H^∞ の極大イデアル空間の構造

泉 池 敬 司

序. D を複素平面の単位開円板とし，H^∞ を D 上の有界解析関数全体のなす環とする．$f \in H^\infty$ に対して，$\|f\|_\infty = \sup_{z\in D}|f(z)|$ はノルムの条件を満たし，H^∞ は Banach 空間となる．その上，$\|fg\|_\infty \le \|f\|_\infty\|g\|_\infty$ を満たし，H^∞ は可換 Banach 環となる．この論説では，ここ 20 年間の H^∞ の研究の進展の概要と，著者が最近興味をもっている問題について述べてみたい．焦点は H^∞ の極大イデアル空間の解析構造，位相構造，実解析的なアプローチからの特異内部関数，H^∞ のイデアル構造についての研究である．興味ある結果は他にも多くあるが，ここでは割愛した．

1. H^∞ の研究の幕開け

一般の単位元付き可換 Banach 環 A に対して，その上の零でない乗法的汎関数の集合を $M(A)$ で表す．$M(A) \subset A^*$ である．双対空間 A^* には A からの弱*-位相を導入することができる．それはすべての $f \in A$ に対して，A^* 上の関数 $\hat{f}$; $\hat{f}(m) = \langle f, m\rangle$, $m \in A^*$, を連続にする A^* の最弱位相である．弱*-位相で $M(A)$ はコンパクト Hausdorff 空間になる．$\hat{f}$ は $f \in A$ の Gelfand 変換と呼ばれ，Banach 環の構造を知る上で重要な役割を果たす．各 $m \in M(A)$ に対して，$\{f \in A;\, \hat{f}(m) = 0\}$ は A の極大イデアルになり，逆に A の極大イデアルはこのように表せる．したがって $M(A)$ は A の極大イデアル空間と呼ばれる．可換 Banach 環の典型的な例は関数環である．Ω をコンパクト Hausdorff 空間，$C(\Omega)$ をその上の連続関数空間とする．一様ノルムによる閉部分環 $A \subset C(\Omega)$ は，異なる 2 点 $x, y \in \Omega$ に対して $f(x) \neq f(y)$ となる $f \in A$ が存在するとき，関数環と呼ばれる．その中で H^∞ は最も興味ある関数環である．可換 Banach 環，関数環については Gamelin の本 [8] が良い教科書である．

各 $z_0 \in D$ に対して，$H^\infty \ni f \to f(z_0)$ は零でない乗法的汎関数であるから，$M(H^\infty)$ の点と同一視することができ，$D \subset M(H^\infty)$ と考えられる．各 $f \in H^\infty$ に対して，D 上で $\hat{f} = f$ である．つまり f は連続的に D から $M(H^\infty)$ に拡張でき，それが Gelfand 変換である．H^∞ の研究の幕開けは，1940 年代の始めに角谷先生により提出されたコロナ問題であった．'D を太陽に見立て，コロナ部分 $M(H^\infty) \setminus \overline{D}$ があるかどうか'，つまり 'D は $M(H^\infty)$ の中で稠密であるか' という問題である．1962 年に Carleson はその問題を解決した．それが H^∞ の研究結果の中で，証明のアイデアの深遠さそしてその後の影響力を含め，最も重要で有名な定理である．

Carleson のコロナ定理 1.1 [5]. D は $M(H^\infty)$ で稠密である．

一般の領域に対しても，コロナ問題は設定できる．コロナ問題は総じて難しくコロナ問題が成立しない平面領域の例は知られていないし，成立する例も多くは知られていない [11]．まだ多くのコロナ問題が未解決で残されている．とりわけ polydisk, ball のコロナ問題は今後の大きな課題である．

また Carleson は H^∞ の補間点列の特徴付けを与えた [4]．$\{z_n\}_n \subset D$ が H^∞ に対する補間点列であるとは，任意の有界な複素数列 $\{a_n\}_n$ に対して，$f(z_n) = a_n$ (任意の n に対して) となる $f \in H^\infty$ が存在するときにいう．

Carleson の定理 1.2 [4]. $\{z_n\}_n \subset D$ が補間点列であるための必要十分条件は

$$\inf_k \prod_{n:n\neq k} \left|\frac{z_k - z_n}{1-\overline{z}_n z_k}\right| > 0.$$

Blaschke 条件 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|) < \infty$ を満たす点列 $\{z_n\}_n \subset D$ に対して，Blaschke 積

$$b(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{-\overline{z}_n}{|z_n|}\frac{z-z_n}{1-\overline{z}_n z}, \quad z \in D \tag{1.1}$$

が定義できる．Blaschke 積は H^∞-関数である．補間点列は Blaschke 条件を満たし，補間点列を零点にもつ Blaschke 積は補間 Blaschke 積と呼ばれる．Carleson のコロナ定理以降の H^∞ の研究の多くは，補間 Blaschke 積が H^∞ の中で果たす役割の研究であり，それは非常に良い性質をもつことが分かったというのが，この 50 年の総括になるといっても過言ではない．Garnett 及び Hoffman の本 [10, 24] がこの方面における良い教科書である．

2. 補間 Blaschke 積の役割

H^∞-関数の境界での挙動は 1 つの研究テーマであるが，それを研究することは，コロナ定理より $M(H^\infty)\setminus D$ の構造を研究することと同じである．D は解析構造そのものであるが，$M(H^\infty)\setminus D$ の中の解析構造を解明したのが Hoffman である．

2 点 $x, y \in M(H^\infty)$ に対して

$$\rho(x,y) = \sup\{|\hat{f}(y)|\,;\, f \in H^\infty,\ \|f\|_\infty \le 1,\ \hat{f}(x) = 0\}$$

とおく (pseudo-hyperbolic distance)．$z, w \in D$ のとき，$\rho(z,w) = |z-w|/|1-\overline{z}w|$ となる．集合

$$P(x) = \{y \in M(H^\infty)\,;\, \rho(x,y) < 1\}$$

は x の Gleason 部分と呼ばれ，$M(H^\infty)$ を同値類へ分割する．これが 1 点集合でない場合に解析構造が入るというのが Hoffman の定理である．

Hoffman の定理 2.1 [25]. 点 $x \in M(H^\infty)$ に対して次は同値である．

(i) $\hat{b}(x) = 0$ となる補間 Blaschke 積 b が存在する．

(ii) $P(x) \neq \{x\}$，(このとき x は非自明点と呼ばれる)．

極大イデアル空間 $M(H^\infty)$ を 2 つに分類し，

$$G = \bigcup\{x \in M(H^\infty)\,;\, P(x) \neq \{x\}\}, \quad S = \bigcup\{x \in M(H^\infty)\,;\, P(x) = \{x\}\}$$

