寄　稿

単尖点有理曲線

吉　原　久　夫

§1. 序論

既約平面曲線 C の不変量に補空間 $V=\boldsymbol{P}^2-C$ の対数的小平次元 $\bar{\kappa}=\bar{\kappa}(V)$ ([3, Ch, 11]を参照)がある．まず問題になるのは $\bar{\kappa}=-\infty$ の類を調べる事であろう．これについては次の事が成立する．

補題 1(若林[9])．$\bar{\kappa}=-\infty$ なら C は有理曲線で非特異か又は局所既約な特異点(尖点という)を1個もつ．

後に見るようにこの補題の逆の主張は成立しない．そこで $\bar{\kappa}=-\infty$ の曲線より少し一般的な上の補題の曲線，即ち一点 P があって $C-\{P\}\cong\boldsymbol{A}^1$ となる曲線を**単尖点有理曲線**(あるいは**有理単尖的曲線**)とよぶことにして，この曲線を詳しく調べよう．以下 C は単尖点有理曲線を表わすことにする．この小論の目的は C を様々な方向から考察した結果を紹介し，又未解決の問題を提出することである．なお定理4が新しい結果である．以下では非特異曲面間の双有理変換を f とする時因子 D の f による固有変換像，全変換像を各々，$f[D]$，$f\{D\}$ と表わすことにする．

§2. 不変量 v と例

C の次数を d として P に無限に近い特異点の重複度を順に並べた列(尖点の重複度列とよぶ)を $(e_1, \cdots, e_t)$ とする時

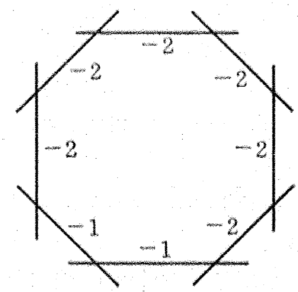
$$v=v(C)=d^2-\sum_{i=1}^{t} e_i^2-e_t+1$$

とおく．v の意味は次の通りである：P に無限に近い点中心の2次変換の合成 μ で $\mu^{-1}\{C\}$ (の被約部分)が単純正規交叉になって，かつ2次変換の回数が最小のもの(これを最短の変換といおう)をとる．この時 $\mu^{-1}[C]$ の自己交点数が $v-1$ である．この v の値が単尖点有理曲線を分類するのに有効である．まず例をあげる．

例 2. Δ を既約な平面曲線，Γ を直線又は既約2次曲線として，$\Delta\cap\Gamma$ は一点から成るものとする．$\boldsymbol{P}^2$ の双有理変換で $\boldsymbol{P}^2-\Delta$ の上に自己同型を引き起すものを φ とする．この時 $C=\varphi[\Gamma]$ は有理単尖的である([13]を参照)．

(甲)．Δ と Γ が各々直線 L, H の時．$C\setminus L\cong\boldsymbol{A}^1$ となる．

(乙)．([2]を参照) Δ を $xy=x^3+y^3$ (で定義される曲線)，Γ_0 又は Γ_1 を $x=0$ 又は $y=0$，φ を次数が8の双有理変換とする．即ち，φ の不定点中心の2次変換の合成 σ で $\varphi\sigma$ が正則になるような最短の変換 σ を取った時，$\sigma^{-1}\{\Delta\}$ の図は下記のようになっている：



