Turaev : Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds,
Walter de Gruyter, 1994 年, 588 ページ.

高　田　敏　恵

本書は，結び目と３次元多様体の量子不変量の入門書であり，またその内容の豊富さによって，活用範囲の広い良書である．1980 年代半ばから，1990 年代初めにかけて，Jones 多項式が発見され，V.G. Drinfel'd と神保道夫氏によって量子群が発見され，更に，E. Witten によって，３次元トポロジーに大きく貢献することになった topological quantum field theory (TQFT) が提示された．本書の著者と N.Reshetekihin は，Witten の３次元多様体の不変量の構成プログラムを，Dehn surgery に注目して，はじめて数学的に実現した．更に，著者は，O.Y. Viro とともに３次元多様体の triangulation に注目し，6 j-symbol を利用した不変量を定義した．その二つの３次元多様体の構成を中心に，どのような代数的条件が不変量をもたらすのかなど，その構成の仕組み，TQFT の構成について詳しく書かれている．category の言葉が多く使われているが，いわゆる category 理論に通じている必要はなく，代数的条件だと考えてよい．その代数的条件を平面図で表すことによって，可換図式を含む代数的な議論が簡単な幾何学的議論に置き換えられ，条件の意味が理解しやすいものとなっている．

本は，大きく３つの部分に分かれ，更に 12 章に分かれている．読者は，章の順に読む必要はなく，各章がどのように繋がっているかが前書きに書かれているので，参考にするとよい．ここでは，各章の内容を順に紹介していくことにしよう．

第１章は，この本の基礎となるところである．まず，本の中で展開される理論の代数的基盤となる ribbon category が導入される．これは，いくつかの条件を加えた tensor category である．ribbon category のもつ重要な性質の一つは，morphism の trace と object の dimension を考えることができる点である．この trace が link や graph の不変量になる．

次に，ribbon category が与えられたとき，ribbon graph の集合に ribbon category の構造を入れる．ribbon graph は，graph の頂点を coupon とよばれる小さな長方形と考え，辺を長い band と考えることによって得られる曲面である．

ribbon category $\mathcal{V}$ が与えられているとする．このとき，coupon に $\mathcal{V}$ の morphism，band に object を対応させる．これは，coloring とよばれる．このような coloring をもつ ribbon graph の集合は，tensor category $\mathrm{Rib}_{\mathcal{V}}$ をなすことがわかる．更に，covariant functor $F:\mathrm{Rib}_{\mathcal{V}}\to\mathcal{V}$ が存在すること (Theorem 2.5) が示される．この functor が，不変量の構成において，基本的な役割を果たす．定理の重要な系として，F に $\mathcal{V}$ の trace を適用することにより，$\mathcal{V}$ の ground ring に値を持つ，ribbon graph の不変量を得ることができる．

3-manifold の不変量を定義するためには，ribbon category にいくつかの条件を加える必要がある．そこで，第２章で登場するのが，modular category である．付加される条件のうち重要なものの一つは，category を支配する有限個の simple objects の族の存在である．表現論において，simple object は，既約表現に対応し，「支配する」ということは，表現が，既約表現の直和としてかけることに対応する．

また，closed oriented 3-manifold M は，S^3 内の framed link に沿う surgery の結果として得ら

れることが知られている．この framed link (L とする) を，modular category の (上で述べた) simple objects の族で coloring したときに得られる不変量 $F(L,\lambda)$ (λ は coloring，即ち L の各成分への simple object の指定) をすべての colorings について和をとり，適当な正規化をすることによって，M の不変量 $\tau(M)$ が得られる．この定義は，colored ribbon graph を含む M の不変量に拡張される．

第3章では，modular functor と TQFT の定義が与えられる．n 次元 modular functor $\mathcal{T}$ は，closed n-manifold Σ に可換環 K 上の module $\mathcal{T}(\Sigma)$ を対応させ，n-manifold の homeomorphism に，対応する module の isomorphism を対応させる．空集合 ϕ も n-manifold とみなし，$\mathcal{T}(\phi)=K$ とする．n 次元 modular functor は，$(n+1)$ 次元 TQFT に拡張される．$(n+1)$ 次元 TQFT は，n 次元 modular functor $\mathcal{T}$ と $(n+1)$-cobordism の operator invariant τ によって形成される．$(n+1)$-cobordism M は，その境界が二つの closed n-manifolds $\partial_- M$ と $\partial_+ M$ の非交和であるような compact $(n+1)$-manifold である．τ は，cobordism M に homomorophism

$$\tau(M): \mathcal{T}(\partial_- M) \to \mathcal{T}(\partial_+ M)$$

を対応させる．特に，closed $(n+1)$-manifold M に対しては，$\tau(M)$ は，$\mathcal{T}(\phi)=K$ に K の元の積として作用する．これは，TQFT$(\mathcal{T},\tau)$ によってえられる M の quantum invariant とよばれる．これが，前章で定義された3次元多様体の不変量 $\tau(M)$ が得られるしくみである．

第4章では，modular category から3次元 TQFT が構成される．曲面は，標準的な handlebody の境界への全射同相写像が与えられているとき，parametrized という．まず，parametrized boundary をもつ3次元 cobordism に対する3次元 TQFT が定義される．また，modular category の Verlinde algebra が導入され，それを使うことによって，$\mathcal{T}(\Sigma)$ の次元が計算される．

第5章では，modular category から得られる2次元 modular functor (2-DMF) について詳しく調べる．2-DMF と rational 2-DMF が定義され，(rational) 2-DMF は，(modular) ribbon category を生じることが示される．更に，weak rational 2-DMF の概念が導入され，第4章で述べられた構成法によって，modular category は，weak rational 2-DMF を生じることが証明される．即ち，modular category と rational 2-DMF は本質的には同値であることがわかる．

第6章では，modular category $\mathcal{V}$ に付随した $6j$-symbol について議論する．$6j$-symbol は，multiplicity modules 上を動く4変数の tensor で，$\mathcal{V}$ の simple objects の集合を添え字づけたとき，6個の添え字によって決まる．$6j$-symbol の族は，multiplicity modules に関して，$\mathcal{V}$ のテンソル積の associativity を表現するものである．また，$6j$-symbol を ribbon graph によって表し，第1章で得られた ribbon graph の不変量を使って，normalized $6j$-symbol を定義する．この normalized $6j$-symbol について，6つの添え字が四面体の辺の上にあり，4つの multiplicity modules が四面体の面上にあると解釈することができる．この解釈が，$6j$-symbol の3次元 topology への応用の鍵となり，$6j$-symbol の基本的な性質の証明に繋がる．

第7章では，前章で定義された $6j$-symbol を利用して，triangulated 3-manifold の state sum invariant が構成される．構成法を簡単に述べる．M を，triangulated closed 3-manifold とする．modular category $(\mathcal{V},\{V_i\}_{i\in I})$ を fix しておく．M の triangulation の辺への I の元の指定を state という．そのような state φ を一つ固定したとき，triangulation の四面体 T に，φ によって T の6つの辺に指定された添え字からきまる normalized $6j$-symbol $|T|^{\varphi}$ を対応させる．すべての四面