特異多様体の特性類

諏　訪　立　雄

本稿では特異多様体の特性類について最近の発展，特に Milnor 類の理論とその周辺，を述べる．

複素多様体 M に対して，その Chern 類 $c^*(M)$ は M の正則接束 TM の Chern 類として M のコホモロジー $H^*(M)$ の中に定義され，複素多様体の理論において基本的役割を果たしてきた．特異点を持つ(コンパクトな)多様体 V の場合にこれを拡張するものとして幾つかの特性類が考えられている．これらのうちに，Mather 類 $c_*^M(V)$，Schwartz-MacPherson 類 $c_*(V)$ ([Sc1], [Ma])，Fulton-Johnson 類 $c_*^{FJ}(V)$ ([FJ], [F]) と呼ばれるものなどがある．これらはいずれも V のホモロジー $H_*(V)$ に定義され，V が非特異のときは $c^*(V)$ の Poincaré 双対，つまり V の基本類 $[V]$ とのキャップ積 $c^*(V)\frown[V]$，に一致する．これらの類はそれぞれの特徴，利点を備えている．例えば Mather 類は V の Nash 改変を用いて接束を“拡張”することにより定義され，幾何学的には理解しやすい．また，Schwartz-MacPherson 類は初め M.-H. Schwartz により，ラジアル接枠と呼ばれる特別な接枠(下記，定義 3.2, §4(A)参照)を構成するための障害として相対コホモロジーの中に定義された．後に R. MacPherson が Mather 類の理論に局所 Euler 障害の概念を付け加えてホモロジーの中に構成したもので，写像に対し自然に振舞う．これは A. Grothendieck および P. Deligne によってその存在が予想されていたものである．[BS]により，両者は Alexander 双対性を通して対応するので，今日では Schwartz-MacPherson 類と呼ばれている．特異多様体 V に対しても，V の基本類 $[V]$ とのキャップ積をとることにより Poincaré 準同型写像 $H^*(V)\to H_*(V)$ が定義できる[Br1]．V が局所完全交叉多様体のときは仮想接束 τ_V が考えられるが，このとき V の Fulton-Johnson 類は $c_*^{FJ}(V)=c^*(\tau_V)\frown[V]$ で与えられ，比較的容易に計算できる．

これらの類の差は特異点集合の重要な不変量と結びついてくる．例えば，V が孤立特異点のみを持つ局所完全交叉多様体のときは $c_*(V)$ と $c_*^{FJ}(V)$ の差は特異点における Milnor 数の和で表される(下記，定理 1.11)．Milnor 類の概念は，特異点集合が一般の場合にこれらの差を表すものとして導入されたもので，それぞれの方法は異なるが，超曲面の場合[A]，[PP2]で，局所完全交叉多様体の場合[BLSS1, 2]で，また写像に対して[BY]で研究されている．また[OY]，[Y3]ではその性質が調べられている．ここでは主として[BLSS1, 2]に従って Milnor 類について述べ，関連した話題として[Su4]で導入された特異多様体上の連接層の特性類について述べる．特に特異多様体 V の接層の(ホモロジー)Chern 類として V の新しい特性類が定義できる．なお Milnor 類に関する概観として[Br2]，[Y2]も参照されたい．また，本稿に関連した入門的な読み物として[Su5, 6]がある．

以下，§1 では孤立特異点のみを持つ局所完全交叉多様体の場合を概観する．Poincaré-Hopf の

定理を雛形とし，これの二つの異なる方向への拡張を考えることにより上記の結果を得る．§2ではこれらのことの基本思想となる特性類の局所化についてまとめる．特異点集合が一般の場合を扱うために，まず§3では古典的な障害理論による Chern 類の構成を複素多様体の接束の場合に復習する．n 次元複素多様体 M 上に(連続な) r-ベクトル場 $F^{(r)}$ (定義3.2)が与えられたとき，その特異点集合の各連結成分 S に対し，Poincaré-Hopf 類 $\mathrm{PH}(F^{(r)}, S)$ が $H_{2r-2}(S)$ の中に自然に定義され，M がコンパクトのとき，それらの和が M の $p=n-r+1$ 次の Chern 類 $c^p(M)$ の Poincaré 双対となる(定理3.5)．

§4ではまず M.-H. Schwartz に従って，m 次元複素多様体 W の中の n 次元コンパクト特異部分多様体 V に対し，“ラジアル r-接枠” を構成するための障害として V の $q=m-r+1$ 次 Schwartz 類を相対コホモロジー $H^{2q}(W, W\setminus V)$ に定める．これの Alexander 同型写像 $H^{2q}(W, W\setminus V)\xrightarrow{\sim} H_{2r-2}(V)$ による像 $c_{r-1}(V)$ は上記のように V の $r-1$ 次 MacPherson 類に一致する．以下 $\mathrm{Sing}(V)$ を V の特異点集合，$V_0=V\setminus\mathrm{Sing}(V)$ を非特異部分とする．一般に V_0 上に r-ベクトル場 $F^{(r)}$ が与えられたとき，その特異点集合と $\mathrm{Sing}(V)$ の和集合 Σ の各連結成分 S に対し，(局所的) Schwartz 類 $\mathrm{Sch}(F^{(r)}, S)$ が $H_{2r-2}(S)$ の中にラジアル接枠を経由して定義され，それらの和が $c_{r-1}(V)$ となる(定理4.5)．§5では V が W 上の正則ベクトル束 N の切断で定義された局所完全交叉多様体のときを考察する．このときは V の “仮想接束” $\tau_V=(TW-N)|_V$ が考えられるが，V_0 上の r-ベクトル場 $F^{(r)}$ と上のような集合 Σ の各連結成分 S に対し，τ_V の Chern 類を局所化することにより，仮想類 $\mathrm{Vir}(F^{(r)}, S)$ を $H_{2r-2}(S)$ の中に定義する．それらの和は $c^p(\tau_V)$ の Poincaré 準同型写像 $H^{2p}(V)\to H_{2r-2}(V)$ による像となる(定理5.1)．今の場合，これは $r-1$ 次の Fulton-Johnson 類 $c^{FJ}_{r-1}(V)$ に一致する．

以上の構成において，S が V_0 の中にある場合は $\mathrm{Sch}(F^{(r)}, S)=\mathrm{Vir}(F^{(r)}, S)=\mathrm{PH}(F^{(r)}, S)$ である．§6では S が $\mathrm{Sing}(V)$ の連結成分のとき，非負整数 r に対し，V の S における r 次 Milnor 類 $\mu_r(V, S)$ を $(r+1)$-接枠 $F^{(r+1)}$ の Schwartz 類と仮想類の差として定義する(定義6.1)．これは $H_{2r}(S)$ の類で，$F^{(r+1)}$ の取り方によらない．r が S の(複素)次元より大きいとき，$\mu_r(V, S)=0$ である．特に S が一点 p からなる場合は，$\mu_0(V, p)$ 以外は0で，これは孤立超曲面特異点のとき[Mi]で，孤立完全交叉特異点のとき[Ha]で導入されたいわゆる Milnor 数に一致する．また V が超曲面のとき，$\mu_0(V, S)$ は[P]で定義された一般化された Milnor 数に一致することが示される．任意の特異点集合を持つ局所完全交叉多様体 V に対し，$c_*(V)$ と $c^{FJ}_*(V)$ との差は Milnor 類の和で表される(定理6.2)．さらに S が $\mathrm{Sing}(V)$ の非特異成分のとき $\mu_*(V, S)$ の具体的公式が与えられる(定理6.3)．

複素多様体の Chern 類はその正則接束の Chern 類として定められた．特異多様体 V の場合にも例えば V 上の連接層を用いて何か意味のある特性類が定義できないだろうか，特に V の接層 Θ_V の特性類は何であろうかという疑問が生ずる．一般に，特異多様体 V 上の連接層 $\mathcal{F}$ に対し，(コホモロジー) Chern 指標 $\mathrm{ch}^*(\mathcal{F})$ または Chern 類 $c^*(\mathcal{F})$ は V が非特異であるか $\mathcal{F}$ が局所自由のとき古典的に定義されている．§7では局所完全交叉多様体 V 上の連接層 $\mathcal{F}$ に対してホモロジー Chern 指標 $\mathrm{ch}_*(\mathcal{F})$ または Chern 類 $c_*(\mathcal{F})$ を定義する(定義7.3)．もし $\mathcal{F}$ が局所自由な層ならば，類 $\mathrm{ch}_*(\mathcal{F})$ は $\mathrm{ch}^*(\mathcal{F})$ の Poincaré 準同型写像による像に一致する．このことは V の W への埋込みに対する Riemann-Roch の定理(定理7.2)による．V が孤立特異点を持つ場合，V の接層

Θ_V の Chern 指標および Chern 類を具体的に求めることができる(定理 7.5).

1 孤立特異点の場合

(A) Poincaré-Hopf の定理

周知のように, C^∞ 多様体 M 上の連続なベクトル場 v で M の点 p で孤立特異点(零点)を持つものに対し, Poincaré-Hopf の指数, ここでは PH(v, p) と書く, が定義される. M がコンパクトな向きづけられた(境界のない)多様体で, v が孤立特異点 $p_1, \ldots, p_r$ のみを持つとき, Poincaré-Hopf の定理は

$$\sum_{i=1}^{r} \mathrm{PH}(v, p_i) = \chi(M) \tag{1.1}$$

と表せる. ここで $\chi(M)$ は M の Euler 数である. この公式はいろいろな解釈ができるが, 次のようにも考えられる. M 上に特異点を持たないベクトル場を構成するための障害として M の(接束の) Euler 類 $e(M)$ が M の最高次コホモロジーにあるが, これを用いると(1.1)は

$$\sum_{i=1}^{r} \mathrm{PH}(v, p_i) = e(M) \frown [M], \tag{1.2}$$

$$e(M) \frown [M] = \chi(M) \tag{1.3}$$

と分けることができる. (1.2)は $e(M)$ をベクトル場 v でその特異点に“局所化”したものと考えられる. なお M が境界 ∂M を持つ場合でも, ベクトル場 v が ∂M 上至る所“外向き”ならば(1.1)はそのまま成り立つ.