ここに各成分はすべて非特異有理曲線で，その脇の数は自己交点数である．また $\sigma^{-1}[\Delta]$ の自己交点数は -1 である．そこで $\deg\varphi[\Gamma_0]<\deg\varphi[\Gamma_1]$ と取って，以降 $C_2=\varphi[\Gamma_0]$，$C_3=\varphi[\Gamma_1]$，$C_4=\varphi[C_2], \cdots, C_n=\varphi[C_{n-2}], \cdots$ と定める．これらはすべて有理単尖的であり，$\deg C_n=b_{2(n-1)}$ とおくと，b_i は i 番目のフィボナッチ数である．即ち，$b_0=b_1=1$，$b_n=b_{n-1}+b_{n-2}$．今 $b=b_{2(n-1)}$ とおき，C_n の尖点の重複度列を $(e_1, \cdots, e_t)$ とすると C_{n+2} の尖点の重複度列は $(3b-2e_1+e_2, \cdots, 3b-2e_1+e_2, 3b-2e_1, e_2, \cdots, e_t)$ であることがわかる．但し，ここで $3b-2e_1+e_2$ は6回連続している．従って特に各 $n\geqq3$ に対して $v(C_n)=0$ である．なお $C_{2n}(n\geqq2)$ は[13]の113頁の Problem 1 に肯定的解答を与えている．

(丙)．([11]を参照)(甲)において H として φ の不定点を通らない直線を取った時得られる $\varphi[H]$ を Δ とする．Δ の次数を n として，$\Delta\cap\Gamma$ は Δ の尖点ではないとする．更に $n=2$ の時は φ は L の上に自己同型を引き起しているものを取る．すると(乙)の場合と同様 φ の不定点解消をする2次変換の合成 σ と $\sigma^{-1}\{\Delta\cup\Gamma\}$ のグラフを考察することによって，$\deg\Gamma=1$ なら $v(C)=2-n$，$\deg\Gamma=2$ なら $v(C)=5-2n$ であることがわかる．

さて v については次の主張が成立する．

命題 3. 任意の整数 n に対して $v(C)=n$ となる単尖点有理曲線 C が存在する．

証明．$n\leqq1$ の時は例2(丙)による．例えば $\deg\Gamma=1$ の時は Δ として $y=x^n$，Γ として $y=0$ を考え，$\deg\Gamma=2$ の時は Δ として $y=x^2$，Γ として $y=x^2-ay^2(a\neq0)$

を考えればよい．$n\geqq 2$ に対しては C として $d=1$ 又は $d=4$ かつ尖点の重複度列が $(2,2,2)$ のもの[10]，および $y^{d-1}+x^d=0$ を考えれば十分である．∎

§3. 本論

単尖点有理曲線の特別な場合として Abhyankar–Moh によって詳しく研究された次の曲線がある：即ち適当な直線 L に対して $C\setminus L\cong \boldsymbol{A}^1$ となる曲線である．この曲線については例2(甲)の逆の主張が成立する．即ち $\boldsymbol{P}^2-L\cong\boldsymbol{A}^2$ の自己同型 φ で $\varphi[C]$ が直線となるものが存在する[1]．そこでこの曲線を Abhyankar–Moh 型の単尖点有理曲線(略して AM 型)とよぶことにする．[14]によれば C が AM 型になる必要十分条件は $v(C)\geqq 2$ である．

一般の単尖点有理曲線 C については次の関係が成立する．

定理 4. $v(C)\geqq 0$ である必要十分条件は $\bar{\kappa}(V)=-\infty$ である．

証明．(⇒)は[13]の89頁の Corollary による．(⇐) 宮西–杉江[6]によると $\boldsymbol{P}^2$ の双有理変換 f で次の性質(イ)又は(ロ)をもつものが存在する．ここに L, L_1, L_2 は直線を表わすものとする．

(イ)．f は同型 $\boldsymbol{P}^2-L_1 \simeq \boldsymbol{P}^2-L_2$ を引き起して $C\neq L_1$ なら $f[C]=L$.

