混成 k 木集合，混成 $\bar{k}$ 木集合とその性質 (I)

仙石正和* 黒部貞一** 小川吉彦** 松本 正*

(昭和47年11月30日受理)

Hybrid k Trees, Hybrid $\bar{k}$ Trees and Their Some Properties (I)

Masakazu SENGOKU, Teiichi KUROBE, Yoshihiko OGAWA, Tadashi MATSUMOTO
Department of Electronic Engineering, Faculty of Engineering, Hokkaido University, Sapporo, Japan

(Received November 30, 1972)

Abstract

Topological formulas of the computation of network functions are expressed in terms of a set of trees, cotrees, k trees, co-k trees, k cotrees and co-k cotrees in the corresponding graph.

In this paper, "hybrid k trees" and "hydrid $\bar{k}$ trees" in a graph which are the generalized concepts of "k trees and co-k trees" and "k cotrees and co-k cotrees," respectively are defined. And relationships among hybrid trees, hydrid 2 trees, hybrid $\bar{2}$ trees, circuits, cutsets, paths and sub-cutsets in a graph are presented.

These results (using hybrid k trees and hybrid $\bar{k}$ trees) may be considered as a generalization and an extension of work using subgraphs such as trees, cotrees, k trees and co-k trees etc.

1. 緒　　言

グラフ理論の基本概念である木 (tree)，補木 (cotree) はそれぞれそのグラフの極大無閉路集合および極大無カットセット集合として定義される[1]。このように木と補木はそれぞれ閉路およびカットセットを用いて定義されるが，閉路，カットセット両方の概念を用いて定義される新たな概念が考えられる。すなわちグラフ G の枝集合 E を2分割し，$E=E_y \cup E_z$, $E_y \cap E_z=\phi$ とする。$E_z=\varepsilon_z \cup \bar{\varepsilon}_z$, $\varepsilon_z \cap \bar{\varepsilon}_z=\phi$ とし，ε_z, $\bar{\varepsilon}_z$ はそれぞれ G のカットセット，閉路を含まぬものとする。ε_z を開放除去，$\bar{\varepsilon}_z$ を短絡除去してできるグラフ G_y は E_y の枝からなっており，そのグラフにおいて $E_y=\varepsilon_y \cup \bar{\varepsilon}_y$, $\varepsilon_y \cap \bar{\varepsilon}_y=\phi$ とし，ε_y, $\bar{\varepsilon}_y$ をそれぞれ G_y の閉路，カットセットを含まぬようにしたとき，$\varepsilon_y \cup \varepsilon_z$ を G の E_y に関する混成木 (hybrid tree) と呼ぶ。このように定義された混成木は $E_z=\phi$, $E_y \neq \phi$ のとき木と一致し，$E_y=\phi$, $E_z \neq \phi$ のとき，補木と一致することから混成木は木，補木の一般化概念であることがわかる。

一方，回路関数の位相幾何学的公式が木集合，k 木集合等によって表わされることから，従来木集合，k 木集合および補木集合，補 k 木集合の性質が調べられてきた。S. L. Hakimi[2] は木集合と道から k 木集合を求める方法を導き，W. K. Chen, S. L. Mark[3] は木集合，k 木集合の他に補木集合，補 k 木集合も取り入れ，それらとグラフのカットセット，閉路との関係を明らか

* 電子工学科 電波伝送工学講座
** 〃 電子回路工学講座

にした。また，I. Berger, A. Nathan[4] はこれらの関係を "Wang 代数" を用いて表現した。*本論文は，新たに混成 k 木および混成 $\bar{k}$ 木を定義し従来の議論に対して補充および拡張をし統*一的理論を発展させることを目的とする。そのため本文 (I) では，混成 k 木および混成 k 木を定義し，従来の k 木，補 k 木，k 補木，補 k 補木との関係を述べ，混成木集合，混成 2 木集合，混成 2 木集合（2 端子回路網の回路関数がこれらの部分グラフの集合を用いて表現される）の性質（グラフの閉路，カットセット，道等との関係）について述べる。

2. 演算記号の定義

グラフの性質を表現する場合，言葉で説明できる場合と，言葉では表現できないかまたは非常に複雑になるという場合があるが，後者の場合数式によるいわゆる代数的表現が有効となる。このためここでは本文で用いる代数的表現のための演算記号の定義とその説明を行なう。