特に M が複素多様体のときは, その正則接束 TM は実束としては M を C^∞ 多様体と思ったときの接束と同型で, $e(M)$ は M の最高次 Chern 類 $c^n(M)$, $n = \dim_{\mathbf{C}} M$, に一致する. ベクトル束 TM の適当な接続をとり, $c^n(M)$ をその曲率から定まる微分形式で表しておくと, M がコンパクトの時, (1.3)は

$$\chi(M) = \int_M c^n(M) \tag{1.4}$$

とも表せる. この公式は Gauss-Bonnet 型の定理と解釈できる.

以下複素多様体 M 上, 単にベクトル場というときは連続なものとし, 上記のように TM を M の実接束と同一視して, これらを TM の切断と考える.

次に, Poincaré-Hopf の指数を特異多様体 V(の非特異部分)上のベクトル場に対して拡張する. これにはいろいろな方法があるが, まず(1.1)がそのままの形で成り立つようにするには“Schwartz 指数”を考える. また V が複素多様体の中の局所完全交叉多様体のとき, その仮想接束の Chern 類を局所化したものとして“仮想指数”を考える. これを用いると(1.2)に対応する式が成り立つ. そうすると(1.3)(または(1.4))に対応する式は成り立たず, 差として特異点の Milnor 数が出てくる.

(B) Schwartz 指数

V を n 次元特異多様体(純 n 次元の被約な解析空間)とする. p を V の点とし, V は p で高々孤立特異点を持つとする. p の近傍は複素ユークリッド空間 $\mathbf{C}^m$ に埋込まれているとしてよい. まず, U を p の V 内の近傍とし, $U \backslash \{p\}$ 上の二つの非特異ベクトル場 v_1 および v_2 に対し, それらの(指数の)差 $d(v_1, v_2)$ を次のように定義する. p を中心とした半径 ε_i の十分小さい $\mathbf{C}^m$ の二つの

超球面 $S_{\varepsilon_i}, i=1, 2(\varepsilon_1<\varepsilon_2)$ をとり，$K_i=V\cap S_{\varepsilon_i}$ とする．各 K_i の(V 内の)近傍では v_i を考え，これらを K_1 と K_2 で囲まれた V 内の領域 C に拡張することを考えると，C の内部に有限個の特異点 $p_1, \ldots, p_r$ を持ったベクトル場 w に拡張できるので，

$$d(v_1, v_2)=\sum_{i=1}^{r}\mathrm{PH}(w, p_i)$$

とおく．次に，$\boldsymbol{C}^m$ の p の近傍上のベクトル場 $\tilde{v}_0$ で次を満たすものがあることを思い出しておく[Mi, §2]：(i) $\tilde{v}_0$ はp以外に特異点を持たず，p以外至る所外向き，(ii) $\tilde{v}_0$ は $V\backslash\{p\}$ に接する．

このようなベクトル場 $\tilde{v}_0$ はラジアルベクトル場と呼ばれるものの特別なものである(下記§4)．v を $U\backslash\{p\}$ 上の非特異ベクトル場とするとき，v の p における Schwartz 指数 $\mathrm{Sch}(v, p)$ を

$$\mathrm{Sch}(v, p)=1+d(v_0, v)$$

により定める．ここで v_0 は $\tilde{v}_0$ の $U\backslash\{p\}$ への制限である．特に v_0 に対しては $\mathrm{Sch}(v_0, p)=1$ で，これは一点 p の Euler 数と解釈できる(§4)．p が V の通常点の時は，$\mathrm{Sch}(v, p)=\mathrm{PH}(v, p)$ となる．また，二つの上のようなベクトル場 v_1 および v_2 に対して，

$$\mathrm{Sch}(v_2, p)=\mathrm{Sch}(v_1, p)+d(v_1, v_2) \tag{1.5}$$

が成り立つ．この指数に対しては，次の公式が証明できる：

定理 1.6[SS2]．V をコンパクト特異多様体で孤立特異点 $p_1, \ldots, p_s$ を持つとし，v を V の非特異な部分のベクトル場で，$p_{s+1}, \ldots, p_r$ に孤立特異点を持つとすると，

$$\sum_{i=1}^{r}\mathrm{Sch}(v, p_i)=\chi(V).$$

(C)　仮想指数

もう一つの指数は，“仮想指数”と呼ばれるものである．特異多様体 V の特異点では普通の接空間が考えられないので，接束もない．しかし例えば V が次のようなものの場合は，“仮想接束”が考えられ，それの特性類をベクトル場で局所化したものとして仮想指数が定義できる．

W を m 次元複素多様体とし，N を W 上の階数 k の正則ベクトル束とする．s を一般の点では N の零切断に横断的な正則切断とし $V=s^{-1}(0)$ とする．このとき，V は，純 $n=m-k$ 次元特異多様体で，局所的には次のように表すことができる．$(s_1, \ldots, s_k)$ を W の開集合 $\tilde{U}$ 上の N の枠とし，$s=\sum_{i=1}^{k} f_i s_i$ と書いておく，ここで f_i は $\tilde{U}$ 上の正則関数である．このとき，$V\cap\tilde{U}=\{p\in\tilde{U} | f_1(p)=\cdots=f_k(p)=0\}$ となり，V の特異点集合を $\mathrm{Sing}(V)$ とすると，$\mathrm{Sing}(V)\cap\tilde{U}=\{p\in\tilde{U} | df_1\wedge\ldots\wedge df_k(p)=0\}$ と表される．さらにこのとき，$f_1, \ldots, f_k$ は $\tilde{U}$ 上 V で零となる正則関数のなすイデアルを生成し，V は局所完全交叉多様体となる[T]．以下，上のような(特異)多様体を“正則切断で定義された局所完全交叉多様体”ということにする．一般に，V を W の任意の超曲面とすると，直線束 N とその切断 s が自然に定まり，V はこのような多様体となる．また，射影空間 $\boldsymbol{CP}^m$ の完全交叉多様体(k 個の斉次多項式 $P_i, i=1, \ldots, k$, で定義された $n=m-k$ 次元代数多様体)もこのような多様体の例である．このときは，各 P_i の次数を d_i とすると，ベクトル束 $H^{\otimes d_1}\oplus\cdots\oplus H^{\otimes d_k}$ を N としてとることができる．また，正則切断で定義された局所完全交叉多様体は[LS]の意味で“strong”な局所完全交叉多様体でもある．

V をベクトル束 N の切断で定義された局所完全交叉多様体とし，$V_0=V\backslash\mathrm{Sing}(V)$ とすると，制限 $N|_{V_0}$ は V_0 の W の中での法束 N_{V_0} に一致し，次の完全列がある：

$$0 \to TV_0 \to TW|_{V_0} \to N_{V_0} \to 0. \tag{1.7}$$

そこで $\tau_V = (TW-N)|_V$ とおき，これを V の仮想接束という．$TW-N$ の Chern 類は，$c^*(TW-N) = c^*(TW)/c^*(N)$ で与えられるので，この仮想接束の特性類は比較的計算しやすい．上記(B)におけるように，V は点 p で高々孤立特異点を持つとし，U を p の V 内での近傍とする．v を $U\backslash\{p\}$ 上の非特異ベクトル場とするとき，$c^n(\tau_V)$ を v で局所化したものとして仮想指数 $\mathrm{Vir}(v,p)$ が定義できる．これは下記§2(B)の(I)型と(II)型の局所化を組み合わせて微分幾何学的に定義する([LSS]，[SS2]も参照)．また，特異点が孤立していない場合でも同様である．この指数の幾何学的解釈については下記(D)に述べる．これから仮想指数が非負整数であることが分かる．なお，p が V の通常点の時は，$\mathrm{Vir}(v,p) = \mathrm{PH}(v,p)$ となる．また，二つの上のようなベクトル場 v_1 および v_2 に対して，Schwartz 指数のときの公式(1.5)と同様の式が成り立つ．仮想指数の構成法より次を得る：

定理 1.8. V が正則切断で定義されたコンパクトな局所完全交叉多様体で孤立特異点 $p_1, \ldots, p_s$ を持つとし，v を V の非特異な部分のベクトル場で，$p_{s+1}, \ldots, p_r$ に孤立特異点を持つとすると，

$$\sum_{i=1}^{r} \mathrm{Vir}(v, p_i) = \int_V c^n(\tau_V).$$

(D) Milnor 数

ここで完全交叉多様体の孤立特異点における Milnor 数を思い出しておく．$f=(f_1, \ldots, f_k)$：$(\boldsymbol{C}^{n+k}, 0) \to (\boldsymbol{C}^k, 0)$ を原点 0 の近傍で定義された正則写像とし，$V = f^{-1}(0)$ は完全交叉多様体で $p=0$ で高々孤立特異点を持つとする．$\boldsymbol{C}^k$ の一般の点 t に対しては $V_t = f^{-1}(t)$ は非特異であるが，さらに次のことが知られている($k=1$ のとき[Mi]，一般の k のとき[Ha]．[Lo]も参照)．B_ε を $\boldsymbol{C}^{n+k}$ の 0 を中心とした半径 ε の十分小さい超球とすると，$\boldsymbol{C}^k$ の 0 に十分近い一般の t に対して，$F = V_t \cap B_\varepsilon$ の位相型は一定で，しかも F はいくつかの S^n の bouquet と同じホモトピー型を持つ．F を Milnor ファイバーといい，ここに現れる S^n の数が V の p における Milnor 数 $\mu(V,p)$ である．なお p が V の非特異な点のときは $\mu(V,p)=0$ である．Milnor 数はまた f の Jacobian イデアルから代数的にも求められる(例えば[Lo])．

U を V 内の p の近傍とし v を $U\backslash\{p\}$ 上の非特異ベクトル場とするとき，その仮想指数 $\mathrm{Vir}(v,p)$ は次のように解釈できる．Milnor ファイバー F の境界の近くで F に接するベクトル場 v' で v に“近い”ものをとり，v' を F の内部に拡張することを考えると，有限個の特異点 $p_1, \ldots, p_r$ を持つベクトル場 w に拡張できる．そうすると，$\mathrm{Vir}(v,p)$ は

$$\mathrm{Vir}(v,p) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{PH}(w, p_i)$$

で与えられる([LSS]，[SS2]も参照)．右辺はまた GSV-指数と呼ばれるものである([GSV]，[SS1])．もし v' が F の境界で至る所外向きならば，右辺は F の Euler 数，つまり $1+(-1)^n \mu(V,p)$ となる．従って，上記(B)のベクトル場 v_0 に対しては，$\mathrm{Vir}(v_0,p) = 1+(-1)^n\mu(V,p)$ となり，Schwartz 指数も仮想指数も同じ差公式(1.5)を満たすので，$U\backslash\{p\}$ 上の任意の非特異ベクトル場 v に対して次が成り立つ：

$$\mathrm{Sch}(v,p) - \mathrm{Vir}(v,p) = (-1)^{n+1}\mu(V,p). \tag{1.9}$$

以上のことから，V 上のベクトル場を媒介として，次を得る：

定理 1.10[SS2]. V が正則切断で定義されたコンパクトな局所完全交叉多様体で，孤立特異点 $p_1,\dots,p_s$ を持つとき，

$$\chi(V)=\int_V c^n(\tau_V)+(-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{s}\mu(V,p_i).$$

上の式は Gauss-Bonnet の公式の一般化と考えられる((1.4)参照).