とおく．$x \in M(H^\infty)$ に対して，コロナ定理より D の中の net $\{z_\alpha\}_\alpha$ で $z_\alpha \to x$ なるものが存在する (コロナ定理がないとここの議論ができない)．$L_{z_\alpha}(z) = (z+z_\alpha)/(1+\overline{z}_\alpha z)$，$z \in D$，とおく．すると任意の $f \in H^\infty$，$z \in D$ に対して，$f \circ L_{z_\alpha}(z)$ は収束し，$L_{z_\alpha}(z)$ の弱*-極限を $L_x(z)$ で表すと，$f \circ L_{z_\alpha}(z) \to \hat{f} \circ L_x(z)$ となる．$0 < r < 1$ を固定する．

$$\Delta(z,r) = L_z(\{|z|<r\}) = \{w \in D\,;\, |z-w|/|1-\bar{z}w| < r\}$$

は円板であり，$|z| \to 1$ とすると，円板は小さくなりながら境界に近づいていく．$D_r = \{|z|<r\}$ から望遠鏡で円板 $\Delta(z_\alpha, r)$ を眺め，そしてその上の関数 f を D_r 上の関数とみなしたときの極限関数が $\hat{f} \circ L_x(z)$ である．

Hoffman の定理 2.2 [25]. $x \in M(H^\infty)$ とする．

(i) $x \in G$ のとき，L_x は D 上の 1 対 1，連続写像で $\hat{f} \circ L_x \in H^\infty$ (任意の $f \in H^\infty$) であり，$L_x(0) = x$，$L_x(D) = P(x)$ である．

(ii) $x \in S$ のとき，$L_x(D) = \{x\}$ である．

Hoffman は Blaschke 積に関する 2 つの分解定理を証明することにより，この理論を打ち立てた．$x \in G$ に対して，Hoffman の定理 2.1 より補間 Blaschke 積 b で $\hat{b}(x) = 0$ なるものがある．$\{z_n\}_n \in D$ を b の零点列とすると

$$\{x \in M(H^\infty)\,;\, \hat{b}(x) = 0\} = \overline{\{z_n\}_n} \tag{2.1}$$

であることが知られている [24, p.205]．また $\{x \in M(H^\infty)\,;\, |\hat{b}(x)| < \delta\} \subset G$ なる $\delta > 0$ が存在し [25]，G は $M(H^\infty)$ の開集合になる．そして $\hat{b}$ が x における座標関数 z の役割を果たし，$x \in G$ の近傍は $\beta N \times D_r$ の構造をもつことが分かる．このように集合 G は関数論が使える場所である．G の構造はかなり解明され，G 上で設定された問題はそれなりに解決されてきた [15, 22, 35, 55].

一方，$x \in S$ とし，$z_\alpha \to x$ としてみよう．このとき $\Delta(z_\alpha, r)$ 上で関数 $f \in H^\infty$ をみて $\alpha \to \infty$ としたとき，$f|_{\Delta(z_\alpha, r)}$ は定数関数 $\hat{f}(x)$ に近づく．よって，x の近くでの f の挙動は D の内部からは捉えづらい．つまり S は D の内部からは関数論的には捉えられない点の集まりであり，H^∞ の研究の難しさが凝縮されている場所である．H^∞ の未解決問題の多くは S の部分と関わり合いをもつものが多く，今後の H^∞ の研究の中核をなす集合であろう．S を研究するための手がかり，道具が不足しているのが現状である．

$f \in H^\infty$ に対して，$f(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} f(re^{i\theta})$，a.e. $e^{i\theta}$，が存在する．f とこの境界関数を同一視する．すると H^∞ は $L^\infty = L^\infty(\partial D)$ の閉部分環と考えることができる．$H^\infty \subset B \subset L^\infty$ である一様ノルムによる閉部分環 B は Douglas 環と呼ばれる．次の定理は一見，コロナ定理とは無関係にみえるが，その証明の中に Carleson のコロナ定理の証明のアイデアが深く横たわっている．

Chang–Marshall の定理 2.3 [6, 51]. 任意の Douglas 環 B は H^∞ といくつかの補間 Blaschke 積の複素共役で L^∞ の閉部分環として生成される．

この定理により，$f \in L^\infty$ が与えられたとき，H^∞-関数とどれだけ離れているのかを，性質の良い補間 Blaschke 積を通して表すことができる．$H^\infty[f]$ で f と H^∞ より生成される Douglas 環とすると，Chang–Marshall の定理より

$$H^\infty[f] = H^\infty[\bar{b}_n; b_n \text{ は 補間 Blaschke 積}]$$

と表せる [31]．この $\{b_n\}_n$ が f と H^∞ との離れ具合を測る指標になり，関数 $f \in L^\infty$ に対する情報を得ることができる．たとえば，単位円周上の Bourgain 環は Chang–Marshall の定理によってほぼ

全容を解明することができる [14]. しかし同じ問題を polydisk 及び多次元 ball の上で考えようとするとき, Chang–Marshall 型の定理ができていないため, 未解決のまま残っている [33]. 多次元の領域の Chang–Marshall 型の定理は今後の課題といえようが, また円板のときの補間 Blaschke 積のように都合の良い関数族も知られていない.

Chang–Marshall の定理を利用して, 多くの定理が得られているが, その中の 1 つとして次の定理を挙げる.

定理 2.4 [29]. B を Douglas 環とする. B/H^∞ の閉単位球が端点をもつための必要十分条件は $B = H^\infty[\bar{b}]$ となる補間 Blaschke 積 b が存在することである.

Marshall [50] は 1976 年にすべての Blaschke 積より生成される L^∞ の閉部分環は H^∞ と一致することを示した. Jones [48] は補間 Blaschke 積の研究を通して 2 つの問題を提出した. 1 つは Marshall の定理において Blaschke 積を補間 Blaschke 積で取り替えることができるかという問題であるが, 最近 Garnett–Nicolau [12] により肯定的に解決された. 残っているのは次である.

Jones の問題 2.5. 任意の Blaschke 積は補間 Blaschke 積で一様近似できるか?

$\{x_n\}_n$ を G の点列とする. 前と同様に補間点列を定義することができる. $\{x_n\}_n \subset D$ のときは (2.1) と Hoffman の定理 2.1 により, $\overline{\{x_n\}_n} \subset G$ である.