グラフ $G=(V, E)$ の部分グラフは簡単のために G の枝集合 E の部分集合として表現する。また，グラフ G の部分グラフを g_i としたとき，g_i は g_i に含まれる枝の積の形で表わすものとする。例えば，$g_i=\{e_1, e_3, e_6, e_7, e_{10}\}=\{e_1e_3e_6e_7e_{10}\}$ または単に $g_i=e_1e_3e_6e_7e_{10}$ とする。

グラフ G の部分グラフを g_i とし，A, B を G の部分グラフからなる集合とする。また e_i を G の一つの枝とする。このとき演算記号 $\times$，$*$，$\partial/\partial e_i$, $\int de_i$ を次のように定義する。

$$A\times B=\{g_i\cup g_j|g_i\in A, g_j\in B\} \tag{2-1}$$

$$A*B=\{g_i\oplus g_j|g_i\in A, g_j\in B\} \tag{2-2}$$

（$\oplus$ はリングサム）

$$\frac{\partial g_i}{\partial e_i}=\begin{cases} g_i\oplus e_i: e_i\in g_i \text{ のとき} \\ \phi: e_i\notin g_i \text{ のとき}\end{cases} \tag{2-3}$$

ただし，(2-2) の $g_i\oplus g_j$ の演算において，$g_i=g_j$ のとき $g_i\oplus g_j=\phi$ となるが，この ϕ も $A*B$ の要素となる。また，(2-3) において $g_i=\{e_i\}$ のとき，$\partial g_i/\partial e_i=\{\phi\}$ となり，ϕ とならないことに注意。

$$\frac{\partial A}{\partial e_i}=\left\{\frac{\partial g_i}{\partial e_i}\middle| g_i\in A\right\} \tag{2-4}$$

$$\int g_i de_i=\begin{cases} g_i\cup e_i: e_i\notin g_i \text{ のとき} \\ \phi: e_i\in g_i \text{ のとき}\end{cases} \tag{2-5}$$

$$\int A de_i=\left\{\int g_i de_i | g_i\in A\right\} \tag{2-6}$$

$g_i=e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_r}$ とすると，

$$\frac{\partial A}{\partial g_i}=\frac{\partial A}{\partial e_{i_1}}\oplus\frac{\partial A}{\partial e_{i_2}}\oplus\ldots\oplus\frac{\partial A}{\partial e_{i_r}} \tag{2-7}$$

$$\int A dg_i=\int A de_{i_1}\oplus\int A de_{i_2}\oplus\ldots\oplus\int A de_{i_r} \tag{2-8}$$

また，$\dfrac{\partial^2 A}{\partial g_1\partial g_2}$，$\int dg_1\int A dg_2$ はそれぞれ $\dfrac{\partial}{\partial g_1}\left(\dfrac{\partial A}{\partial g_2}\right)$，$\int\left(\int A dg_2\right)dg_1$ を示すものとする。

これらの演算には次の性質がある。

$$\frac{\partial A\oplus B}{\partial g_i}=\frac{\partial A}{\partial g_i}\oplus\frac{\partial B}{\partial g_i} \tag{2-9}$$

$$\int(A\oplus B)dg_i=\int A dg_i\oplus\int B dg_i \tag{2-10}$$

A の中に B に含まれる枝を含まないとき

$$\frac{\partial A\times B}{\partial g_i}=A\times\frac{\partial B}{\partial g_i}\cup B\times\frac{\partial A}{\partial g_i} \tag{2-11}$$

$$\frac{\partial A*B}{\partial g_i}=A*\frac{\partial B}{\partial g_i}\cup B*\frac{\partial A}{\partial g_i} \tag{2-12}$$

となる。特に A の要素に g_i に含まれる枝を含まぬとき，

$$\frac{\partial A\times B}{\partial g_i}=A\times\frac{\partial B}{\partial g_i} \tag{2-11$'$}$$

$$\frac{\partial A*B}{\partial g_i}=A*\frac{\partial B}{\partial g_i}, \tag{2-12$'$}$$

$$\int A\times Bdg_i=A\times\int Bdg_i \tag{2-13}$$

$$\int A*Bdg_i=A*\int Bdg_i \tag{2-14}$$

が成立する。

つぎに，実際の演算記号の使用例をあげる。

[例題 2-1]