V の特異点解消，Schwartz-MacPherson 類の写像に対する自然性，および下記 §2(B)(II)の型の局所化を用いると V の Schwartz-MacPherson 類 $c_*(V)$ (§4)と $c^*(\tau_V)\frown[V]$ の差は V の特異点集合のホモロジー類から来ることが分かる．従って上の公式を用いると，$c_*(V)$ に対する次の公式を示すことができる：

定理 1.11[Su1]. V が正則切断で定義されたコンパクトな局所完全交叉多様体で，孤立特異点 $p_1,\dots,p_s$ を持つとき，

$$c_*(V)=c^*(\tau_V)\frown[V]+(-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{s}\mu(V,p_i)[p_i].$$

ここで，局所完全交叉多様体 V に対して，$c^*(\tau_V)\frown[V]$ は V の Fulton-Johnson 類 $c_*^{FJ}(V)$ と一致する．なお[OSY]において，上のような特異多様体 V の Mather 類 $c_*^M(V)$ と $c_*^{FJ}(V)$ の比較公式が与えられている．

2 特性類の局所化

前節で既に特性類の局所化ということに言及したが，ここでそのことについて少し整理しておく．特性類に関する文献として[BB]，[Hi]，[MS]，[St]などを挙げておく．

(A) Chern 類および関連した特性類

M を C^∞ 多様体とし，E を M 上の階数 e の複素ベクトル束とするとき，$i=1,\dots,e$ に対して，i 次 Chern 類 $c^i(E)$ が $H^{2i}(M)$ の中に定まる．位相幾何学的には，$c^i(E)$ は E に $e-i+1$ 個の一次独立な切断を構成するための最初の障害であり，$\boldsymbol{Z}$ 係数のコホモロジー $H^{2i}(M,\boldsymbol{Z})$ に定義される(§3)．微分幾何学的には，Chern-Weil 理論により，E の接続を用いて $H^{2i}(M,\boldsymbol{R})$ の中に定義できる．すなわち，E の接続 ∇ と i 次基本対称式 σ_i に対し，∇ の曲率から M 上の閉 $2i$-形式 $\sigma_i(\nabla)$ が定まる．$c^i(\nabla)=\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^i\sigma_i(\nabla)$ とおくと，それの de Rham コホモロジー $H^{2i}_{DR}(M)\simeq H^{2i}(M,\boldsymbol{R})$ での類$[c^i(\nabla)]$が $c^i(E)$ となる．E の(全)Chern 類 $c^*(E)$ は $c^*(E)=1+c^1(E)+\cdots+c^e(E)$ として与えられる．

E_j, $j=0,\dots,q$, を複素ベクトル束とするとき，仮想ベクトル束 $\xi=\sum_{j=0}^q(-1)^jE_j$ に対して Chern 類は次により定められる(ここで $\epsilon(j)=(-1)^j$ とする)：

$$c^*(\xi)=\prod_{j=0}^{q}c^*(E_j)^{\epsilon(j)}.$$

複素多様体上の連接層に対しても Chern 類が定義できる．M を複素多様体とし，$\mathcal{O}_M$ を M 上の正則関数の芽のなす層とする．U が M の相対コンパクトな開集合で $\mathcal{F}$ が連接 $\mathcal{O}_U$-加群のとき，$\mathcal{F}$ の実解析的複素ベクトル束 $E_j, j=0,\dots,q$, による分解(resolution)が存在する[AH]．このとき，$\mathcal{F}$ の Chern 類は $c^*(\mathcal{F})=c^*(\xi),\xi=\sum_{j=0}^q(-1)^jE_j$, により定められ，これは分解のとりかたによらない．

以上より α が複素ベクトル束，(複素)仮想ベクトル束あるいは連接層などのとき $c^*(\alpha)$ が定義できる．更に一般に，φ が対称多項式あるいは級数のとき適当な多項式あるいは級数 P に対して，$\varphi=P(\sigma_1,\sigma_2,\ldots)$ と表せるので，α の φ に関する特性類 $\varphi(\alpha)$ を，

$$\varphi(\alpha)=P(c^1(\alpha),c^2(\alpha),\ \ldots)$$

により定義することができる．このようなものの内には Chern 指数 $\mathrm{ch}(\alpha)$，Todd 類 $\mathrm{td}(\alpha)$ などもある(例えば[Hi, §10])．$\varphi(\alpha)$ はまた，α に関わる各ベクトル束 E_j の接続 ∇_j をとり，それらの族 $\nabla_.=(\nabla_j)_j$ から定まる“特性形式” $\varphi(\nabla_.)$ で代表することもできる．

(B)　局所化

次にこのような特性類を局所化することを考える．前のように M を C^∞ 多様体とし，Σ を M の閉集合とする．何らかの事情で $M\backslash\Sigma$ 上 $\varphi(\alpha)=0$ となり，従って $H^*(M,M\backslash\Sigma)$ の中の類 $\tilde{\varphi}(\alpha)$ で，標準的準同型写像 $H^*(M,M\backslash\Sigma)\to H^*(M)$ による像が $\varphi(\alpha)$ となるものが存在することがある．このとき $\tilde{\varphi}(\alpha)$ を $\varphi(\alpha)$ の Σ での局所化という．なお，以下我々の考える場合には，消滅 $\varphi(\alpha)=0$ はコサイクルの段階でおき，これを用いて“自然な”局所化 $\tilde{\varphi}(\alpha)$ を定義することができる．

さらに Σ がコンパクトで正則近傍(regular neighborhood)を持つとする．例えば M が Σ と両立する三角形分割を持てばよく，特に M が複素多様体で Σ が解析的集合ならばよい．このとき，Alexander 双対性

$$H^*(M,M\backslash\Sigma)\xrightarrow{\sim}H_*(\Sigma)$$

より $\tilde{\varphi}(\alpha)$ は $H_*(\Sigma)$ の類を定める．$(S_\lambda)_\lambda$ を Σ の連結成分とすると，$H_*(\Sigma)=\oplus_\lambda H_*(S_\lambda)$ より，各 λ に対し，$H_*(S_\lambda)$ の類が定まる．これを $\mathrm{Res}_\varphi(\alpha,S_\lambda)$ と書き，φ に関する S_λ における α の留類(residue)という．$\iota_\lambda: S_\lambda\hookrightarrow M$ を包含写像とすると，M がコンパクトのときは次の“留類公式”(residue formula)が成り立つことが分かる(§3(A)の可換図式参照)：

$$\sum_\lambda(\iota_\lambda)_*\mathrm{Res}_\varphi(\alpha,S_\lambda)=\varphi(\alpha)\frown[M]. \tag{2.1}$$

以上のことは M を特異多様体 V で置き換えた場合も必要なら適当な変更を加えて遂行することができる．

以下，いくつかの場合について消滅定理，およびそれによりひきおこされる特性類の局所化について考察する．下記(I)では障害理論，Chern-Weil 理論(を改変したもの)いずれも有効である．障害理論を用いた場合，局所化は $H^*(M,M\backslash\Sigma;\boldsymbol{Z})$ に定まる．(II)においては障害理論をそのまま用いるのは困難である．相対 K-理論によるか，接続を用いる．(III)では本質的に連続な不変量が出てくるので，位相幾何学的取り扱いは無理のようで，接続を用いる方法が有効である．

(I)枠が存在する場合．

E が $M\backslash\Sigma$ 上 r 個の一次独立な切断の組 $\boldsymbol{s}=(s_1,\ldots,s_r)$ (このようなものを r-枠という)を持つ場合，$i=e-r+1,\ldots,\ e$ に対して，$c^i(E|_{M\backslash\Sigma})=0$ となる．この場合，$c^i(E)$ の局所化 $\tilde{c}^i(E)$ を $c^i(E,\boldsymbol{s})$ と書く．障害理論による場合は $c^i(E,\boldsymbol{s})$ は構成法から自然に定まる．微分幾何による場合は $M\backslash\Sigma$ 上“$\boldsymbol{s}$-自明な”接続をとることにより $c^i(E,\boldsymbol{s})$ は自然に定まる．

実際には，r-枠が $M\backslash\Sigma$ 上存在するというのは強すぎる条件で，M に Σ と両立する三角形分割(あるいはそれに相対な胞体分割)を考え $M\backslash\Sigma$ の $2(e-r+1)$-骨格上に r-枠が与えられたとき $c^{e-r+1}(E)$ が局所化されることになる(§3)．

特に M が n 次元複素多様体で $E=TM$ のとき，M 上のベクトル場 v とその特異点集合 Σ の連結成分 S_λ に対し，留数 $\mathrm{Res}_{c^n}(TM,S_\lambda)\in H_0(S_\lambda,\boldsymbol{Z})=\boldsymbol{Z}$ が定まる．S_λ が一点 p からなる場合，これは $\mathrm{PH}(v,p)$ に他ならず，M がコンパクトのとき (2.1) は Poincaré-Hopf の定理となる．