問題 2.6. $\{x_n\}_n \subset G$ を補間点列とする. $\overline{\{x_n\}_n} \subset G$ が成立するか?

この問題に対しては [18, 32, 52] などの研究がある.

3. $H^\infty + C$, QC 空間と割算問題

Sarason は, $H^\infty + C$ は L^∞ の一様ノルムによる閉部分環になること (Douglas 環) を示した, ここで C は ∂D 上の連続関数の全体である [56]. このとき $M(H^\infty + C) = M(H^\infty) \setminus D$ となり, 境界付近の H^∞-関数の挙動を研究する上で $H^\infty + C$ は重要な空間である. また Hardy 空間 H^2 上の作用素論の研究と深くかかわる空間でもある [1, 59]. 単に性質が良く構造の分かる C が加えられただけであるが, $H^\infty + C$ は H^∞ とは異なる性質をもつ空間に変化し, 関数環論における研究対象としては非常に興味深い.

$f \in H^\infty$ は $|f| = 1$ a.e. on ∂D のとき, 内部関数と呼ばれる. ∂D 上の有界な Lebesgue 測度に対する特異な正測度の集合を M_s^+ とする. $\mu \in M_s^+$ に対して

$$\psi_\mu(z) = \exp\Big(-\int_{\partial D} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(e^{i\theta}) \Big), \quad z \in D \tag{3.1}$$

は特異内部関数と呼ばれる. 内部関数は Blaschke 積と特異内部関数に分解できることが知られている [7, 24].

Guillory–Sarason [23] は 2 つの内部関数 φ, ψ に対して, いつ $\varphi/\psi \in H^\infty + C$ であるかという $H^\infty + C$ での割算問題を研究した.

$$\{|\varphi| < 1\} = \{x \in M(H^\infty + C)\,;\, |\hat{\varphi}(x)| < 1\}, \quad Z(\varphi) = \{x \in M(H^\infty + C)\,;\, \hat{\varphi}(x) = 0\}$$

とする. $\varphi/\psi \in H^\infty + C$ ならば $\{|\psi| < 1\} \subset \{|\varphi| < 1\}$ かつ $Z(\psi) \subset Z(\varphi)$ である. 一般には逆

は成立しない．ψ が補間 Blaschke 積のときは，$Z(\psi) \subset Z(\varphi)$ ならば $\varphi/\psi \in H^\infty + C$ となり，これも補間 Blaschke 積のもつ良い性質の 1 つである．$M(H^\infty + C)$ 上で $|\hat{\varphi}| \le |\hat{\psi}|$ のとき，一般には $\varphi/\psi \notin H^\infty + C$ である．[23] で Guillory–Sarason は Carleson がコロナ定理の証明で使った手法を用いて $\varphi^N/\psi \in H^\infty + C$ となる自然数 N が存在することを示した．次は $N = 2$ であることを示している．

定理 3.1 [46]. φ, ψ を内部関数で $M(H^\infty + C)$ 上で $|\hat{\varphi}| \le |\hat{\psi}|$ とする．このとき，任意の自然数 n に対して，$\varphi^{n+1}/\psi^n \in H^\infty + C$ である．

内部関数 φ, ψ が $H^\infty + C$ で codivisible であるとは $\varphi/\psi \in H^\infty + C$ かつ $\psi/\varphi \in H^\infty + C$ のときにいう．このとき，$M(H^\infty + C)$ 上で $|\varphi| = |\psi|$ である．そして次の問題が依然として残されている．

Guillory–Sarason の問題 3.2 [23]. 異なる特異内部関数の組みで codivisible となるものが存在するか？

Blaschke 積については多くの割算問題に対する研究結果があるが [18, 34, 35]，特異内部関数に関する研究はほとんどない．その理由の 1 つは Blaschke 積は D 内での議論が可能であるが，特異内部関数は有界正特異測度の Poisson 積分の境界挙動を調べることが必要であり，その方面からの研究が遅れていることが挙げられる．

$$QC = (H^\infty + C) \cap \overline{(H^\infty + C)}, \quad QA = QC \cap H^\infty$$

とおく [56]．$H^\infty \cap \overline{H^\infty}$ は定数関数だけの集合になることから，QC はかなり小さい関数空間であると考えられる．しかし H^∞，L^∞ の研究において，QC や QA は重要な役目を果たしてきた．次がそれを保証する定理である．

Wolff の定理 3.3 [58]. (i) 任意の $f \in L^\infty$ に対して，$hf \in QC$ となる $h \in QA$，$h \neq 0$，が存在する．

(ii) $f \in L^\infty$ を $M(L^\infty)$ 上で $|f| = 1$ とする．そのとき，$f = b_1\bar{b}_2 u$ と分解できる．ここで b_1, b_2 は Blaschke 積，$u \in QC$ で可逆である．

L^∞ の極大イデアル空間を $M(L^\infty)$ とすると，$M(L^\infty) \subset M(H^\infty)$ であると考えることができ，$M(L^\infty)$ は $\hat{H}^\infty$ の Shilov 境界 (即ち，$\hat{H}^\infty$ の絶対最大値を達成する $M(H^\infty)$ の中の最小の閉集合) となることが知られている．関数環の一般論から，各 $x \in M(H^\infty)$ に対して

$$\int_{M(L^\infty)} \hat{f} d\mu_x = \hat{f}(x), \quad f \in H^\infty$$

となる唯 1 つの $M(L^\infty)$ 上の確率測度 μ_x が存在する．μ_x は x の表現測度と呼ばれる [8, 24]．その台を $\operatorname{supp} \mu_x$ で表す．

$M(L^\infty)$ 上には ∂D 上の Lebesgue 測度の持ち上げ $\hat{m}$ が次のように定義される；

$$\int_{M(L^\infty)} \hat{f} d\hat{m} = \int_{\partial D} f d\theta/2\pi, \quad f \in L^\infty.$$

Wolff の定理は大雑把にいえば，関数 $f \in L^\infty$ は $M(L^\infty)$ 上 $\hat{m}$-測度零の集合を除いた所で，ある QC 関数と一致することを示している．QC 空間の立場からみれば，L^∞-関数はほとんどの点で連続関数

であるというのが Wolff の定理である．このことから，QC 空間の重要性が理解できるであろう．

QC を使って $M(H^\infty + C)$ の分割が考えられる．$x \in M(H^\infty + C)$ に対して

$$Q(x) = \{y \in M(H^\infty + C)\,;\, \hat{f}(y) = \hat{f}(x), \text{ すべての } f \in QC\}$$