$A=\{e_1e_2, e_5e_7\}$，$B=\{e_3e_6, e_3e_6e_8, e_4\}$ のとき，$A\times B=\{e_1e_2, e_5e_7\}\times\{e_3e_6, e_3e_6e_8, e_4\}=\{e_1e_2e_3e_6, e_5e_7e_3e_6, e_1e_2e_3e_6e_8, e_5e_7e_3e_6e_8, e_1e_2e_4, e_5e_7e_4\}$，$C=\{e_3, e_1e_2, e_5e_7e_8\}$ のとき，$A*C=\{e_1e_2, e_5e_7\}*\{e_3, e_1e_2, e_5e_7e_8\}=\{e_1e_2e_3, e_5e_7e_3, \phi, e_5e_7e_1e_2, e_1e_2e_5e_7e_8, e_8\}$。

$$\frac{\partial B}{\partial e_3}=\frac{\partial\{e_3e_6, e_3e_6e_8, e_4\}}{\partial e_3}=\{e_6, e_6e_8\}$$

$$\int Bde_3=\int\{e_3e_6, e_3e_6e_8, e_4\}de_3=\{e_3e_4\}$$

$g_i=e_3e_4$ とすると

$$\frac{\partial B}{\partial g_i}=\frac{\partial\{e_3e_6, e_3e_6e_8, e_4\}}{\partial e_3e_4}=\{e_3, e_6e_8\}\oplus\{\phi\}=\{e_3, e_6e_8, \phi\}$$

$$\int Bdg_i=\int\{e_3e_6, e_3e_6e_8, e_4\}de_3e_4=\{e_3e_4\}\oplus\{e_3e_6e_4, e_3e_6e_8e_4\}=\{e_3e_4, e_3e_6e_4, e_3e_6e_8e_4\}$$

(例題終)

3. 混成 k 木と混成 $\bar{k}$ 木の定義

取扱うグラフを $G=(V, E)$ として，$V=\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$，$E=\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_m\}$ とする。すなわち各々の節点，枝は名札付けられており (labeled graph)，各々の節点，枝は区別できるグラフとする。またグラフ G は無向とし，連結グラフのみを考える。というのは得られる結果は同様に非連結グラフにも拡張できるからである。

グラフ G の枝集合 E を二つの部分 E_y, E_z に分割し，$E=E_y\cup E_z$，$E_y\cap E_z=\phi$ とし，分割 (E_y, E_z) を固定して考える。

[定義] 混成 k 木：節点集合 V の k 個の互に素な部分集合を $V_1, V_2, \ldots, V_k$ とし，グラフ G の部分グラフ h_k を考え，$h_k=\alpha_y\cup\alpha_z$，$\alpha_y\cap\alpha_z=\phi$，$\alpha_y\subset E_y$，$\alpha_z\subset E_z$，$\bar{\alpha}_z=E_z-\alpha_z$ とする。$\alpha_y\cup\bar{\alpha}_z$ が閉路を含まず，$\rho-k+1$ 個 (ρ：G の階数) の枝を含み，任意の i, j $(1\leq i, j\leq k, i\neq j)$ に対して $v_1\in V_i$, $v_2\in V_j$ のとき v_1, v_2 間に道がなく，$v_1\in V_i$ $v_2\in V_i$ のとき v_1, v_2 間に一つの道が存在するとき，h_k を V の k 個の部分集合 $V_1, V_2, \ldots, V_k$ に関する混成 k 木という。(定義終)

このような h_k のすべての集まりを混成 k 木集合とよび記号 $HT_{V_1,V_2,\dots,V_k}$ で表わす。特に $E_z=\phi$, $E_y=\phi$ の場合それぞれ h_k を k 木，補 k 木とよび混成 k 木集合 $HT_{V_1,V_2,\dots,V_k}$ はそれぞれ k 木集合 $T_{V_1,V_2,\dots,V_k}$, 補 k 木集合 $CT_{V_1,V_2,\dots,V_k}$ と表現することにする。定義から $E_z=\phi$, $E_y=\phi$ の場合の k 木，補 k 木は従来の定義と一致することがわかる。また混成 k 木集合 $HT_{V_1,V_2,\dots,V_k}$ と k 木集合 $T_{V_1,V_2,\dots,V_k}$, 補 k 木集合 $CT_{V_1,V_2,\dots,V_k}$ とは次の関係で結ばれていることがわかる。

$$T_{V_1,V_2,\dots,V_k}=\{t_k \mid t_k=h_k \oplus E_z,\ h_k\in HT_{V_1,V_2,\dots,V_k}\} \tag{3-1}$$

$$CT_{V_1,V_2,\dots,V_k}=\{\bar{t}_k \mid \bar{t}_k=h_k \oplus E_y,\ h_k\in HT_{V_1,V_2,\dots,V_k}\} \tag{3-2}$$