(II) 列の完全性による場合．

C^∞ 多様体 M 上の複素ベクトル束の複体

$$0\to E_q\to\cdots\to E_0\to 0$$

が与えられ，$M\backslash\Sigma$ 上完全とする．仮想束 $\xi=\sum_{i=0}^q(-1)^iE_i$ を考えると，K-理論によると ξ は $K(M,M\backslash\Sigma)$ の元を定め，すべての $i=1,2,\ldots$ に対し，$c^i(\xi)$ の局所化 $c^i_\Sigma(\xi)$ が $H^{2i}(M,M\backslash\Sigma)$ に存在する ([BFM]，[I] も参照)．微分幾何による場合は，各 $j=0,\ldots,q$ に対し，E_j の $M\backslash\Sigma$ 上の接続 ∇_j を $\nabla_\bullet=(\nabla_j)_j$ が上の列と "両立するように" とると，ξ の特性形式 $c^i(\nabla_\bullet)$ が恒等的に零となる [BB，(4.22) Lemma] ことを用いる．このとき局所化はコサイクルの段階で自然に定まる．特に，M が複素多様体で $\mathcal{F}$ が連接 $\mathcal{O}_M$-加群のとき，Σ を $\mathcal{F}$ の台とすると局所 Chern 類 $c^i_\Sigma(\mathcal{F})$ が存在する．これは下記 §7 で用いられる．

(III)　Bott 型の消滅定理による場合．

複素多様体 M 上の特異葉層構造（の接層）は M の接層 $\Theta_M=\mathcal{O}_M(TM)$ の連接部分層 $\mathcal{F}$ で包合的 (involutive) なものとして定義される．また葉層構造 $\mathcal{F}$ の特異点集合 Σ は葉層構造の法層 $\Theta_M/\mathcal{F}$ が $\mathcal{O}_M$-自由でない点の集合として定義される．なお $\mathcal{F}$ が（局所的に）一つの正則ベクトル場 v で生成されている場合，Σ は v の零点集合となる．$M'=M\backslash\Sigma$ 上では TM の包合的部分束 F が存在して $\mathcal{F}|_{M'}=\mathcal{O}_{M'}(F)$ となる．F の階数を p とすると，F は M' 上 p 次元非特異葉層構造を定義する．今，F の "作用" するベクトル束 E があると，E には "F-接続" をとることができる．Bott 型の消滅定理は，φ が次数が $n-p$ より大きい斉次多項式で ∇ が E の F-接続ならば $\varphi(\nabla)=0$ となることをいう ([BB] 等，[Su2，II，Proposition 9.1] も参照)．

このことは仮想束についても同様にできる．これを用いて葉層構造の特異点集合に付随したさまざまな不変量を考察することができる．なお $\mathcal{F}$ が（局所的に）一つの正則ベクトル場 v で生成されている場合には v-自明な F-接続をとることができるので，これは正則ベクトル場の Poincaré-Hopf 指数および仮想指数を含む．これらについては，特異多様体上の特異葉層構造の場合も含めて [Su2] で統一的に説明されている．

以上いずれの場合でも微分幾何的方法による場合は $M\backslash\Sigma$ 上特別な接続 ∇ をとるわけであるがその後の処置には次のような方法がある：

(i)　∇ を Σ の近傍で改変して特性形式を M 上のコンパクト台を持つ形式にする方法 ([BB] 等)．

(ii)　∇ を M 上の特異接続と考え，特性形式をカレントとして M に拡張する方法 ([HL] 等)．

(iii)　∇ はそのままで Σ の近傍では別の接続を考える．ただし共通部分での差を合わせて考える．この場合，局所化は Čech-de Rham コサイクルで表される ([LS] 等)．

3　障害理論による Chern 類

以下 §4 まで，（コ）ホモロジー群は整係数のものとする．

(A)　Poincaré および Alexander 双対性

M を向き付け可能な n' 次元多様体とする．(K) を M の三角形分割とし，(D) をそれに双対な

胞体分割とする．(D)は(K)の重心細分(K')を用いて構成される．(K)または(D)チェインのなす群をそれぞれ$C_*^{(K)}(M)$または$C_*^{(D)}(M)$で表し，(K)または(D)コチェインのなす群をそれぞれ$C_{(K)}^*(M)$または$C_{(D)}^*(M)$で表す．(K)のi-単体σに対し，その双対である$(n'-i)$-胞体を$\check{\sigma}$と書く．

まずMがコンパクトのとき，準同型写像$P: C_{(D)}^{n'-i}(M)\to C_i^{(K)}(M)$を，$(n'-i)$-コチェイン$c$に対し

$$P(c)=\sum_{\sigma}\langle c,\ \check{\sigma}\rangle\sigma \tag{3.1}$$

により定義する．ここで和はMの全てのi-単体σについてとる．これはPoincaré同型写像

$$P_M: H^{n'-i}(M)\xrightarrow{\sim}H_i(M)$$

をひきおこす．

次に，LをMのコンパクトな(K)-部分複体とし，$C_{(D)}^*(M, M\backslash L)$で$C_{(D)}^*(M)$のコチェインで$L$と交わらない胞体($L$の単体に双対でない胞体)上0となるもののなす部分群とする(Mはコンパクトでなくてもよい)．準同型写像$A: C_{(D)}^{n'-i}(M, M\backslash L)\to C_i^{(K)}(L)$を(3.1)において和を$L$の$i$-単体についてのみとることにより定めると，これはAlexander同型写像

$$A_{M,L}: H^{n'-i}(M, M\backslash L)\xrightarrow{\sim}H_i(L)$$

をひきおこす．特にMがコンパクトのとき，次の図式は可換である：

$$\begin{array}{ccc} H^{n'-i}(M, M\backslash L) & \xrightarrow{j^*} & H^{n'-i}(M) \\ \simeq\big\downarrow A_{M,L} & & \simeq\big\downarrow P_M \\ H_i(L) & \xrightarrow{i_*} & H_i(M). \end{array}$$

(B)　複素多様体の Chern 類

以下，n次元複素多様体Mの正則接束TMのChern類について述べるが，一般の複素ベクトル束の場合も同様である．

定義 3.2.　Mの部分集合A上のr-ベクトル場とは，A上のr個の連続なベクトル場の順序づけられた組$F^{(r)}=\{v_1,\dots,v_r\}$をいう．$F^{(r)}$の特異点はベクトル達$(v_i)$が一次独立でない点をいう．非特異$r$-ベクトル場を$r$-接枠という．

$\boldsymbol{C}^n$のr-枠(r個の一次独立なベクトルの順序づけられた組)のなす複素Stiefel多様体を$W_r(\boldsymbol{C}^n)$と書く．これは$(2n-2r)$-連結で，$\pi_{2n-2r+1}(W_r(\boldsymbol{C}^n))\simeq\boldsymbol{Z}$である[St, §25.7]．$M$上の$r$-接枠の束を$W_r(TM)$と書く．これは接束$TM$に付随した束で，$M$の各点におけるファイバーは$W_r(\boldsymbol{C}^n)$に微分位相同型である．以下$p=n-r+1$とするとき，$p$次Chern類$c^p(M)$は$W_r(TM)$の切断を構成するための最初の障害として$H^{2p}(M)$に定められる．それを定義するために，前のように，$M$の三角形分割$(K)$およびそれに双対な胞体分割$(D)$をとり，$(D)$の次元の低い骨格から順に$r$-接枠を構成することを考える．まず，各0-胞体の上には$W_r(TM)$の切断$F^{(r)}$を構成することができる．$\check{\sigma}$をj-胞体で，束$W_r(TM)$が自明となる開部分集合$U\subset M$に含まれるものとする．$W_r(TM)$の切断$F^{(r)}$が$\check{\sigma}$の境界$\partial\check{\sigma}$上与えられると，それは次の写像を定める：

$$S^{j-1}\simeq\partial\check{\sigma}\xrightarrow{F^{(r)}}W_r(TM)|_U\simeq U\times W_r(\boldsymbol{C}^n)\to W_r(\boldsymbol{C}^n).$$

ここで最後の写像は第二成分への射影である．従って$F^{(r)}$は$\pi_{j-1}(W_r(\boldsymbol{C}^n))$の元を定める．$j\leq 2n-2r+1=2p-1$ならば，このホモトピー群は零なので，切断$F^{(r)}$は$\check{\sigma}$の中まで拡張できる．

この操作を続けると，$j=2p$ のとき，障害 $I(F^{(r)},\check{\sigma})\in\pi_{2p-1}(W_r(\mathbf{C}^n))\simeq\mathbf{Z}$ が生ずる．なお，$\hat{\sigma}=\sigma\cap\check{\sigma}$ を σ の重心とすると，$F^{(r)}$ は $\check{\sigma}$ 上の r-ベクトル場で $\hat{\sigma}$ のみに特異点を持つものに拡張できるので $I(F^{(r)},\check{\sigma})$ を $I(F^{(r)},\hat{\sigma})$ と書き，$F^{(r)}$ の $\hat{\sigma}$ における指数ということにする．以上より，$C^{2p}_{(D)}(M)$ のコチェイン γ を，各 $2p$-胞体 $\check{\sigma}$ に対し $\gamma(\check{\sigma})=I(F^{(r)},\hat{\sigma})$ とし，あとは線形に拡張することにより定められる．このコチェインは実際コサイクルで，$H^{2p}(M)$ の中で，M の p 次 Chern 類 $c^p(M)$ を代表する．これは定義に用いられるさまざまなものの選び方によらない．

M がコンパクトのとき，$c^p(M)$ の Poincaré 双対は $H_{2r-2}(M)$ の中でサイクル

$$\sum_{\sigma} I(F^{(r)},\hat{\sigma})\sigma \tag{3.3}$$

により代表される．ここで和は M のすべての $2(r-1)$-単体 σ についてとる．特に $r=1$ のとき，$F^{(1)}=\{v\}$ とすると，$I(F^{(1)},\hat{\sigma})$ はベクトル場 v の $\hat{\sigma}$ における Poincaré-Hopf の指数に他ならず，$c^n(M)$ の Poincaré 双対は v の Poincaré-Hopf の指数の和に等しいことが分かる．