とする．各 $Q(x)$ を点 x を含む $M(H^\infty + C)$ の中の QC-レベル集合という．QC-レベル集合 Q に対して $Q_\infty = Q \cap M(L^\infty)$ を $M(L^\infty)$ の中の QC_∞-レベル集合という．

内部関数 q に対して

$$N(\overline{q}) = \overline{\bigcup\{Q_\infty\,;\, Q_\infty \text{ は } QC_\infty\text{-レベル集合}, \ \hat{q}|_{Q_\infty} \neq \text{ 定数 }\}}$$

とする．$N(\overline{q})$ は関数 q の QC 空間からみたときの，不連続点の集合である．その性質については [30, 31] で研究されており，次の定理が成立する．

分離定理 3.4. q_1, q_2 は内部関数で $\{|q_1| < 1\} \cap \{|q_2| < 1\} = \emptyset$ とする．このとき，

(i) $N(\overline{q}_1) \cap N(\overline{q}_2) = \emptyset$ である．

(ii) $N(\overline{q}_1) = \bigcup\{Q_\infty(x)\,;\, |q_1(x)| < 1,\ x \in M(H^\infty + C)\}$ である．

この定理はみた目よりもかなり強力な定理である [36, 39, 43, 59]．1 つの応用として次の Korovkin 型近似定理がある ([36] を参照)．

定理 3.5. $\{T_n\}_n$ を H^∞ 上の有界線形作用素の列で $\|T_n\| \to 1$ とする．任意の $f \in QA$ に対して $\|T_n f - f\|_\infty \to 0$ ならば $\|T_n - I\| \to 0$ である．ここで I は H^∞ 上の恒等作用素である．

関数 $\varphi \in H^\infty$，$\varphi(D) \subset D$，に対して，合成作用素 $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$，$f \in H^\infty$，が定義できる．$C_\varphi$ は H^∞ 上の有界線形作用素になる．最近，H^∞ 上の合成作用素全体の空間のノルム位相による連結成分が決定された [26, 49]．しかしまだ強作用素位相による連結成分は決定されていない．上の定理は恒等作用素 $I = C_z$ の連結成分は両者の位相で一致することを示唆している．このような手法により，定理 3.5 は恒等作用素 I を合成作用素 C_φ に置き換えても成立すると同時に，2 つの位相の連結成分は一致すると予想している．

4. Gleason 部分の構造

まず Gleason 部分 $P(x)$ の分類について述べる．$x \in G$ を非自明点とする．2 節でみたように 1 対 1 上への連続写像 $L_x : D \to P(x)$，$L_x(0) = x$，がある．L_x が位相同型写像になるとき，$P(x)$ は位相同型 Gleason 部分と呼ばれる [17]．Hoffman は上半平面で考えたとき，$\{n+i\}_n$ の集積点の中のある $x \in G$ に対して，$P(x)$ は位相同型でない Gleason 部分であることを示した [25]．位相同型 Gleason 部分 $P(x)$ に対して $\hat{b} \circ L_x(z) = cz$，$|c| = 1$，なる補間 Blaschke 積 b が存在する場合としない場合がある．前者の場合は局所 sparse 部分と呼ばれる．$\{z_n\}_n \subset D$ が

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k:k\neq n} \left| \frac{z_k - z_n}{1 - \overline{z}_n z_k} \right| = 1$$

を満たすとき，その点列とそれを零点にもつ Blaschke 積 b は sparse または thin と呼ばれる．このとき，$\hat{b}(x) = 0$ なる任意の x に対して $\hat{b} \circ L_x(z) = cz$，$|c| = 1$，となり，(局所) sparse 部分の典型的な

例となる [25]．$\{z_n\}_n$ を零点列とする補間 Blaschke 積 b は

$$\lim_{n\to\infty}\inf_{k:k\neq n}\left|\frac{z_k-z_n}{1-\overline{z}_n z_k}\right|=1$$

を満たすとき，spreading と呼ばれる．このとき $P(x)$ は D に位相同型であるが，局所 sparse でないような点 $x\in Z(b)$ が存在する [38]．sparse 部分，位相同型 Gleason 部分，位相非同型 Gleason 部分，の順に Gleason 部分の形がくずれていくが，それらがどのようなメカニズムで変化し，どのような位置関係で相互に関係しているのか，あまり分かっていない [54, 55]．

では自明点 $P(x)=\{x\}$ については何がいえるか．自明点の集合 S は $M(H^\infty)$ の閉集合になり，$M(L^\infty)\subset S$ であり，$M(L^\infty)\neq S$ であることは Hoffman [25] により指摘されている．$x\in G$ に対して，Budde [3] は $\overline{P(x)}$ の中に多くの S の点が含まれていることを示した．そして

$$S\subset M(L^\infty)\cup\bigcup\{\overline{P(x)}\,;\,x\in G\setminus D\}$$

が成立するかという問題を提出した．[27] でこの問題に対する反例，即ち

(4.1) $$x_0\in S\setminus M(L^\infty)\text{ でかつすべての } x\in G\setminus D \text{ に対して } x_0\notin\overline{P(x)}$$

となる点 x_0 の存在を示した．各 $\lambda\in\partial D$ に対して，fiber

$$M_\lambda(H^\infty+C)=\{x\in M(H^\infty+C)\,;\,\hat{z}(x)=\lambda\}$$

が定義できる．$\{M_\lambda(H^\infty+C)\,;\,\lambda\in\partial D\}$ は $M(H^\infty+C)$ の分割になる．$\{\lambda_n\}_n\subset\partial D$ を異なる点よりなる点列で，$\lambda_n\to 1$ とし，

(4.2) $$x_n\in M_{\lambda_n}(H^\infty+C)\setminus M(L^\infty)$$

かつ $x_n\in S$ を取る．すると $\{x_n\}_n$ の集積点 x_0 はすべて (4.1) を満たす．

さらに

$$\text{すべての点列 } \{y_n\}_n\subset G\setminus D \text{ に対して，} y_0\notin\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}P(y_n)}$$

となる $y_0\in S\setminus M(L^\infty)$ が存在し [40]，そのような y_0 の集まりが S の中で稠密であることが最近証明された [13]．徐々に S の構造が分かりつつある．

また (4.2) を満たす点列 $\{x_n\}_n$ の集積点 x_0 は面白い性質をもつことが分かってきた．1つは $\overline{P(x_0)}\subset\overline{P(y)}$ となる点 $y\in M(H^\infty+C)$ が存在しないこと．もう1つは $\operatorname{supp}\mu_{x_0}\subsetneqq\operatorname{supp}\mu_y$ なる点 $y\in M(H^\infty+C)$ が存在しないことなどである [16]．また $x_n\in G$ のとき，$P(x_0)$ はいつでも局所 sparse 部分となる．点列の集積点は点列のそれぞれの点がもつ性質とまったくかけ離れた性質をもつ．まだその関連性についての研究の余地が残されている．

S の位相的性質については，最近 Suárez [53] が totally disconnected になることを示した．しかし

extremely disconnected ではない [28].

