用いた.

2) 文献データの英訳：C. H. Gu, H. S. Hu and Z. X. Zhou, Darboux Transformations in Soliton Theory and its Geometric Applications (中国語), Modern Mathematics Series, Shanghai Scientific and Technical Publishers, 1999.

文 献

[1] F. E. Burstall, Isothermic surfaces: Conformal geometry, Clifford algebras, and integrable systems, Integrable Systems, Geom. Topol., International Press, to appear (math.DG/0003096 で入手可).

[2] G. Darboux, Sur une proposition relative aux équations linéaires, C. R. Acad. Sci. Paris, **94** (1882), 1456–1459.

[3] G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, II, III, IV, Gauthiers-Villars, Paris, 1889, 1894, 1896.

[4] 谷超豪・胡和生・周子翔, 孤立子理論中的達布変換及其幾何応用, 上海科学技術出版社, 1999. (中国語)[2].

[5] S. P. Kobayashi and J. Inoguchi, Characterizations of Bianchi–Bäcklund transformations of constant mean curvature surfaces, Internat. J. Math., **16**, no. 2 (2005), 1–10.

[6] V. B. Matveev and M. A. Salle, Darboux Transformations and Solitons, Springer, 1991.

[7] 西成活裕・佐々成正, ソリトン方程式の数値計算, In: 可積分系の応用数理, (中村佳正 編), 裳華房, 2000, pp. 54–93.

[8] 野水克巳・佐々木武, アファイン微分幾何学―アファインはめ込みの幾何―, 裳華房, 1994.

(2004 年 12 月 8 日提出)

(いのぐち じゅんいち・宇都宮大学教育学部)

荒川恒男・伊吹山知義・金子昌信：ベルヌーイ数とゼータ関数，

牧野書店，2001 年，ix+244 ページ

秋 山 茂 樹

整数論は裾野の広い分野で，大河の流れのような歴史的側面を持つとともに，いわば私小説的な側面を持っている．数論においては，研究の動機は明示してもよいが，必ず示さなければならないものではない．では散逸的な興味の集まりかといえば，そうではない．何が数論という分野を一括りにしているのだろうか．私は数そのものへの好奇心ではないかと思う．

途中にいかに複雑な思考過程や高度な技法を用いたとしても，整数論の面白さと最後には具体的な数の面白さに帰着する．ベルヌーイ数という数論史の中でも極めて重要な位置を占める数を主題として書かれたこの本はそのことを如実に証明している．3 人の筆者は，ゼータ関数と保型形式の専門家であるが，この本で驚くほど多様な角度から読者に語りかけているのは，結局は数の面白さと不思議さである．

最初に紹介されるようにベルヌーイ数は，冪和 $\sum_{a=1}^{m} a^k$ を記述するために使われる有理数 B_n で関孝和 (1712) と Jakob Bernoulli (1713) がほぼ同時に書物を著している．母関数を用いれば

$$\frac{ze^z}{e^z-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \tag{1}$$

の係数 B_n として定義され最初に数項は

$$B_0 = 1,\ B_1 = \frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = 0,\ B_6 = \frac{1}{42},\ \cdots$$

となる．当時の状況を考えれば，関と Bernoulli がほぼ同時期に発見したものと思われる．おそらく著者間の議論を経て‘この本では慣例に従ってベルヌーイ数と呼ぶ’と妥協することになったのだろうが，関–ベルヌーイ数という呼称を提唱するよい機会だったかもしれない．いずれにせよ歴史を大事に

する姿勢はこの本の特徴であり，各所に挿入される数学者の生い立ちの詳しいエピソードは読み物として特段の面白さを与えている．

前半の5章までは，ベルヌーイ数に関して一般によく知られた事実がまとめて取り扱われている．記述には細心の注意と独自の観点が貫かれておりベルヌーイ数の様々な定義，スターリング数の二項係数と似た記法の優位性などとても勉強になる．B_n の定義は様々あるが，現在では $B_1 = 1/2$ となる定義はもしかすると少数派かもしれない．しかし，この点では筆者は妥協しなかった．歴史との整合性と様々な周辺の公式を熟慮した結果である．例えば5章ではオイラーマクローリンの公式でリーマンゼータ関数 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ を解析接続し負の整数点で

$$\zeta(1-m) = -\frac{B_m}{m} \quad m = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