(C) 接枠の Poincaré-Hopf 類

M' を M の (D)-部分複体とする．以下 (D) の j-骨格を D^j で表す．$M'\cap D^{2p}$ 上に r-接枠 $F^{(r)}$ が与えられたとすると，前と同様の議論により，$F^{(r)}$ を特異点なしに D^{2p-1} に拡張できる．これを D^{2p} に拡張するための障害としてコチェインを得るが，これは M' 上 0 となるコサイクルで，相対 Chern 類，

$$c^p(M,M';F^{(r)})\in H^{2p}(M,M')$$

を代表する．これの自然な写像 $j^*:H^{2p}(M,M')\to H^{2p}(M)$ による像は普通の Chern 類 $c^p(M)$ であるが，相対類としては M' 上の接枠 $F^{(r)}$ の選び方によるものである．

$M'\cap D^{2p}$ の上の二つの接枠 $F_1^{(r)}$ および $F_2^{(r)}$ に対し，対応する類の差は“差コサイクル”で与えられる．すなわち，直積 $M'\times I$ において，$F_1^{(r)}$ は $M'\times\{0\}$ 上与えられ，$F_2^{(r)}$ は $M'\times\{1\}$ 上与えられているとする．そうすると差コサイクル $d(F_1^{(r)},F_2^{(r)})$ は

$$H^{2p}(M'\times I,M'\times\{0\}\cup M'\times\{1\})\simeq H^{2q-1}(M')$$

の元で $M'\times I$ の境界上の接枠を拡張するための障害として与えられ，次が成り立つ [St, §33]：

$$c^p(M,M';F_2^{(r)})=c^p(M,M';F_1^{(r)})+\delta d(F_1^{(r)},F_2^{(r)}).$$

ここで $\delta:H^{2q-1}(M')\to H^{2q}(M,M')$ は連結写像である．

S を M のコンパクトな (K)-部分複体とし，S の単体に双対な胞体（S と交わる胞体）の閉包の和集合を $\mathcal{T}_S$ と書き，S の周りの胞体管という．$\mathcal{T}_S\backslash\partial\mathcal{T}_S$ は S の正則近傍 (regular neighborhood) である．U を S の近傍とし，$(U\backslash S)\cap D^{2p}$ 上に r-接枠 $F^{(r)}$ が与えられたとする．必要なら (K) の細分をとり，U は $\mathcal{T}_S$ を含むとしてよい．そうすると相対 Chern 類 $c^p(\mathcal{T}_S,\partial\mathcal{T}_S;F^{(r)})\in H^{2p}(\mathcal{T}_S,\partial\mathcal{T}_S)$ が決まる．これの Alexander 同型写像

$$A_{U,S}:H^{2p}(U,U\backslash S)\simeq H^{2p}(\mathcal{T}_S,\partial\mathcal{T}_S)\xrightarrow{\sim}H_{2r-2}(S)$$

による像を $\mathrm{PH}(F^{(r)},S)$ と書き，$F^{(r)}$ の S における Poincaré-Hopf 類という．これは具体的には (3.3) において和を S のすべての $2(r-1)$-単体 σ についてとって得られるサイクルで代表される．$F_1^{(r)}$ および $F_2^{(r)}$ を二つの上のような接枠とし，$A_{U,S}(\delta d(F_1^{(r)},F_2^{(r)}))$ を $d_S(F_1^{(r)},F_2^{(r)})$ と書くことにすると，次が成り立つ：

$$\mathrm{PH}(F_2^{(r)},S)=\mathrm{PH}(F_1^{(r)},S)+d_S(F_1^{(r)},F_2^{(r)}). \tag{3.4}$$

次に大域的状況を考える．Σ を M の (K)-部分複体とし，$(S_\lambda)_\lambda$ をその連結成分とする．今 $(M\backslash\Sigma)\cap D^{2p}$ 上に r-接枠 $F^{(r)}$ が与えられたとすると，各 λ に対して $\mathrm{PH}(F^{(r)}, S_\lambda)$ が定まり，その構成法から次を得る．

定理 3.5. 上の状況で，M がコンパクトのとき，

$$\sum_\lambda (i_\lambda)_* \mathrm{PH}(F^{(r)}, S_\lambda) = c^p(M) \frown [M].$$

4 Schwartz 類

(A) 特異多様体の Schwartz-MacPherson 類

W を m 次元複素多様体，V を W 内の純 n 次元コンパクト特異部分多様体とする．W の Whitney 階層化(stratification)$\{X\}$ で V と両立するものをとると，V の特異点集合 $\mathrm{Sing}(V)$ は階層達(strata)の和集合である．さらに (K) を W の階層化 $\{X\}$ と両立する三角形分割(の十分細かい重心細分)とし，(D) を W の胞体分割で (K) に双対なものとする．これは，(K) の重心細分 (K') をとることにより定義される．(K) には階層化 $\{X\}$ の向きと両立する向きを与える．これは (D) の向きを定める[Br1]．(D) の各胞体は各階層(stratum)に横断的なので，複素次元 ℓ の階層 X と(実)次元 $2q=2(m-r+1)$ の胞体 $\check{\sigma}$ に対し，$X\cap\check{\sigma}$ は次元 $2(\ell-r+1)$ の胞体である．前節(C)と同様に，V に含まれる単体に双対な胞体の閉包の和集合を $\tilde{\mathcal{T}}_V$ で表し，V の周りの胞体管という．

定義 4.1. A を W の部分空間とする．A 上の階層化されたベクトル場とは A 上のベクトル場で，各階層 X の各点で X に接するものをいう．A 上の階層化された r-ベクトル場とは階層化されたベクトル場からなる r-ベクトル場をいう．階層化された r-接枠は非特異な階層化された r-ベクトル場のことである．

V の Schwartz 類はラジアル接枠と呼ばれる V の近傍上の特別な階層化された接枠を構成するための最初の障害である．M.-H. Schwartz によって構成された $\tilde{\mathcal{T}}_V\cap D^{2q}$ 上のラジアル r-ベクトル場 $\tilde{F}_0^{(r)}=(\tilde{F}_0^{(r-1)}, \tilde{v}_0)$ の主な性質は次の通りである：

(i) $\tilde{F}_0^{(r-1)}$ は $\tilde{\mathcal{T}}_V\cap D^{2q}$ 上特異点を持たない．$\tilde{F}_0^{(r)}$ は $\tilde{\mathcal{T}}_V\cap D^{2q-1}$ 上特異点を持たず，各 $2q$-胞体 $\check{\sigma}$ に対し，σ の重心 $\hat{\sigma}$ に高々孤立特異点を持つ．これらは $\tilde{v}_0$ の特異点である．

(ii) $\tilde{F}_0^{(r)}$ が $2q$-胞体 $\check{\sigma}$ に特異点を持ち，$\check{\sigma}$ がいくつかの階層と交わるなら，特異点は最低次元の階層 X にある．X の(複素)次元を ℓ とするとき，$\ell>r-1$ ならば $I(\tilde{F}_0^{(r)}, \hat{\sigma})=I(\tilde{F}_0^{(r)}|_X, \hat{\sigma})$，$\ell=r-1$ ならば $I(\tilde{F}_0^{(r)}, \hat{\sigma})=1$ である．

(iii) $\tilde{v}_0$ は V の周りの胞体管および各階層 X の周りの胞体管から至る所外向きである．

上のようなラジアル r-ベクトル場 $\tilde{F}_0^{(r)}$ は V の外では特異点を持たず，これを $\tilde{\mathcal{T}}_V\cap D^{2q}$ に非特異に拡張するための障害として $2q$-コサイクル $\tilde{c}^q\in C^{2q}_{(D)}(\tilde{\mathcal{T}}_V, \partial\tilde{\mathcal{T}}_V)$ を定める．このコサイクルが代表する類 $\tilde{c}^q(V)\in H^{2q}(\tilde{\mathcal{T}}_V, \partial\tilde{\mathcal{T}}_V)\simeq H^{2q}(W, W\backslash V)$ は上の W の Whitney 階層化，三角形分割，あるいはラジアル r-接枠 $\tilde{F}_0^{(r)}$ のとりかたによらないことが示される[Sc1, 2]．$\tilde{c}^q(V)\in H^{2q}(W, W\backslash V)$ を V の q 次 Schwartz 類という．$\tilde{c}^q(V)$ の Alexander 同型写像 $A_{W,V}: H^{2q}(W, W\backslash V) \xrightarrow{\sim} H_{2r-2}(V)$ による像は，サイクル

$$\sum_\sigma I(\tilde{F}_0^{(r)}, \hat{\sigma})\,\sigma \qquad (4.2)$$

により代表される．ここで和は V のすべての $2(r-1)$-単体 σ についてとる．

手短にいうと，V の Schwartz 類は TW の Chern 類のラジアル接枠による V における局所化である．

一方，[Ma]で定義された V の MacPherson 類を $c_*(V)$ とし，その $r-1$ 次の成分を $c_{r-1}(V) \in H_{2r-2}(V)$ とすると，

$$A_{W,V}(\tilde{c}^q(V))=c_{r-1}(V)$$

が成り立つ[BS]ので，$c_{r-1}(V)$ を $r-1$ 次 Schwartz-MacPherson 類という．

特に $r=1$ のときは $\tilde{F}_0^{(1)}=\{\tilde{v}_0\}$ は一つのラジアルベクトル場 $\tilde{v}_0$ からなり，これは $\partial\tilde{\mathcal{T}}_V$ 上至る所外向きなので(4.2)は $\tilde{\mathcal{T}}_V$ の Euler 数を与える．さらに V は $\tilde{\mathcal{T}}_V$ の変位レトラクトなので，$c_0(V)=\chi(V)$ となる．

V が非特異のときは $F_0^{(r)}=\tilde{F}_0^{(r)}|_V$ は V 上の r-ベクトル場で，ラジアル接枠の性質(ii)より，(4.2)は $\sum_\sigma I(F_0^{(r)},\ \hat{\sigma})\sigma$ に一致するので，$c_{r-1}(V)=c^p(V)\frown[V]$ となる．