5. 特異内部関数

$P_z(e^{i\theta}) = (1-|z|^2)/|e^{i\theta}-z|^2$ を Poisson 核とする．$\mu \in M_s^+$ の Poisson 積分を

$$P_z[\mu] = \int_{\partial D} P_z(e^{i\theta})d\theta/2\pi, \ \ z \in D$$

とすると，(3.1) より

$$P_z[\mu] = -\log|\psi_\mu(z)|, \quad z \in D$$

であり，このことから $P_z[\mu]$ は $M(H^\infty)$ 上に連続 (∞ の値を含めて) に拡張される．それを $\hat{P}_z[\mu]$ で表すと，

$$\hat{P}_z[\mu](x) = -\log|\psi_\mu(x)|, \quad x \in M(H^\infty)$$

である．この観点より，測度 $\mu \in M_s^+$ のもつ性質が $M(H^\infty)$ のどこにどのような形で反映されているかという問題が生ずる．この研究は L^∞ が H^∞ と特殊な Blaschke 積の複素共役で生成されるという [37] の研究を発端に，それを特異内部関数に拡張するという方向で進められてきた [39, 44, 45, 47].

$\mu_1, \mu_2 \in M_s^+$ に対して，$\mu_1 \ll \mu_2$ かつ $\mu_2 \ll \mu_1$ のとき $\mu_1 \sim \mu_2$ とかく．$\mu \in M_s^+$ に対して

$$\mathscr{Z}(\mu) = \bigcap_{\nu;\nu\sim\mu} Z(\psi_\nu), \ \ \mathscr{W}(\mu) = \bigcap_{\nu;\nu\sim\mu} \{|\psi_\nu| < 1\}$$

とおく．$\mathscr{Z}(\mu) \subset \mathscr{W}(\mu)$ であり，それらは μ に同値な測度に固有の $M(H^\infty + C)$ の中の部分集合になる．まず任意の $\mu \in M_s^+$ に対して $\mathscr{Z}(\mu) \neq \emptyset$ であることが分かる．μ が連続測度である必要十分条件は $\mathscr{Z}(\mu) = \mathscr{W}(\mu)$ となる．またこのとき，$x \in \mathscr{Z}(\mu)$ かつ $\operatorname{supp}\mu_x \subset \operatorname{supp}\mu_y$，$y \in M(H^\infty + C)$，ならば $y \in \mathscr{Z}(\mu)$ である．μ が連続測度でないとき，それは成立しない．

定理 5.1 [44]. $\mu, \nu \in M_s^+$ とする．$\mu \perp \nu$ ならば $\mathscr{W}(\mu) \cap \mathscr{W}(\nu) = \emptyset$ である．

この定理により互いに特異であるという測度の性質は，それぞれの共通零集合に共通部分がないという性質として現れる．

定理 5.2 [44]. $K \subset \partial D$ を閉集合で Lebesgue 測度 0 とする．このとき任意の $\operatorname{supp}\mu \subset K$ である $\mu \in M_s^+$ に対して，$Z(b_K) \cap \mathscr{Z}(\mu) \neq \emptyset$ となる補間 Blaschke 積 b_K がある．

このことから，$\mu \in M_s^+$ に対して $\mathscr{Z}(\mu) \cap G \neq \emptyset$ であることが分かる．また $M(L^\infty(\mu))$ を $L^\infty(\mu)$ の極大イデアル空間とする．すると $M(L^\infty(\mu))$ は $M(H^\infty)$ の中に次のように表現される．

定理 5.3 [44]. 次を満たす写像 $\Phi_\mu(x)$，$x \in M(L^\infty(\mu))$，がある．

(i) $\emptyset \neq \Phi_\mu(x) \subset \mathscr{Z}(\mu)$，$x \in M(L^\infty(\mu))$.

(ii) $x, y \in M(L^\infty(\mu))$ で $x \neq y$ ならば，$\Phi_\mu(x) \cap \Phi_\mu(y) = \emptyset$ である．

(iii) $\mathscr{Z}(\mu) = \bigcup\{\Phi_\mu(x)\,;\, x \in M(L^\infty(\mu))\}$.

この定理を通して，測度 $\mu \in M_s^+$ の性質を $M(H^\infty)$ の中で捉えることも可能と考える．$\Phi_\mu(x)$ の

性質はあまり良く分かっていないが，特異内部関数の性質を調べる上で重要なカギを握っていると考えている．そのほか，実解析との接点としては，μ の Fourier–Stieltjes 変換が無限遠点で 0 になるとき，その性質は $M(H^\infty)$ のどこにどのような形でいい表せるのか，$\mathrm{Rad}\, L^1(\partial D)$ に入る特異測度はどのように $M(H^\infty)$ の上で捉えることができるのかという問題が設定できる．このような方向で，私は H^∞ の立場から測度空間の研究に新たな見地が開かれることを期待している．

特異内部関数に関しては Guillory–Sarason の問題 3.2 が依然として残っている．個人的には存在しないと考えているが，非常に難しい問題である．以下この問題に関連する話題を挙げよう．$\mu \in M_s^+$ とする．$\nu \in M_s^+$ が $\nu \ll \mu$ でありかつ $\{|\psi_\mu| < 1\} \subset Z(\psi_\nu)$ を満たすとき，ν を μ の外部消滅測度と呼ぶことにする．

定理 5.4 [45]. $\mu \in M_s^+$ とする．もし ψ_μ と ψ_ν が codivisible となる $\nu \in M_s^+$ で $\mu \perp \nu$ となるものが存在するならば，μ は外部消滅測度をもつ．

外部消滅測度をもつ連続特異測度も存在するし，もたないものも存在する．しかし，それらの測度の特徴付けは分かっていない．$0 \le \nu \le \mu$ であり $\{|\psi_\nu| < 1\} \subset Z(\psi_\mu)$ であるとき，ν を μ の内部消滅測度ということにする．$\{\nu_\alpha\}_\alpha$ を μ の内部消滅測度全体とし，$\mu_i = \vee_\alpha \nu_\alpha$ とおく．

定理 5.5 [45]. $\mu \in M_s^+$ に対して，次は同値である．

(i) $Z(\psi_\mu) = Z(\psi_{\mu_i})$.