となることが復習されているが，ここでも $B_1 = 1/2$ のほうが一貫性がある．あまり考えずに $B_1 = -1/2$ という定義で論文を書いたこともあるのだが以降改めようと思う．

ベルヌーイ数を拡張する方向性は幾つかある．(2) を一般のゼータ関数に取り替えるという考え方が有意義であることは歴史的に証明済みである．リーマンのゼータ関数を原始的指標 χ のディリクレ L 関数 $L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}$ に取り替えると右辺には一般化ベルヌーイ数が現れる：

$$L(1-m,\chi) = -\frac{B_{m,\chi}}{m} \quad m = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

$B_{m,\chi}$ は B_m の母関数表示 (1) を χ でひねったもので定義され冪和 $\sum_{a=1}^{m} \chi(a) a^k$ の公式にも現れる．4章では $B_{m,\chi}$ の基本性質，9章では (3) と $L(s,\chi)$ の関数等式をコンタワー積分によりフルビッツゼータの関数等式から導く詳しい証明がある．

多くの本で省略したり大雑把な証明になっている部分をしっかり書いておくという姿勢がこの本で一貫してとられている．類似を省略することはままあるが，逆に類似であってもしっかり細部を書いてみると異なる味わいがあったり別発見があったりというのも数学の見なれた光景である．また本書では意図的に通常の証明を避ける部分が多い．常に同じ道をたどる保守的傾向は脳のためによくないという説を聞いたことがあるが，この本の記述には常に頭脳は若くありたいという数学者の発想が随所に見られる．

さて (3) に加えて，よく知られているように $L(1,\chi)$ は二次体の類数で表示できる．$L(s,\chi)$ の $s \leftrightarrow 1-s$ の関数等式を通じて $L(0,\chi)$ に翻訳すれば，ベルヌーイ数と類数が結びつくことになる．特に虚二次体 K をとり，その整数環の1の冪根の個数を w とすると，K のクロネッカー指標 χ_K に対して

$$h(K) = -\frac{wB_{1,\chi_K}}{2} \tag{4}$$

がなりたつ．ここでも B_1 や $B_{1,\chi}$ の定義に対するこだわりはあってしかるべきなのである．この (4) の証明は6章，10章でなされるが，必ずしも初心向けではない．この部分は他の整数論の入門書を読んだ後，空隙を埋めるという位置づけであろう．特に，二次体の類数としてでなく，整環の固有イデアルと二次形式の対応を通じた二次形式の類数に関する詳細な記述があるが，他書では面倒なので避けられているところでもある．ここでも説明が面倒なことをきちんと書いてあるというのは文字通り有難いことである．さらにこの記述は10章でも触れられる伊吹山–齋藤両氏による対称行列のゼータ

関数に関する驚くべき等式群への道しるべとなる．

6 章以降，それぞれ独立性の高い様々な話題が，いろいろな切り口で語られる．ではバラバラかというとその印象はない．それぞれの章ごとにとても興味深い数や等式の世界が切り拓かれているからである．読者への挑戦のような記述があちこちに見られる．いくつか具体的に挙げてみよう．8 章では奇素数 p のルジャンドル偶指標 $(*/p)$ に対して

$$\sum_{(a,b,c)\in \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}:ab+bc+ca=0} \left(\frac{abc}{p}\right) abc = -\frac{2p^3}{4} B_{2,(*/p)}$$

という美しい式が証明されているが，奇指標の場合は予想だけしか存在しないとあり好奇心をくすぐる．また 13 章では，著者の一人で残念ながら 2003 年 10 月にご逝去された荒川氏により実無理数 α に対して導入された

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cot \pi n\alpha}{n^s}$$

のある種の不思議な保型性がバーンズの 2 重ゼータ関数から導かれることが書かれており，より一般のゼータでこの現象がどうなるのかと問いかけられる．14 章では金子氏の発案による多重ベルヌーイ数 $\boldsymbol{B}_n^{(k)}$ がポリログを用いて

$$\frac{Li_k(1-e^{-t})}{1-e^{-t}} = \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{B}_n^{(k)} \frac{t^n}{n!}$$

によって定義され様々な応用が示される．ここでも $\boldsymbol{B}_n^{(k)}$ の分子の数論的応用に対する期待が表明されている．このように問題の宝庫であるこの本に闘いを挑む人が現れることを期待したい．