(B) Poincaré および Alexander 準同型写像

ここでは特異多様体の場合に Poincaré および Alexander 準同型写像を定義する[Br1]．W, V, (K), (K') および (D) を前の通りとする．

まず V がコンパクトのとき，準同型写像 $P: C_{(K')}^{2n-i}(V)\to C_i^{(K)}(V)$ を，$(2n-i)$-コチェイン c と $(2m-i)$-胞体 $\check{\sigma}$ に対し，

$$P(c)=\sum_\sigma\langle c,\ V\cap\check{\sigma}\rangle\sigma \tag{4.3}$$

により定義する．ここで和は V のすべての i-単体についてとる．これは準同型写像

$$P_V: H^{2n-i}(V)\to H_i(V)$$

をひきおこす．これを Poincaré 準同型写像という．V が非特異のときはこれは Poincaré 同型写像である．

次に S を V のコンパクトな (K)-部分複体とする(V はコンパクトでなくてよい)．準同型写像 $A: C_{(K')}^{2n-i}(V,\ V\backslash S)\to C_i^{(K)}(S)$ を(4.3)において和を S の i-単体についてのみとることにより定めると，これは準同型写像

$$A_{V,S}: H^{2n-i}(V,\ V\backslash S)\to H_i(S)$$

をひきおこす．これを Alexander 準同型写像という．V が非特異のときはこれは Alexander 同型写像である．特に V がコンパクトのときは§3(A)のと同様の可換図式を得る．

(C) 階層化された接枠の局所的 Schwartz 類

前の状況で，V の特異点集合を $\mathrm{Sing}(V)$ と書き，非特異部分を $V_0=V\backslash\mathrm{Sing}(V)$ とする．S を次のいずれかとする：

(i) Vのコンパクト連結部分(K)-複体で V_0 に含まれるもの，

(ii) $\mathrm{Sing}(V)$の連結成分

$\tilde{U}$を S の W の中での開近傍，$U=\tilde{U}\cap V$ とし，$U\backslash S$ は V_0 に含まれるとする．必要なら(K)の重心細分をとることにより，S の W の中での胞体管 $\tilde{\mathcal{T}}_S$ は $\tilde{U}$ に含まれると仮定してよい．一方，$\partial\tilde{\mathcal{T}}_S$ は V_0 に横断的である．$\mathcal{T}_S=\tilde{\mathcal{T}}_S\cap V$とおく．

まず S は V_0 の中にあると仮定する．$F^{(r)}$ を$(U\backslash S)\cap D^{2q}$ 上の r-接枠とすると，前に定めたよ

うに，$H_{2r-2}(S)$の類$\mathrm{PH}(F^{(r)},S)$があるので$\mathrm{Sch}(F^{(r)},S)=\mathrm{PH}(F^{(r)},S)$とする．

次にSは$\mathrm{Sing}(V)$の成分とする．$F_1^{(r)}$および$F_2^{(r)}$を$(U\backslash S)\cap D^{2q}$上の$r$-接枠とすると差$d(F_1^{(r)},F_2^{(r)})$は$H^{2p-1}(\partial\mathcal{T}_S)$に定義されている．$\delta: H^{2p-1}(\partial\mathcal{T}_S)\to H^{2p}(\mathcal{T}_S,\partial\mathcal{T}_S)$を連結準同型写像とし，$d_S(F_1^{(r)},F_2^{(r)})=A_{U,S}\delta d(F_1^{(r)},F_2^{(r)})\in H_{2r-2}(S)$とおく．ここで

$$A_{U,S}: H^{2p}(U,U\backslash S)\simeq H^{2p}(\mathcal{T}_S,\partial\mathcal{T}_S)\to H_{2r-2}(S)$$

は Alexander 準同型写像である．$\tilde{U}\cap D^{2q}$上のラジアルr-ベクトル場$\tilde{F}_0^{(r)}$でその特異点はすべてSに含まれるものが存在する．$\tilde{F}_0^{(r)}$の$U\backslash S$への制限を$F_0^{(r)}$と書く．

定義 4.4. $(U\backslash S)\cap D^{2q}$上の$r$-接枠$F^{(r)}$に対し，$F^{(r)}$の$S$における Schwartz 類$\mathrm{Sch}(F^{(r)},S)$を次で与えられる$H_{2r-2}(S)$の類として定義する：

$$\mathrm{Sch}(F^{(r)},S)=c_{r-1}(S)+d_S(F_0^{(r)},F^{(r)}).$$

Poincaré-Hopf 類と類似して，$(U\backslash S)\cap D^{2q}$上の二つの$r$-接枠$F_1^{(r)}$および$F_2^{(r)}$に対し，(3.4)と同様の式が成り立つ．$\Sigma$を$V_0$のコンパクト$(K)$-部分複体で，$\mathrm{Sing}(V)$の近傍と交わらないものとする．$(S_\lambda)$を$\mathrm{Sing}(V)\cup\Sigma$の連結成分とし，$i_\lambda$を包含写像$S_\lambda\hookrightarrow V$とすると次を得る．

定理 4.5[BLSS1, 2]. Vを複素多様体W内のコンパクトな特異部分多様体とし，ΣをV_0内の上のような部分集合とする．$(V_0\backslash\Sigma)\cap D^{2q}$上の$r$-接枠$F^{(r)}$に対し，

$$\sum_\lambda (i_\lambda)_*\mathrm{Sch}(F^{(r)},S_\lambda)=c_{r-1}(V).$$

なお Schwartz 類の微分幾何学的定義については[BLSS2]，[Le]を参照．

5 仮想類

§§5 および 6 では，(コ)ホモロジー群は実係数のものとする．

Vはm次元複素多様体Wの中のn次元コンパクト局所完全交叉多様体で，W上の階数$k=m-n$のベクトル束Nの正則切断sで定義されたものとする．§1(C)におけるように，$\tau_V=(TW-N)|_V$をVの仮想接束と呼ぶ．その Chern 類$c^*(\tau_V)$の Poincaré 準同型写像による像はVの Fulton-Johnson 類$c_*^{FJ}(V)$と一致する．与えられたr-接枠$F^{(r)}$による$c^p(\tau_V),p=n-r+1$，の局所化を$F^{(r)}$の仮想類という．もう少し詳しくいうと，Sを$\mathrm{Sing}(V)$の連結成分，またはV_0のコンパクト連結部分複体とし，$\tilde{U}$をSのW内の開近傍で$U\backslash S$がV_0の中にあるものとする，$U=\tilde{U}\cap V$．§4 と同様の分割(K),(D)をとり，$F^{(r)}$を$(U\backslash S)\cap D^{2q}$上の$r$-接枠とする．$\nabla$を$(U\backslash S)\cap D^{2q}$(の近傍)上の$TV_0$の$F^{(r)}$-自明な接続とし，$TW,N$の接続$\nabla_0,\nabla_0'$を$(\nabla_0',\nabla_0,\nabla)$が(1.7)と両立するように取る．これらの接続を用いてτ_Vの Chern 類を考えると，これはSに局所化され，自然に$H^{2q}(\tilde{U},\tilde{U}\backslash S)$の類$\gamma^q(F^{(r)},S)$を得る，$q=m-r+1$，(詳細は[BLSS2])．そこで$F^{(r)}$の$S$における仮想類$\mathrm{Vir}(F^{(r)},S)$を$\gamma^q(F^{(r)},S)$の Alexander 同型写像$A_{\tilde{U},S}: H^{2q}(\tilde{U},\tilde{U}\backslash S)\xrightarrow{\sim} H_{2r-2}(S)$による像として定義する．

Sが非特異部分にある場合は，$\mathrm{Vir}(F^{(r)},S)$は Poincaré-Hopf 類$\mathrm{PH}(F^{(r)},S)$と一致する．また，上のような二つのr-接枠に対し，(3.4)と同様の式が成り立つ．大域的な場合には，仮想類の構成から次を得る．

定理 5.1[BLSS1, 2]. Σを定理 4.5 のようなV_0の部分集合とする．上の仮定と記号により，$(V_0\backslash\Sigma)\cap D^{2q}$上の$r$-接枠$F^{(r)}$に対し，

$$\sum_{\lambda}(i_\lambda)_*\mathrm{Vir}(F^{(r)}, S_\lambda)=c^p(\tau_V)\frown[V].$$

6 Milnor 類

V を複素多様体 W の中に正則切断で定義された局所完全交叉多様体，S を $\mathrm{Sing}(V)$ の連結成分とするとき，V の S における Milnor 類の概念を導入する．$F^{(r+1)}$ を，$(U\backslash S)\cap D^{2(q-1)}$ 上の $(r+1)$-接枠とする，ここで U は S の近傍である．

定義 6.1．非負整数 r に対し，V の S における r 次 Milnor 類 $\mu_r(V,S)$ を次で定められる $H_{2r}(S)$ の類とする：

$$\mu_r(V,S)=(-1)^{n+1}(\mathrm{Sch}(F^{(r+1)}, S)-\mathrm{Vir}(F^{(r+1)}, S)).$$

接枠の Schwartz 類および仮想類が(3.4)と同様の式を満たすので，$\mu_r(V,S)$ は $(r+1)$-接枠 $F^{(r+1)}$ の取り方によらない．$\mu_*(V,S)=\sum_r\mu_r(V,S)$ を(全)Milnor 類という．定義より，r が S の(複素)次元より大きいときは $\mu_r(V,S)=0$ である．特に，S が一点 p からなる場合，$\mu_*(V,S)=\mu_0(V,S)$ で，これは(1.9)により普通の Milnor 数 $\mu(V,p)$ と一致する．また V が超曲面 $(k=1)$ のとき，$\mu_0(V,S)$ は[P]で導入された“一般化された Milnor 数”に一致する[BLSS2]．定理 4.5 および 5.1 より，接枠を媒介として次を得る：