(ロ)．2つの既約曲線 Δ_1,Δ_2 が存在して，f は同型 $\boldsymbol{P}^2-(\Delta_1\cup\Delta_2)\simeq\boldsymbol{P}^2-(L_1\cup L_2)$ を引き起して $C\neq\Delta_1$ かつ Δ_2 なら $f[C]=L$ であって，$L\cap L_1\cap L_2$ は一点である．これを Q とすると f^{-1} の不定点は Q である．

まず f が不定点をもたない時は C は直線だから $v=2$. よって以下 f は不定点をもつとする．さて(イ)の時，$C=L_1$ なら $v=2$ であるし，そうでないなら $C\setminus L_1\cong\boldsymbol{A}^1$ となるから既に述べたように $v\geqq2$ である(又は次の(ロ)と同様の方法で $v\geqq0$ を直接示すこともできる)．(ロ)の時，まず P に無限に近い点中心の2次変換の合成 μ で $\mu^{-1}\{C\}$ が単純正規交叉になる最短のものを取る．この時 $\mu^{-1}[C]$ の自己交点数は $v-1$ であった．さて f と f^{-1} を2次変換の合成で不定点解消をする．まず $\sigma: S\to\boldsymbol{P}^2$ は2次変換の合成で $f\sigma$ が正則になる最短のものとする．$f\sigma$ が正則双有理写像なので $\tau\tilde{f}$ と表わせる．ここに $\tau: T\to\boldsymbol{P}^2$ も同様に2次変換の合成であって，f^{-1} の不定点解消を与えるものである．また $\tilde{f}: S\to T$ は同型写像である．この時 $\tilde{f}$ によって互いに移り合う $\sigma^{-1}\{C\cup\Delta_1\cup\Delta_2\}$ と $\tau^{-1}\{L\cup L_1\cup L_2\}$ とを比較する．これらは単純正規交叉になっている．従って $\sigma=\mu$ か又は σ は μ に更に2次変換を続けて得られる．従って特に $\sigma^{-1}[C]=C'$ の自己交点数 C'^2 について $C'^2\leqq v-1$ がなりたつ．そこで $C=\Delta_1$ 又は Δ_2 なら σ を決める2次変換が最短という事から，$\tilde{f}(C')$ は τ によって最初に点に縮小されることがわかり，従って $C'^2=-1$ である．他方 $C\neq\Delta_1$ かつ Δ_2 の時は f^{-1} の不定点 Q 中心の2次変換 τ_1 で L, L_1, L_2 の各固有変換は交わりがなくなる．以降 τ を決めている2次変換の中心は $\tau_1^{-1}[L]$ の上にはない．また $\tilde{f}(C')=\tau^{-1}[L]$ であることにより $C'^2=0$ がわかる．よっていずれにしても $v\geqq0$ である．∎

ところで[6]によると $\bar{\kappa}=-\infty$ の時 C はある一次束の要素になり，それは[4]の用語で(0,1)型有理関数の courbe première である．そしてこのような関数はすべて決定されている([4]を参照)から，$v\geqq0$ あるいは $\bar{\kappa}=-\infty$ となる曲線はほぼわかったと言って良い．これまでの結果をまとめて諸関係を整理すると次の図式の主張が成立する．ここに筒状集合とは $\boldsymbol{A}^1\times\Gamma$ (Γ は非特異曲線)に同型な曲面の事である．

定理 5. C を3次以上の単尖点有理曲線として，$V=\boldsymbol{P}^2-C$ とおく時，次の図式の関係が成立する．

$$\begin{array}{l}
A: \text{AM 型} \rightleftarrows B: d=e_1+e_2 \\
\downarrow\uparrow \qquad\qquad\qquad (t=1 \text{ なら } e_2=1 \text{ とする}) \\
C: v(C)\geqq 2 \\
\downarrow \\
D: v(C)\geqq 0 \rightleftarrows E: {}^{\#}\mathrm{Aut}(V)=\infty \\
\downarrow\uparrow \\
F: \bar{\kappa}(V)=-\infty \rightleftarrows G: V \text{ は筒状開集合を含む}
\end{array}$$

証明．[14]によって A,B,C の同値なことがわかる．さらに[13]から D と E は同値，定理4から D と F が同値である．また[7, Theorem 3.13]から F と G の同値なことがわかる．∎

なおこの図に関していくつかの注意がある．

注意 6. $t\leqq4$ なら C は常に AM 型である[12].