さて，混成 k 木の定義から $\alpha_y\cup\bar{\alpha}_z$ は k 個の成分（連結成分）からなっている。そのためこれに $k-1$ 個の枝を加えて一つの木を作ることができる。この加える枝を $\delta=\{e_{y_1}e_{y_2}\dots e_{y_i}e_{z_{i+1}}\dots e_{z_{k-1}}\}$ とし $\delta=\delta_y\cup\delta_z$, $\delta_y\subset E_y$, $\delta_z\subset E_z$, $\delta_y=\{e_{y_1}e_{y_2}\dots e_{y_i}\}$, $\delta_z=\{e_{z_{i+1}}\dots e_{z_{k-1}}\}$ とすると，h_k に δ_y を加え δ_z を除いてできる部分グラフ（結果的には $\delta_y\not\subset h_k$, $\delta_z\subset h_k$ であるので $(h_k\oplus\delta)$ として求まる部分グラフ）は一つの混成木となっている。ここで δ の要素は V_i, V_j ($i\neq j$, $1\leq i$, $j\leq k$) の節点間を結ぶ道を作る枝であることに注意する必要がある。このような混成 k 木に対して，G の部分グラフ h^k を考え，$k-1$ 個の枝を $\gamma=\{e_{y_1}e_{y_2}\dots e_{y_i}e_{z_{i+1}}\dots e_{z_{k-1}}\}$, $\gamma=\gamma_y\cup\gamma_z$, $\gamma_y\subset E_y$, $\gamma_z\subset E_z$, $\gamma_y=\{e_{y_1}e_{y_2}\dots e_{y_i}\}$, $\gamma_z=\{e_{z_{i+1}}\dots e_{z_{k-1}}\}$ とするとき，h^k に γ_z を加え γ_y を除いてできる部分グラフが一つの混成木とるようなものを考える。

［定義］ 混成 k 木：$Y_2, Y_3, \dots, Y_k$ はそれぞれ節点対の集合でその要素の節点対を両端点とする枝が存在するものとし，自己閉路，並列枝の場合は枝の番号を節点対にサフィックスとし付けるものとする。$\{Y_2, Y_3, \dots, Y_k\}$ のそれぞれの Y_i $(2\leq i\leq k)$ に対して枝 $e_i=(v_i, v_i')$, $(v_i, v_i')\in Y_i$ を選びその集合を $\gamma=\{e_2e_3\dots e_k\}$, $e_i\neq e_j$ $(2\leq i,\ j\leq k)$ とする。ただし γ の中に G のカットセットを含まないように選ぶものとする。$\gamma=\gamma_y\cup\gamma_z$, $\gamma_y\cap\gamma_z=\phi$, $\gamma_y\subset E_y$, $\gamma_z\subset E_z$ とし，グラフ G の部分グラフ h^k から γ_y を取り去り，γ_z を加える操作を行なったとき（結果として $\gamma_y\subset h^k$, $\gamma_z\not\subset h^k$ でなければならないため $(h^k\oplus\gamma)$ の操作となる）得られる部分グラフが混成木となっている場合，h^k を $Y_2, Y_3, \dots, Y_k$ に関する混成 $\bar{k}$ 木という。（定義終）

グラフ G のこのような部分グラフ h^k の集合を混成 $\bar{k}$ 木集合とよび記号 $HT^{Y_2,Y_3,\dots,Y_k}$ で表わす。$h^k=\beta_y\cup\beta_z$, $\beta_y\cup\beta_z=\phi$, $\beta_y\subset E_y$, $\beta_z\subset E_z$, $\bar{\beta}_z=E_z-\beta_z$ とするとき，$\beta_y\cup\bar{\beta}_z$ から $k-1$ 個の枝 γ を取り除いた部分グラフは G の木となっている。（注意：ある部分グラフに“枝を加える，”“枝を取り除く（取り去る）”という言葉はそれぞれ“その部分グラフに含まれていなかった枝をある節点間に接続する（復帰させる），”“その部分グラフに含まれている枝を開放除去する”という意味である）また，$E_y=\phi$ および $E_z=\phi$ のときそれぞれ混成 $\bar{k}$ 木 h^k は k 補木および補 $\bar{k}$ 補木に一致することに注意すべきである。なお，便宜上節点対集合 Y_i は単に節点の列で表現し，左から二つずつの節点対を表わすものとする。例えば，$Y_i=\{v_1v_3v_{5_7}v_{5_7}v_7v_9v_{9_3}v_{10_3}\}$ は左から (v_1v_3), $(v_{5_7}v_{5_7})$, (v_7v_9), $(v_{9_3}v_{10_3})$, の節点対を表わしており，$e_7=(v_{5_7}, v_{5_7})$ は自己閉路，$e_3=(v_{9_3}, v_{10_3})$ は並列枝である。