(ii) $M(H^\infty + C)$ 上で $|f| \le |\psi_\mu|$ である任意の $f \in H^\infty + C$ に対して，$\nu \le \mu$，$|\psi_\nu| = |\psi_\mu|$ on $M(H^\infty + C)$ かつ $f/\psi_\nu \in H^\infty + C$ となる $\nu \in M_s^+$ が存在する．

(iii) $M(H^\infty + C)$ 上で $|\psi_\mu| \le |\psi|$ である任意の内部関数 ψ に対して，$\mu \le \nu \le 2\mu$，$|\psi_\nu| = |\psi|$ on $M(H^\infty + C)$ かつ $\psi_\nu/\psi \in H^\infty + C$ となる $\nu \in M_s^+$ が存在する．

この 2 つの定理は Guillory–Sarason の問題の手がかりになりうると考えている．

6. イデアル構造

1980 年頃，Wolff はコロナ定理の別証明を与えた．

Wolff の定理 6.1. $f_1, f_2, \dots, f_n \in H^\infty$ とする．$h \in H^\infty$ が D 上で $|h| \le |f_1| + |f_2| + \dots + |f_n|$ を満たすならば，$h^3 = g_1 f_1 + g_2 f_2 + \dots + g_n f_n$ となる $g_1, g_2, \dots, g_n \in H^\infty$ が存在する．

h が 0 でない定数関数のときは，コロナ定理になる．Wolff はこの証明を論文としては発表していない [9]．Wolff が目指していたのは h^3 を表すことではなく，h^2 を表すことであったが証明を完成できず，Wolff の問題として残った．$h = g_1 f_1 + \dots + g_n f_n$ と表せない h の例は知られている．この問題の難しさは，$f_1, f_2, \dots, f_n$ の共通零点が S の点を含むときである．Wolff の定理と定理 3.1 はどのような関係があるのかは分かっていない．Wolff の問題は H^∞ のイデアルの研究と深くかかわっている．$I(f_1, f_2, \dots, f_n)$ を $f_1, f_2, \dots, f_n$ で代数的に生成される H^∞ のイデアルとし，

$$J(f_1, f_2, \dots, f_n) = \{h \in H^\infty ; C|h| \le |f_1| + |f_2| + \dots + |f_n| \text{ on } D, C > 0\}$$

とすると，J もイデアルになり $I \subset J$ である．Bourgain [2] は任意の $h \in J$ に対して $h^2 \in \overline{I}$ であることを示している．

これに対して，最近 Treil [57] が Wolff の問題の反例を与えた．Wolff の問題の精密化として次が

ある．

問題 6.2. $S \cap \bigcap_{j=1}^n Z(f_j) \neq \emptyset$ とする．そのとき $h^2 = g_1 f_1 + \ldots + g_n f_n$ と表せないような $h \in H^\infty$ が存在するか．

S の中に共通零点をもたないときは，次のように解決される．S にかかわらないときは，問題はあまり難しくはないという 1 つの例である．

定理 6.3 [22]. $f_1, f_2, \ldots, f_n \in H^\infty$ とする．かつ S 上 $\sum |\hat{f}_j| > 0$ とする．$h \in H^\infty$ が D 上で $|h| \leq |f_1| + |f_2| + \ldots + |f_n|$ を満たすならば，$h^2 = g_1 f_1 + \ldots + g_n f_n$ となる $g_1, \ldots, g_n \in H^\infty$ が存在する．

もう 1 つ S にかかわらなければ証明できる定理を挙げる．

定理 6.4 [15]. I を H^∞ の閉イデアルとする．$Z(I) = \bigcap \{Z(f); f \in I\}$ とする．$Z(I) \cap S = \emptyset$ のときには，

$$I = \{g \in H^\infty ; \text{すべての } x \in Z(I) \text{ に対して } \operatorname{ord}(g, x) \geq \operatorname{ord}(I, x)\}$$

である．ここで $\operatorname{ord}(I, x) = \min \{\operatorname{ord}(\hat{f} \circ L_x, 0) ; f \in I\}$ で ord は零点の位数を表す．

H^∞ の研究を通して難しい問題として残るのは S にかかわるときであり，S の構造の研究の進展が望まれている．

$M(H^\infty + C)$ の位相構造について，最近いくつかの面白い結果を得た．

定理 6.5 [41]. $\{q_n\}_n$ を内部関数列とする．E を $M(H^\infty + C)$ の G_δ 集合で $\overline{\bigcup_{n=1}^\infty \{|q_n| < 1\}} \subset E$ とする．このとき，内部関数 q_0 で

$$\overline{\bigcup_{n=1}^\infty \{|q_n| < 1\}} \subset Z(q_0) \subset \{|q_0| < 1\} \subset E$$

を満たすものが存在する．

定理 6.6 [41]. $f \in H^\infty + C$, $f \neq 0$, で $\operatorname{int} Z(f) \neq \emptyset$ とする．E を $M(H^\infty + C)$ の F_σ 集合で $E \subset \operatorname{int} Z(f)$ とする．このとき，$\overline{E} \cap \overline{\{f \neq 0\}} = \emptyset$ である．

これらの定理は H^∞ 及び $H^\infty + C$ のイデアル構造の研究に応用できる．

系 6.7 [41]. q を内部関数とし，$f \in H^\infty$ とする．f が $\overline{\{|q| < 1\}}$ 上で 0 ならば，$\overline{\{|q| < 1\}}$ の $M(H^\infty + C)$ でのある近傍でも 0 である．

$x \in M(H^\infty + C)$ に対して，$J(x)$ を $M(H^\infty + C)$ の中での x の近傍で 0 になる関数全体のなす $H^\infty + C$ のイデアルとする．次は Gorkin–Mortini [21] の問題の解答である．

系 6.8 [41]. $x \in M(H^\infty + C)$ に対して，$J(x)$ は $H^\infty + C$ の素イデアルである．

$H^\infty + C$ の構造を研究する上で，$J(x)$ は重要なイデアルであると考えている．その hull を $k(x)$ で表す．つまり $k(x) = \bigcap \{Z(f); f \in J(x)\}$ とする．Gorkin–Mortini [21] は次のように $k(x)$ を記述した．$f \in L^\infty$ に対して，

$$\hat{f}(x) = \int_{M(L^\infty)} f \, d\mu_x, \quad x \in M(H^\infty)$$

とおく．$\hat{f}$ は $M(H^\infty)$ 上の連続関数になる [25].