定理 6.2[BLSS1, 2]．V を正則切断で定義されたコンパクト局所完全交叉多様体とすると，

$$c_*(V)=c^*(\tau_V)\frown[V]+(-1)^{n+1}\sum_S i_*\mu_*(V,S).$$

ここで和は $\mathrm{Sing}(V)$ の連結成分 S についてとり，$i: S\hookrightarrow V$ は包含写像である．

上の定理は V の特異点がすべて孤立している場合には定理 1.11 に帰着する．

以下特に，特異点集合の非特異成分における Milnor 類に対する公式を与える．S を $\mathrm{Sing}(V)$ の連結成分で非特異なものとし，その次元を ℓ とする．さらに，$\tilde{\rho}: \tilde{U}\to S$ を S の W における管状近傍とする．V は S に沿って Whitney の条件を満たすとする．従って，$\tilde{\rho}$ のファイバーはすべて V に横断的である．$U=\tilde{U}\cap V$, $U_0=U\backslash S$ とし，ρ, ρ_0 をそれぞれ $\tilde{\rho}$ の U, U_0 への制限とする．$T\tilde{\rho}, T\rho_0$ をそれぞれ，$\tilde{\rho}, \rho_0$ のファイバーに接するベクトルのなすベクトル束とすると，U_0 上次の完全列がある：

$$0\to T\rho_0\to T\tilde{\rho}|_{U_0}\to N|_{U_0}\to 0.$$

ここで U 上の仮想束 $(T\tilde{\rho}-N)|_U$ の Chern 類を考えると，$T\rho$ の階数が $n-\ell$ なので，すべての $i>0$ に対して $c^{n-\ell+i}((T\tilde{\rho}-N)|_U)$ の自然な局所化 $c_S^{n-\ell+i}((T\tilde{\rho}-N)|_U)$ が $H^{2(n-\ell+i)}(U, U\backslash S)$ に存在する．ρ のファイバーに沿っての積分(例えば[Su2, II, 5])

$$\rho_*: H^{2(n-\ell+i)}(U, U\backslash S)\to H^{2i}(S)$$

を考え，$H^{2i}(S)$ の類 α_i を次により定める：

$$\alpha_i=\rho_*c_S^{n-\ell+i}((T\tilde{\rho}-N)|_U).$$

p を S の点とし，H を W の中の $m-\ell$ 次元平面で p を通り S に横断的なものとする．$V\cap H$ は p で孤立特異点を持ち，Whitney の条件から Milnor 数 $\mu(V\cap H, p)$ は p によらない．なお S は非特異なので，その Schwartz-MacPherson 類 $c_*(S)$ は $c^*(S)\frown[S]$ に一致する．

定理 6.3[BLSS2]．上の状況で，Milnor 類は次で与えられる：

$$\mu_*(V,S)=((-1)^\ell\mu(V\cap H,p)\cdot(c^*(N)-c^k(N))$$
$$+(-1)^n\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{i}c^{i-j}(N)\,\alpha_j)\cdot c^*(N)^{-1}\frown c_*(S).$$

特に，$k=1$ ならば，

$$\mu_*(V,S)=(-1)^\ell\mu(V\cap H,p)\cdot c^*(N)^{-1}\frown c_*(S).$$

また，任意の k に対し，

$$\mu_\ell(V,S)=(-1)^\ell\mu(V\cap H,p)\cdot[S].$$

注意 6.4. V が超曲面の場合[PP2]において，$\mu_*(V)=(-1)^n(c_*(V)-c^*(\tau_V)\frown[V])$ で定められる V の Milnor 類が考察され，これに対する公式が V の階層化の各階層からの寄与の和の形で与えられている(この結果は Milnor 数 $\mu_0(V)$ に対しては[PP1]で示され，Milnor 類の場合には[Y1]で予想されたものである)．階層が $\mathrm{Sing}(V)$ の非特異成分の場合にはその寄与は上のものと一致する．

7 特異多様体上の連接層の特性類

(A) Thom 類

多様体上のベクトル束の Thom 類，あるいは多様体内の部分多様体の Thom 類の概念は特異部分多様体の場合，次のように拡張される[Br1]．

W を $m=n+k$ 次元の複素多様体とし，V を W の n 次元特異部分多様体とする．i で埋込み $V\hookrightarrow W$ を表す．(K), (K') および (D) を § 4 の通りとする．準同型写像 $T: C^j_{(K')}(V)\to C^{j+2k}_{(D)}(W,W\setminus V)$ を，j-コチェイン c と $(j+2k)$-胞体 $\check{\sigma}$ に対し，$\langle T(c),\check{\sigma}\rangle=\langle c, V\cap\check{\sigma}\rangle$ により定義すると，これは準同型写像

$$T_{V,W}: H^j(V)\to H^{j+2k}(W,W\setminus V)$$

をひきおこす．これを Thom 準同型写像という．V が非特異のときはこれは Thom 同型写像である．V がコンパクトのときは，$A_{W,V}$ を Alexander 同型写像，P_V を Poincaré 準同型写像(§ 4 (B))とすると，構成法より，$A_{W,V}\circ T_{V,W}=P_V$ となる．$H^0(V)$ の類[1]に対して，$H^{2k}(W,W\setminus V)$ の類 $T_{V,W}([1])$ を Ψ_V と書き V の W の中での Thom 類と呼ぶ．

$\tilde{U}$ を V の W の中での正則近傍とし $\rho:\tilde{U}\to V$ を連続なレトラクションとする．切除により，$H^*(W,W\setminus V)\simeq H^*(\tilde{U},\tilde{U}\setminus V)$ となる．Thom 準同型写像 $T_{V,W}$ は，$H^j(V)$ の類 α に対し $T_{V,W}(\alpha)=\rho^*(\alpha)\smile\Psi_V$ で与えられる．Gysin 準同型写像 i_* を次の合成で定義する：

$$H^j(V)\xrightarrow{T_{V,W}}H^{j+2k}(W,W\setminus V)\xrightarrow{j^*}H^{j+2k}(W).$$

以下次の二つの場合を考える：

(i) V は非特異，

(ii) V は正則切断によって定められる局所完全交叉多様体．

まず(i)の場合，$p:N_V\to V$ を V の W 内の法束とすると，(W,V) と (N_V,V) は V の近傍で C^∞ 微分同相で，自然な同型 $H^*(W,W\setminus V)\simeq H^*(N_V,N_V\setminus V)$ がある．この同型で V の Thom 類 Ψ_V は束 N_V の Thom 類 Ψ_{N_V} に対応する．s_Δ を N_V 上のベクトル束 p^*N_V の対角切断とすると，その零点集合は V で，次の等式がある(例えば[Su2, Ch. III, Theorem 4.4])：

$$\Psi_{N_V}=c^k(p^*N_V,s_\Delta).$$

次に，(ii)の場合，V を W 上の正則ベクトル束 N の切断 s で定義された局所完全交叉多様体とする．このとき $c^k(N)$ の s に関する局所化 $c^k(N,s)\in H^{2k}(W, W\setminus V)$ は Alexander 双対性 $H^{2k}(W, W\setminus V)\xrightarrow{\sim}H_{2n}(V)$ の下で $[V]$ に対応する(例えば[Su3]．代数的多様体の場合は[F, §14.1]を参照)．従って，この場合 Thom 類は次で与えられる：

$$\Psi_V = c^k(N, s). \tag{7.1}$$

なお，(i)の場合にも，(N_V, V) を (W, V) と同一視し，p^*N_V を N，s_Δ を s と書くと，V の Thom 類はやはり(7.1)で与えられる．

(B)　特異多様体の埋込みに対する Riemann-Roch の定理

V を複素多様体 W の中の特異部分多様体，$\mathcal{I}_V$ を $\mathcal{O}_W$ の中の V 上零となる関数のなすイデアルの層，$\mathcal{O}_V=\mathcal{O}_W/\mathcal{I}_V$ を V 上の正則関数の芽のなす層とする．$\mathcal{F}$ を連接 $\mathcal{O}_V$-加群とすると，直像 $i_!\mathcal{F}$ は連接 $\mathcal{O}_W$-加群で，これは単に $\mathcal{F}$ を $W\setminus V$ では零として拡張したものである．従って局所 Chern 指標 $\mathrm{ch}_V^*(i_!\mathcal{F})$ が $H^*(W, W\setminus V; \boldsymbol{Q})$ の中に定まる(§2(B))．以下 V を上記(A)の(i)，(ii)のようなものとする．次の定理は[Su4]において，V の Thom 類の上記表示，および N の最高次 Chern 類と Todd 類および N の双対束の外積の Chern 指標に対する特性形式の間の関係式[HL, III, Corollary 5.4]を用いて対応する特性類を Čech-de Rham コサイクルで表すことにより証明されている．関連文献については[Su4, Remarks 3.6]参照．

定理 7.2.　V を W の中のコンパクトな特異部分多様体とし，$\mathcal{F}$ を連接 $\mathcal{O}_V$-加群とする．次のいずれかの場合，下記の公式を得る：

(i)　V は非特異，

(ii)　V は正則切断によって定められる局所完全交叉多様体で $\mathcal{F}$ は局所自由．

$$\mathrm{ch}_V^*(i_!\mathcal{F}) = T_{V,W}(\mathrm{ch}^*(\mathcal{F})\smile \mathrm{td}(N_V)^{-1}),$$
$$\mathrm{ch}^*(i_!\mathcal{F}) = i_*(\mathrm{ch}^*(\mathcal{F})\smile \mathrm{td}(N_V)^{-1}).$$

上の第一式は $H^*(W, W\setminus V; \boldsymbol{Q})$ で，第二式は $H^*(W; \boldsymbol{Q})$ で成り立つ．

(C)　ホモロジー Chern 指標と Chern 類

V を複素多様体 W の中の余次元 k の局所完全交叉多様体であるとする．従って V のイデアル層 $\mathcal{I}_V$ は局所的に k 個の関数で生成され，法層 $\mathcal{N}_V=\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{I}_V/\mathcal{I}_V^2, \mathcal{O}_V)$ は局所自由である．それに付随したベクトル束を N_V と書き，$\tau_V=TW|_V-N_V$ を V の仮想接束とする．