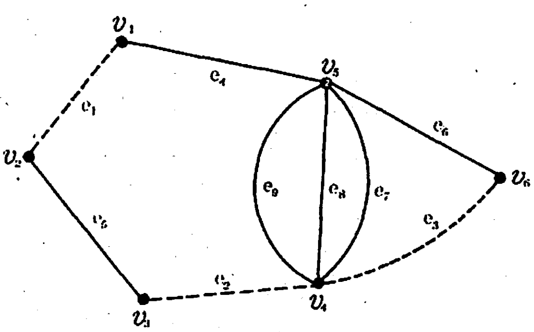


図3-1　混成グラフ
Fig. 3-1　A hybrid graph

つぎに図 3-1 のグラフで混成 k 木、混成 $\bar{k}$ 木

の説明をする。

図 3-1 のグラフ $G=(V, E)$ において，

$$E=\{e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8e_9\}$$
$$E_y=\{e_4e_5e_6e_7e_8e_9\}$$
$$E_z=\{e_1e_2e_3\}$$
$$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

とすると混成木集合 HT は

$$\begin{aligned}HT=\{&e_1e_3e_4e_5e_6e_7,\ e_1e_3e_4e_5e_6e_8,\ e_1e_3e_4e_5e_6e_9,\ e_2e_3e_4e_5e_6e_7,\ e_2e_3e_4e_5e_6e_8,\\ &e_2e_3e_4e_5e_6e_9,\ e_1e_4e_5e_7,\ e_1e_4e_5e_8,\ e_1e_4e_5e_9,\ e_1e_4e_5e_6,\ e_2e_4e_5e_6,\ e_2e_4e_5e_7,\\ &e_2e_4e_5e_8,\ e_2e_4e_5e_9,\ e_3e_4e_5e_6,\ e_3e_4e_6e_7,\ e_3e_4e_6e_8,\ e_3e_4e_6e_9,\ e_3e_5e_6e_7,\\ &e_3e_5e_6e_8,\ e_3e_5e_6e_9,\ e_4e_5,\ e_4e_6,\ e_4e_7,\ e_4e_8,\ e_4e_9,\ e_5e_6,\ e_5e_7,\ e_5e_8,\ e_5e_9,\}\end{aligned}$$

となる。

部分グラフ $h_2=\{e_1e_5e_6\}$ を考えると，$\alpha_y=\{e_5e_6\}$，$\alpha_z=\{e_1\}$，$\bar{\alpha}_z=\{e_2e_3\}$，$\alpha_y\bigcup\bar{\alpha}_z=\{e_2e_3e_5e_6\}$ となる。$\alpha_y\bigcup\bar{\alpha}_z$ は 4 個 $(4=\rho-k+1=5-2+1)$ の枝からなり閉路を含まず v_5, v_6 間に道があり，v_5v_6 と v_1 間に道がないので $h_2\in HT_{v_1,v_5v_6}$ とみなすことができる。

部分グラフ $h^2=\{e_4e_5e_6\}$ を考える。$\gamma=\{e_1\}$ とし，$\gamma_y=\phi, \gamma_z=\{e_1\}$ とすると $h^2\bigcup\gamma_z=\{e_1e_4e_5e_6\}$ は混成木集合 HT に含まれる。つまり $e_1=(v_1, v_2)$ であるから $h_2\in HT^{v_1v_2}$ となる。また $\gamma=\{e_5\}$ として $\gamma_y=\{e_5\}, \gamma_z=\phi, h^2-\gamma_y=\{e_4e_6\}$ とすると，$\{e_4e_6\}\in HT$ となる。このことから h^2 は $\gamma=\{e_1\}$ としても $\gamma=\{e_5\}$ としても混成 $\bar{2}$ 木となるので $h^2\in HT^{v_1v_2v_2v_3}$ とみることができる。つぎに混成 3 木集合，混成 $\bar{4}$ 木集合の例をあげる。

$$HT_{v_1v_2v_3,v_4,v_5}=\{e_2e_3e_5e_6,\ e_2e_5\}$$
$$HT^{v_1v_2v_2v_3,v_5v_6,v_{4_7}v_{5_7}}=\{e_4e_5e_6e_7e_8,\ e_4e_5e_6e_7e_9\}$$