定理 6.9. $x \in M(H^\infty + C)$ とする．

(i) $x \notin M(L^\infty)$ のとき，$k(x) = \bigcap \overline{\{|b| < 1\}}$，ここで b は $|b(x)| < 1$ なる Blaschke 積すべてを動く．

(ii) $x \in M(L^\infty)$ のとき，$k(x) = \bigcap \overline{\{\hat{\chi}_S < 1\}}$，ここで S は $M(L^\infty)$ の開かつ閉集合で $x \notin S$ なるものすべてを動く．

$y \in k(x)$ のとき, $k(y) \subset k(x)$ である [21]. 包含関係に関して極小となる $k(x)$ は表現測度の support 集合の極大性と関係して興味がある．それらは次の定理により，QC_∞-レベル集合と 1 対 1 の対応が付くことが分かった．Q_∞ を QC_∞-レベル集合とする．

$$K(Q_\infty) = \bigcap_S \overline{\{0 < \chi_S < 1\}}$$

とする．ここで S は $M(L^\infty)$ の開かつ閉集合で $S \cap Q_\infty \neq \emptyset$ であり $S^c \cap Q_\infty \neq \emptyset$ であるもの全体を動く．次は分離定理 3.4 を応用することによって得られる．

定理 6.10 [43]. Q_∞ を 2 点以上からなる QC_∞-レベル集合とする．

(i) $K(Q_\infty) \neq \emptyset$ である．

(ii) $k(x)$ が極小である必要十分条件は $k(x) = K(Q_\infty(x))$ である．

I を H^∞ のイデアルとする．その共通零点集合を $Z(I)$ で表す，$Z(I) = \bigcap\{Z(f);\, f \in I\}$．$Z(I)$ 上で零になる関数全体からなる H^∞ のイデアルを $I(Z(I))$ で表す．そのとき $I \subset I(Z(I))$ である．$\overline{I} = I(Z(I))$ となる H^∞ のイデアル I は，Gorkin–Mortini により [19, 20] で研究されている．それを完全に決定することは興味深い問題であるが，たぶんかなり難しいであろう．次の定理は Bourgain [2] の結果と，Guillory–Sarason [23] の結果の精密化を与えることにより証明される．

定理 6.11 [42]. I を H^∞ のイデアルとする．次の条件を満たすと仮定する．

(α) $0 < \sigma < 1$ と $Z(I) \cap \overline{E} = \emptyset$ なる $E \subset D$ に対して，E 上で $|h| > \sigma$ となる $h \in I$, $\|h\|_\infty = 1$, が存在する．

そのとき $\overline{I} = I(Z(I))$ が成立する．

この定理の応用として，I が H^∞ の素イデアルのとき，$\overline{I} = I(Z(I))$ であることが示される．定理の逆は成立しないが, 次がいえる．

系 6.12. I を H^∞ のイデアルで $P(x) \subset Z(I)$ が任意の $x \in Z(I)$ に対して成立するとする．このとき，条件 (α) は $\overline{I} = I(Z(I))$ と同値である．

1 つの関数 $f \in H^\infty$ より生成されるイデアルを $I(f)$ で表すことにする．f を可逆でない外部関数とするとき，$\overline{I}(f) = I(Z(I(f)))$ がいつ成立するかという問題が生ずる．$\overline{I}(f) \neq I(Z(I(f)))$ となる外部関数 f の例として

$$f(z) = \exp\Big(\int_0^1 \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log\theta \, d\theta/2\pi\Big), \quad z \in D$$

がある．

定理 6.13 [42]. $f \in H^\infty$ を可逆でない外部関数とする．$\overline{I}(f) = I(Z(I(f)))$ が成立するための必

要十分条件は $\hat{f}(x) \neq 0$ である任意の $x \in M(H^\infty)$ に対して Jensen の等式

$$(\beta) \qquad \log|\hat{f}(x)| = \int_{M(L^\infty)} \log|\hat{f}|\, d\mu_x$$

が成立することである．

この定理も定理 6.11 の応用として得られる．しかし，定理 6.13 の条件 (β) が成立する f は具体的にはどのようなものなのかは明らかではない．$f \in QA$ のとき，及び $\mathrm{Re}\, f(z) > 0$，$z \in D$，のときは条件 (β) が成立する．それ以外の例は知られていない．

あとがき．Treil による Wolff の問題の反例は，私にはショックな出来事であった．それにより研究の方向性は少し変わってくると思うが，私自身まだそれを捉え切っていない．4–6 節の話は，最近急激に進展している所であり，まだまだ不十分さを感じる．

2000 年 7 月 31 日，Thomas Wolff 氏が交通事故で他界された．H^∞ の研究方法について，個人的に 1 つのアドバイスを受けていたが，残念ながらまだそれを結実させるに至っていない．追悼記事が，Notices 48 (2001), 482–490，に掲載されている．また 2001 年 3 月 18 日，共同研究者であった Carroll Guillory 氏 (Univ. Southwestern Louisiana, USA) が心臓病で他界された．お二人のご冥福を祈り哀悼の意をここに表したい．

文　献

[1] S. Axler, S. -Y. Chang, and D. Sarason, Products of Toeplitz operators, Integral Eq. Op. Th., **1**(1978), 285-309.

[2] J. Bourgain, On finitely generated closed ideals in $H^\infty(D)$, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **35**(1985), 163-174.

[3] P. Budde, Support sets and Gleason parts, Michigan Math. J., **37**(1990), 367-383.

[4] L. Carleson, An interpolation problem for bounded analytic functions, Amer. J. Math., **80**(1958), 921-930.

[5] L. Carleson, Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem, Ann. of Math., **76**(1962), 547-559.

[6] S. -Y. Chang, A characterization of Douglas subalgebras, Acta Math., **137**(1976), 81-89.

[7] P. Duren, Theory of H^p Spaces, Academic Press, New York, 1970.

[8] T. W. Gamelin, Uniform algebras, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969.

[9] T. W. Gamelin, Wolff's proof of the corona theorem, Israel J. Math., **37**(1980), 113-119.

[10] J. Garnett, Bounded Analytic Functions, Academic Press, New York, 1981.

[11] J. Garnett and P. Jones, The corona theorem for Denjoy domains, Acta Math., **155**(1985), 27-40.

[12] J. Garnett and A. Nicolau, Interpolating Blaschke products generate H^∞, Pacific J. Math., **173**(1996), 501-510.