定義 7.3.　連接 $\mathcal{O}_V$-加群 $\mathcal{F}$ に対し，ホモロジー Chern 指標 $\mathrm{ch}_*(\mathcal{F})$ を次により定める：

$$\mathrm{ch}_*(\mathcal{F}) = \mathrm{td}(N_V)\frown A_{W,V}(\mathrm{ch}_V^*(i_!\mathcal{F})).$$

この Chern 指標はいろいろな良い性質を持つ[Su4]．特に定理 7.2 を用いると次を得る：

命題 7.4.　V は非特異であるか V は切断で定義され $\mathcal{F}$ は局所自由とする．このとき

$$\mathrm{ch}_*(\mathcal{F}) = \mathrm{ch}^*(\mathcal{F})\frown[V].$$

特に構造層 $\mathcal{O}_V$ に対しては，$\mathrm{ch}_*(\mathcal{O}_V)=[V]$．

なお $\mathrm{ch}_*(\mathcal{F})$ が Poincaré 準同型写像 $H^*(V)\to H_*(V)$ の像に入っている場合，ホモロジー Chern 類 $c_*(\mathcal{F})$ を Newton の公式(例えば[Hi, p.92])を用いて定義することができる．

(D)　接層の特性類

V を複素多様体 W 上のベクトル束 N の切断で定義された局所完全交叉多様体とする．Ω_W および Ω_V をそれぞれ W および V 上の正則 1-形式の層とすると，次の完全列がある：

$$0 \to \mathcal{I}_V/\mathcal{I}^2_V \to \Omega_W \otimes_{\mathcal{O}_W} \mathcal{O}_V \to \Omega_V \to 0.$$

$\Theta_W = \mathcal{O}_W(TW)$ を W の接層とし，V の接層 Θ_V を $\Theta_V = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_V}(\Omega_V, \mathcal{O}_V)$ により定める．これは埋込み $V \hookrightarrow W$ によらない．上の完全列から次の完全列を得る：

$$0 \to \Theta_V \to \Theta_W \otimes_{\mathcal{O}_W} \mathcal{O}_V \to \mathcal{N}_V \to \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_V}(\Omega_V, \mathcal{O}_V) \to 0.$$

$\mathcal{E} = \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_V}(\Omega_V, \mathcal{O}_V)$ とおくと，命題7.4から，

$$\mathrm{ch}_*(\Theta_V) = \mathrm{ch}^*(\tau_V) \frown [V] + \mathrm{ch}_*(\mathcal{E})$$

を得る．p が V の孤立特異点ならば，定理7.2を埋込み $p \hookrightarrow W$ に対して用いると，$\mathrm{ch}_*(\mathcal{E}) = \tau(V,p)[p]$ となる，ここで $\tau(V,p) = \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_V}(\Omega_V, \mathcal{O}_V)_p$ は V の p における Tjurina 数と呼ばれるもので，(V,p) の無限小変形の空間の次元である．以上より次を得る：

定理7.5[Su4]．V を切断で定義された局所完全交叉多様体とし，孤立特異点 $p_1, \ldots, p_s$ のみを持つとする．V の接層 Θ_V に対し，

$$\mathrm{ch}_*(\Theta_V) = \mathrm{ch}^*(\tau_V) \frown [V] + \sum_{i=1}^{s} \tau(V, p_i)[p_i],$$

$$c_*(\Theta_V) = c^*(\tau_V) \frown [V] + (-1)^{n+1}(n-1)! \sum_{i=1}^{s} \tau(V, p_i)[p_i].$$

上の定理と定理1.11を比較することにより，特別な場合には，$c_*(\Theta_V)$ が Schwartz-MacPherson 類 $c_*(V)$ に一致することが分かる[Su4, Corollary 5.2]．

文　献

[A] P. Aluffi, Chern classes for singular hypersurfaces, Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), 3989-4026.

[AH] M. Atiyah and F. Hirzebruch, Analytic cycles on complex manifolds, Topology **1** (1961), 25-45.

[BB] P. Baum and R. Bott, Singularities of holomorphic foliations, J. Differential Geom. **7** (1972), 279-342.

[BFM] P. Baum, W. Fulton and R. MacPherson, Riemann-Roch for singular varieties, Publ. Math. IHES **45** (1975), 101-145.

[Br1] J.-P. Brasselet, Définition combinatoire des homomorphismes de Poincaré, Alexander et Thom pour une pseudo-variété, Caractéristique d'Euler-Poincaré, Astérisque 82-83, Société Mathématique de France, 1981, pp.71-91.

[Br2] J.-P. Brasselet, From Chern classes to Milnor classes, to appear in Singularities, Sapporo 1998, Advanced Studies in Pure Mathematics, Math. Soc. Japan.

[BLSS1] J.-P. Brasselet, D. Lehmann, J. Seade and T. Suwa, Milnor numbers and classes of local complete intersections, Proc. of Japan Acad. **75** (1999), 179-183.

[BLSS2] J.-P. Brasselet, D. Lehmann, J. Seade and T. Suwa, Milnor classes of local complete intersections, preprint.

[BS] J.-P. Brasselet et M.-H. Schwartz, Sur les classes de Chern d'un ensemble analytique complexe, Caractéristique d'Euler-Poincaré, Astérisque 82-83, Société Mathématique de France, 1981, pp.93-147.

[BY] J.-P. Brasselet and S. Yokura, Remarks on bivariant constructible functions, to appear in Singularities, Sapporo 1998, Advanced Studies in Pure Mathematics, Math. Soc. Japan.

[F] W. Fulton, Intersection Theory, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984.

[FJ] W. Fulton and K. Johnson, Canonical classes on singular varieties, Manuscripta Math. **32** (1980), 381-389.

[GSV] X. Gómez-Mont, J. Seade and A. Verjovsky, The index of a holomorphic flow with an isolated singularity, Math. Ann. **291** (1991), 737-751.

[Ha] H. Hamm, Lokale topologische Eigenschaften komplexer Räume, Math. Ann. **191** (1971), 235-252.

[HL] R. Harvey and H. B. Lawson, A theory of characteristic currents associated with a singular connection, Astérisque 213, Société Mathématique de France, 1993.

[Hi] F. Hirzebruch, Topological Methods in Algebraic Geometry, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1966.

[I] B. Iversen, Local Chern classes, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **9** (1976), 155-169.

[Le] D. Lehmann, A Chern-Weil theory for Milnor classes, to appear in Singularities, Sapporo 1998, Advanced Studies in Pure Mathematics, Math. Soc. Japan.

[LSS] D. Lehmann, M. Soares and T. Suwa, On the index of a holomorphic vector field tangent to a singular variety, Bol. Soc. Bras. Mat. **26** (1995), 183-199.

[LS] D. Lehmann and T. Suwa, Residues of holomorphic vector fields relative to singular invariant subvarieties, J. Differential Geom. **42** (1995), 165-192.

[Lo] E. Looijenga, Isolated Singular Points on Complete Intersections, London Mathematical Society Lecture Note Series 77, Cambridge Univ. Press, Cambridge, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney, 1984.

[Ma] R. MacPherson, Chern classes for singular algebraic varieties, Ann. of Math. **100** (1974), 423-432.

[Mi] J. Milnor, Singular Points of Complex Hypersurfaces, Annales of Mathematics Studies 61, Princeton University Press, Princeton, 1968.

[MS] J. Milnor and J. Stasheff, Characteristic Classes, Annales of Mathematics Studies 76, Princeton University Press, Princeton, 1974.

[OSY] T. Ohmoto, T. Suwa and S. Yokura, A remark on the Chern classes of local complete intersections, Proc. of Japan Acad. **73** (1997), 93-95.

[OY] T. Ohmoto and S. Yokura, Product formulas for the Milnor class, to appear in Bull. Polish Acad. Sci. **48** (2000).

[P] A. Parusiński, A generalization of the Milnor number, Math. Ann. **281** (1988), 247-254.

[PP1] A. Parusiński and P. Pragacz, A formula for the Euler characteristic of singular hypersurfaces, J. Algebraic Geom. **4** (1995), 337-351.

[PP2] A. Parusiński and P. Pragacz, Characteristic classes of hypersurfaces and characteristic cycles, preprint.

[Sc1] M.-H. Schwartz, Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe, C. R. Acad. Sci. Paris **260** (1965), 3262-3264, 3535-3537.

[Sc2] M.-H. Schwartz, Champs radiaux sur une stratification analytique complexe, Travaux en cours **39**, Hermann, Paris, 1991.

[SS1] J. Seade and T. Suwa, A residue formula for the index of a holomorphic flow, Math. Ann. **304** (1996), 621-634.

[SS2] J. Seade and T. Suwa, An adjunction formula for local complete intersections, International J. Math. **9** (1998), 759-768.

[Su1] T. Suwa, Classes de Chern des intersections complètes locales, C. R. Acad. Sci. Paris **324** (1996), 67-70.

[Su2] T. Suwa, Indices of Vector Fields and Residues of Singular Holomorphic Foliations, Actualités Mathématiques, Hermann, Paris, 1998.

[Su3] T. Suwa, Dual class of a subvariety, Tokyo J. Math. **23** (2000), 51-68.

[Su4] T. Suwa, Characteristic classes of coherent sheaves on singular varieties, to appear in Singularities, Sapporo 1998, Advanced Studies in Pure Mathematics, Math. Soc. Japan.

[Su5] 諏訪立雄, 特性類の局所化とは？, 数学のたのしみ **6**, 日本評論社, 1998, 101-111.

[Su6] 諏訪立雄, 曲面にはどんな模様が描けるか, 数学通信, **4-2**, 日本数学会, 1999, 3-13.

[St] N. Steenrod, The Topology of Fibre Bundles, Princeton Univ. Press, Princeton, 1951.

[T] A. K. Tsikh, Weakly holomorphic functions on complete intersections, and thier holomorphic extension, Math. USSR Sbornik, **61** (1988), 421-436.

[Y1] S. Yokura, On a Milnor class, preprint.

[Y2] S. Yokura, On characteristic classes of complete intersections, Contemp. Math. **241** (1999), 349-369.

[Y3] S. Yokura, An application of bivariant theory to Milnor classes, to appear in Topology and its Appl.

(2000年4月21日提出)

(すわ たつお・北海道大学大学院理学研究科)