注意 7. G_a を加法群とする時，$v\geqq0$ なら任意の $n>0$ に対して $\mathrm{Aut}(V)\supset(G_a)^n$ である．しかし $v<0$ なら $\mathrm{Aut}(V)$ は有限群である[13].

又 C に関してもいくつかの問題がある．

予想 8(角田[8])．単尖点有理曲線 C に対して，$d<3e_1$ である．

これについては[8]に $d\leqq3e_1+2$ が証明されており，[15]に $e_1=2$ の時 $d\leqq5$ が得られている．$v<0$ のクラス

の曲線は Aut(V) も小さくて不明の部分も多い．特に次の予想はいろいろな問題とも関連していて重要である．

予想 9. $v(C)<0$ なら $\bar{\kappa}(V)=1$ である．

例 2 にある曲線はこの予想の通りである．また $d\geqq 3e_1$ なら $\bar{\kappa}(V)=2$ である([10])から，予想 9 から予想 8 が従う．一方例 2 の C はすべて $\boldsymbol{P}^2$ の双有理変換による直線の固有像である．これは[5, Theorem 2.6(Coolidge)]によると双有理対の小平次元 $\kappa(C, \boldsymbol{P}^2)$ が $-\infty$ であることと同値である．しかも今のところそれ以外の例は知られていないようである．そこで，

問題 10. 単尖点有理曲線 C に対して $\kappa(C, \boldsymbol{P}^2)=-\infty$ であるか？

おわりに，レフェリーの方には用語，文献その他で有益な助言を頂きました．ここにお礼を申し上げます．

文　　献

[1] S. S. Abhyankar and T. T. Moh, Embeddings of the line in the plane, J. Reine Angew. Math., **276** (1975), 148–166.
[2] M. H. Gizatullin, 下の文献[6]のリヴュー, Math. Review 82K: 14013.
[3] S. Iitaka, Algebraic Geometry, an introduction to birational geometry of algebraic varieties, Graduate Texts in Math., **76**, Springer-Verlag, 1981.
[4] H. Kashiwara, Fonctions rationnelles de type (0, 1) sur le plan projectif complexe, Osaka J. Math., **24** (1987), 521–577.
[5] N. M. Kumar and M. P. Murthy, Curves with negative self intersection on rational surfaces, J. Math. Kyoto Univ., **22**-4 (1983), 767–777.
[6] M. Miyanishi and T. Sugie, On a projective plane curve whose complement has logarithmic Kodaira dimension $-\infty$, Osaka J. Math., **18** (1981), 1–11.
[7] M. Miyanishi, Non-complete Algebraic Surfaces, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, **857** (1981).
[8] S. Tsunoda, The complements of projective plane curves, 数理解析研究所講究録, **446** (1981), 48–55.
[9] I. Wakabayashi, On the logarithmic Kodaira dimension of the complement of a curve in $\boldsymbol{P}^2$, Proc. Japan Acad., **54**A (1987), 157–162.
[10] H. Yoshihara, On plane rational curves, Proc. Japan Acad., **55**A (1979), 152–155.
[11] ——, Rational curve with one cusp, Proc. Amer. Math. Soc. **89** (1983), 24–26.
[12] ——, On open algebraic surfaces $\boldsymbol{P}^2-C$, Math. Ann. **268** (1984), 43–57.
[13] ——, Projective plane curves and the automorphism groups of their complements, J. Math. Soc. Japan, **37** (1985), 87–113.
[14] ——, Rational curve with one cusp, II, Proc. Amer. Math. Soc., **100** (1987), 405–406.
[15] ——, A note on the existence of some curves, Algebraic Geometry and Commutative Algebra in Honor of Masayoshi NAGATA, (1987), 701–704.

追記　最近予想 8 が肯定的に解決された．詳細は次の論文を参照．

T. Matuoka and F. Sakai, The degree of rational unicuspidal curves, Preprint.

(1987 年 11 月 30 日提出，1988 年 3 月 28 日再提出)
(よしはら　ひさお・新潟大学教養部)

書　　評