ベルヌーイ数の拡張は多くあり，この本でもその中の幾つかが論じられている．私は 12 章の Hurwitz によるベルヌーイ数の拡張のフルビッツ数 H_n を恥ずかしながら全く知らなかった．これはベルヌーイ数を拡張するものでレムニスケート周期

$$\varpi = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

と $\varpi\sqrt{-1}$ を基本周期に持つ Weierstrass の $\mathscr{P}$ 関数を用いて，

$$\mathscr{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n H_n}{n} \frac{z^{n-2}}{(n-2)!}$$

で定義される有理数である．ガウス整数環上の冪和公式 ($\zeta(2) = \pi^2/6$ にあたるもの) や，フォンスタウトクラウセン型の公式などが示されておりとても興味深く思われる．

この本は数論に興味を持つ様々なレベルの人々にとって役に立つ好著である．これまでベルヌーイ数に関する出版された本や論文は膨大である．K. Dilcher の管理するデータベース [1] には 2004 年 10 月現在 1458 人の著者による 2911 ものタイトルがある．この本の意図は，そのような全体の動きの概観だけにはとどまらない．むしろ現在は公私の ‘私’ の中に位置づけられているような成長株を発掘し新たな光をあてようと意図されている．従ってベルヌーイ数に興味を持つ学生や一般の方にとって，インターネットで得られない貴重な情報に溢れている．(ネット情報は所詮最大公約数だ.) 学部

学生のセミナーで用いることも考えられるし，大学院生や専門家が問題を探すこともできる．通俗とは一線を劃し，数をめぐってここまでこだわる数論研究者の強い印象を読者に与えるであろう．

文　　献

[1] K. Dilcher, L. Skula and I. Sh. Slavutskii, Bernoulli numbers. Bibliography (1713–1990), Queen's Papers in Pure and Appl. Math., No. 87, Kingston, Ontario, 1991, http://www.mscs.dal.ca/~dilcher/bernoulli.html

(2004 年 12 月 29 日提出)
(あきやま　しげき・新潟大学理学部)

T. Kaczynski, K. Mischaikow and M. Mrozek: Computational Homology,

Appl. Math. Sci., 157, Springer, 2004 年，480 ページ．

平　岡　裕　章
坂　上　貴　之

1　序

ホモロジー群はポアンカレによって 19 世紀末に導入された概念であり，代数的トポロジーという数学における一大分野の基礎となったものである．現代数学において重要な位置を占めるこの分野には当然のことながら数多くの良書があるが，本書はそのような状況においても全く新しい視点からのホモロジー理論の解説書となっている．すなわち，本書の狙いは計算機を用いた '計算ホモロジー理論' を構築することにあり，その理論・実装，及び幅広い応用までが丁寧に解説されている．

本文中にも述べてあるように，本書は読者を数学者に限定しておらず，広く科学に携わる研究者に向けて計算機を通したホモロジー理論を展開している．更に，これまでの著者等の研究を基にしたホモロジー群の他分野への応用についての詳細な解説も含んでいる．具体的には，ホモロジー群を用いた計算機援用証明，画像処理，パターン認識問題への適用など多岐にわたる．また，この本に基づいて作成されたプログラム群パッケージ CHomP (Computational Homology Program) がインターネット上で配布されており (http://www.math.gatech.edu/~chom/ から取得可能)，計算機を用いて手軽にホモロジー群の計算ができるようになっていることは特筆すべき点である．

本書は大枠で 3 部構成となっている．第 1 部 (1 章～7 章) は，計算機を用いてホモロジー群を計算するために必要な理論の構築とその計算機への実装にあてられている．それを受けて第 2 部 (8 章～11 章) には計算ホモロジー理論の応用に関する様々な話題がまとめられている．第 3 部 (12 章～14 章) には本書を読み進めていく上で必要となる最低限度の集合・位相及び代数の基礎的事項が整理されており，適宜参照できるようになっている．以下，本書において本質的な箇所である第 1 部と第 2 部についてその内容を見ていこう．

2　計算ホモロジー理論

第 1 章においては，以後の議論で重要になる概念の入門的な解説が行われている．まず初めに，幾何学的な '穴' の構造を反映するホモロジー群の性質を利用した幾つかの応用例が考察されている．その後 $\boldsymbol{R}^2$ 上に対象を限定してホモロジー群を考察することにより，幾何学的な情報を代数的にどのように表現していくかについての基本的なアイデアを解説している．この部分は幅広い読者層を想定し，