[13] P. Gorkin, T. Ishii and K. Izuchi, Trivial points in the maximal ideal space of H^∞ IV, preprint.

[14] P. Gorkin, K. Izuchi and R. Mortini, Bourgain algebras of Douglas algebras, Canad. J. Math., **44**(1992), 797-804.

[15] P. Gorkin, K. Izuchi and R. Mortini, Higher order hulls in H^∞ II, J. Funct. Anal., **177**(2000), 107-129.

[16] P. Gorkin, K. Izuchi and R. Mortini, Sequences separating fibers in the spectrum of H^∞, preprint.

[17] P. Gorkin, H. -M. Lingenberg and R. Mortini, Homeomorphic disks in the spectrum of H^∞, Indiana Univ. Math. J., **39**(1990), 961-983.

[18] P. Gorkin and R. Mortini, Interpolating Blaschke products and factorization in Douglas algebras, Michigan Math. J., **38**(1991), 147-160.

[19] P. Gorkin and R. Mortini, Alling's conjecture on closed prime ideals in H^∞, J. Funct. Anal., **148**(1997), 185-190.

[20] P. Gorkin and R. Mortini, Division theorems and the Shilov property of $H^\infty + C$, Pacific J. Math., **189**(1999), 279-292.

[21] P. Gorkin and R. Mortini, Synthesis sets for $H^\infty + C$, Indiana Univ. Math. J., **49**(2000), 287-309.

[22] P. Gorkin, R. Mortini and A. Nicolau, The generalized corona theorem, Math. Ann., **301**(1995), 135-154.

[23] C. Guillory and D. Sarason, Division in $H^\infty + C$, Michigan Math. J., **28**(1981), 173-181.

[24] K. Hoffman, Banach Spaces of Analytic Functions, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.

[25] K. Hoffman, Bounded analytic functions and Gleason parts, Ann. of Math., **86**(1967), 74-111.

[26] T. Hosokawa, K. Izuchi and D. Zheng, Isolated

points and essential components of composition operators on H^∞, Proc. Amer. Math. Soc., to appear.

[27] T. Ishii and K. Izuchi, Trivial points in the maximal ideal space of H^∞, Houston J. Math., **25**(1999), 67-77.

[28] T. Ishii and K. Izuchi, Trivial points in the maximal ideal space of H^∞ II, Archiv der Math., **77**(2001), 407-414.

[29] K. Izuchi, A geometrical characterization of singly generated Douglas algebras, Proc. Amer. Math. Soc., **97**(1986), 410-412.

[30] K. Izuchi, QC-level sets and quotients of Douglas algebras, J. Funct. Anal., **65**(1986), 293-308.

[31] K. Izuchi, Countably generated Douglas algebras, Trans. Amer. Math. Soc., **299**(1987), 171-192.

[32] K. Izuchi, Interpolating sequences in the maximal ideal space of H^∞ II, Op. Theory Adv. Appl., **59**(1992), 221-233.

[33] K. Izuchi, Bourgain algebras of the disk, polydisk, and ball algebras, Duke Math. J., **66**(1992), 503-519.

[34] K. Izuchi, Factorization of Blaschke products, Michigan Math. J., **40**(1993), 53-75.

[35] K. Izuchi, Interpolating Blaschke products and factorization theorems, J. London Math. Soc., **50**(1994), 547-567.

[36] K. Izuchi, A sequential type Korovkin theorem on L^∞ for QC-test functions, Proc. Amer. Math. Soc., **125**(1997), 1153-1159.

[37] K. Izuchi, Weak infinite powers of Blaschke products, J. Anal. Math., **75**(1998), 135-154.

[38] K. Izuchi, Spreading Blaschke products and homeomorphic parts, Complex Variables, **40**(2000), 359-369.

[39] K. Izuchi, Singular inner functions of L^1-type II, J. Math. Soc. Japan, **53**(2001), 285-305.

[40] K. Izuchi, Trivial points in the maximal ideal space of H^∞ III, Houston J. Math., to appear.

[41] K. Izuchi, Weak infinite products of Blaschke products, Proc. Amer. Math. Soc., **129**(2001), 3611-3618.

[42] K. Izuchi, On ideals in H^∞ whose closures are interesections of maximal ideals, Michigan Math. J., to appear.

[43] K. Izuchi, K-hulls of QC-level sets, Indiana Univ. Math. J., to appear.

[44] K. Izuchi, Common zero sets of equivalent singular inner functions, preprint.

[45] K. Izuchi, Outer and inner vanishing measures and division in $H^\infty + C$, Revista Mat. Iberoamericana, to appear.

[46] K. Izuchi and Y. Izuchi, Inner functions and division in Douglas algebras, Michigan Math. J., **33**(1986), 435-443.

[47] K. Izuchi and N. Niwa, Singular inner functions of L^1-type, J. Korea Math. Soc., **36**(1999), 787-811.

[48] P. Jones, Ratios of interpolating Blaschke products, Pacific J. Math., **95**(1981), 311-321.

[49] B. MacCluer, S. Ohno and R. Zhao, Topological structure of the space of composition operators on H^∞, Integral Eq. Op. Th., **40**(2000), 481-494.

[50] D. Marshall, Blaschke products generate H^∞, Bull. Amer. Math. Soc., **82**(1976), 494-496.

[51] D. Marshall, Subalgebras of L^∞ containing H^∞, Acta Math., **137**(1976), 91-98.

[52] R. Mortini, Interpolating sequences in the spectrum of H^∞, I, Proc. Amer. Math. Soc., **128**(2000), 1703-1710.

[53] D. Suárez, Trivial Gleason parts and the topological stable rank of H^∞, Amer. J. Math., **118**(1996), 879-904.

[54] D. Suárez, Maximal Gleason parts for H^∞, Michigan Math. J., **45**(1998), 55-72.

[55] D. Suárez, Homeomorphic analytic maps into the maximal ideal space of H^∞, Canad. J. Math., **51**(1999), 147-163.

[56] D. Sarason, Functions of vanishing mean oscillation, Trans. Amer. Math. Soc., **207**(1975), 391-405.

[57] S. Treil, Estimates in the corona theorem and ideals of H^∞: A problem of T. Wolff, preprint.

[58] T. Wolff, Two algebras of bounded functions, Duke Math. J., **49**(1982), 321-328.

[59] D. Xia and D. Zheng, Products of Hankel operators, Integral Eq. Op. Th., **29**(1997), 339-363.

(2001 年 5 月 31 日提出)

(いずち けいじ・新潟大学理学部)