{E}_r+\Delta_r$ となる正因子 Δ_r をとり，$\boldsymbol{P}^2$ 上に Δ_r を定義する多項式 F_r をとる．このとき，$\mathcal{E}_r$ の定め方に注意すると，$\{F_1,\cdots,F_m\}$ は $\boldsymbol{C}$ 上1次独立であることが証明される．そこで F_1F_r, $r=2,\cdots,m$, による因子，$2(n-3)H\sim\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_r+\Delta_1+\Delta_r$ を考える．

$$\bar{D}+\bar{K}\sim(n-3)H-\sum_{\substack{1\leqq i\leqq m\\1\leqq j\leqq k_i}}(e_{ij}-1)E_{ij}+\sum_{\substack{1\leqq i\leqq m\\1\leqq j\leqq l_i}}E'_{ij}$$

を用いて，各 F_1F_r により $2(\bar{D}+\bar{K})$ と線形同値な正因子を作れる（この方法は[5]に負う）．よって $\bar{P}_2(\boldsymbol{P}^2-C)\geqq m-1$ である．

さて，最後に定理2の証明に移ろう．(3)⇒(2), (2)⇒(1)は容易だから，(1)⇒(3)を証明する．紙数制限上やはり概略だけ述べることにする．C が $y^e=x^n$ と同値でないとする．C が非特異なら済んでいるし，$\bar{\kappa}(\boldsymbol{P}^2-C)=2$ のときも一般論から $^{\sharp}\mathrm{Aut}(\boldsymbol{P}^2-C)<\infty$ である．したがって残るのは次の2つの場合である（[5]を参照）．

(A)　C は有理で特異点は1個．

(B)　C は有理で特異点は尖点が2個．

さて，$T\in G$ は C の非特異モデル $\boldsymbol{P}^1$ 上の自己同型を引きおこし，この対応は単射である．よって C の特異点に対応する非特異モデル上の点と C の変曲点が合わせて3個以上存在すれば $^{\sharp}G<\infty$ であることに注意する．例えば(A)で尖点のときは，(i) $e\leqq n-2$ なら $W\geqq n-1$ であるから少なくとも2個の変曲点が存在する．(ii) $e=n-1$ のとき $W=n-2$ であり，もし変曲点が1個なら補題5より $y=x^n$ と同値になってしまう．したがって変曲点は2個以上存在するから，やはり $^{\sharp}G<\infty$ である．なお(B)を証明する際の注意として，2個の尖点を $(0:0:1)$, $(0:1:0)$ とでき，おのおのでの接線を $X_1=0$, $X_2=0$ とできることをあげておく．したがって2つの尖点の近傍が解析的に同型でなければ $T\in G$ は座標軸を固定するから対角形であり，今 $f=y^e+cx^n+c_{ij}x^iy^j+\cdots$, $c\neq 0$, $c_{ij}\neq 0$ の形であったとすれば，尖点という条件から，$(n-i)(e-j)\neq ij$ となる項が存在することがわかり，T の対角成分はある固定された数 m に対する1の m 乗根であり，$^{\sharp}G<\infty$ がわかる．残りのいくつかの場合も，変曲点公式を援用して証明できる．

文　献

[1]　飯高茂，Plücker の関係式，数学 **31**(1979), 366-369.

[2]　飯高茂，上野健爾，浪川幸彦，デカルトの精神と代数幾何，日本評論社，1980.

[3]　H. Yoshihara, On Plane Rational Curves, Proc. Japan Acad., **55** (1979), 152-155.

[4]　O. Zariski, On the non-existense of curves of order 8 with 16 cusps, Amer. J. Math., **53** (1931), 309-318.

[5]　I. Wakabayashi, On the logarithmic Kodaira dimension of the complement of a curve in $\boldsymbol{P}^2$, Proc. Japan Acad., **54** (1978), 157-162.

（1979年12月20日提出，1980年5月27日再提出）
（よしはら ひさお・新潟大学教養部）

位相的安定微分可能同変写像について

泉屋周一

微分可能同変写像のカテゴリーにおける C^∞-安定性定理は F. Ronga[5], V. Poénaru[4], E. Bierstone[1]等によって完成された．しかし，C^∞-安定同変写像の 'nice range' は群作用に依存して当然変わりうる．このような事態により位相的安定同変写像を考えることは興味深いと思われる．この小論では次の問題を考える；

問題. 位相的安定微分可能同変写像の集合は微分可能同変写像の空間（C^∞-位相を考える）の中で稠密か？

この問題にアプローチするための現在のところ考えうる道具は，同変横断性定理，同変第2イソトピー補題と G-Thom 層化集合であろう．同変横断性定理は M. Field[2]によって確立されているし，また同変第2イソトピー補題は不変管状近傍を使うことにより群作用がな