混成 $\bar{4}$ 木集合 $HT^{v_1v_2v_3v_3,v_5v_6,v_{4_7}v_{5_7}}$ では $\gamma=\{e_1e_6e_7\}, \gamma=\{e_5e_6e_7\}$ として（いずれもグラフ G のカットセットを含んでいない）考えると理解できるであろう。（注意：混成 1 木集合，混成 $\bar{1}$ 木集合は混成木集合と一致する）

4. 混成木集合，混成 2 木集合，混成 $\bar{2}$ 木集合とカットセット，閉路，道との関係

混成 k 木と混成 $\bar{k}$ 木の性質を調べるためにまず混成 2 木と混成 $\bar{2}$ 木の性質を調べる必要がある。ここでは混成木集合とカットセット，閉路，道等から混成 2 木集合，混成 $\bar{2}$ 木集合を求めることを中心にこれらの間の関係を 2. で定義した演算記号を用いて表現することにする。

[補題 1][2)]　グラフ G の木集合を T，節点 v_1, v_1' 間の一つの道を $P_{11'}$ とすると

$$T_{v_1,v_1'}=\frac{\partial T}{\partial P_{11'}}$$

である。

(証明)　$T_{v_1,v_1'}$ の任意の 2 木を t_2 とする。t_2 は v_1 を含む成分と v_1' を含む成分の二つからできておりその二つの成分に分割するカットセット（唯一に決まる）を $Q_{11'}$ とする。$e_a\in P_{11'}$ とすると $e_a\in Q_{11'}$ かまたは $e_a\notin Q_{11'}$ である。$e_a\in Q_{11'}$ の場合，$\dfrac{\partial T}{\partial e_a}\ni t_2$ となり $P_{11'}$ と $Q_{11'}$ は奇数個の共通枝をもっているので $P_{11'}\bigcap Q_{11'}=\{e_1e_2\ldots e_j\}$（$j$：奇数）とすると，$t_2\in\dfrac{\partial T}{\partial(e_1e_2\ldots e_j)}$ となる。$e_a\notin Q_{11'}$，すなわち $a=j+1, j+2, \ldots$ の場合，$\dfrac{\partial T}{\partial e_a}$ の各要素は必ず $Q_{11'}$ の枝を含み，t_2 は $Q_{11'}$ の

枝を含んでいない。ゆえに，$t_2 \Subset \dfrac{\partial T}{\partial(e_{j+1}e_{j+2}\ldots)}$ となる。これらのことから $T_{v_1,v_1'} \subset \dfrac{\partial T}{\partial P_{11'}}$ となる。

つぎに，$T_{v_1,v_1'} \subset \dfrac{\partial T}{\partial P_{11'}}$ を証明する。T の任意の一つの要素を t とする。$e_a \in P_{11'}$ として，$e_a \in t$ で $\dfrac{\partial t}{\partial e_a} \Subset T_{v_1,v_1'}$ の場合を考える。$\dfrac{\partial t}{\partial e_a}$ に対するカットセット Q は仮定から v_1, v_1' を分離するものではない。そのため Q と $P_{11'}$ は偶数個の共通枝を持つことになる。$P_{11'} \cap Q = \{e_1e_2\ldots e_j\}$, ($j$: 偶数) とすると，$\dfrac{\partial t}{\partial e_a} \in \dfrac{\partial T}{\partial e_i}$, $(i=1, 2, \ldots, j)$ となる。ゆえに $\dfrac{\partial t}{\partial e_a} \Subset \dfrac{\partial T}{\partial(e_1e_2\ldots e_j)}$。$i=j+1, j+2, \ldots$ の場合 $e_i \Subset Q$, ところが $\dfrac{\partial t}{\partial e_a}$ は Q の枝を含まないので $\dfrac{\partial t}{\partial e_a} \Subset \dfrac{\partial T}{\partial(e_{j+1}e_{j+2}\ldots)}$ となる。ゆえに

$$\frac{\partial t}{\partial e_a} \Subset \frac{\partial T}{\partial(e_1e_2\ldots e_je_{j+1}\ldots)} = \frac{\partial T}{\partial P_{11'}}$$

このことから $\dfrac{\partial T}{\partial P_{11'}}$ で消えない要素は $T_{v_1,v_1'}$ の中に含まれることがわかる。つまり $T_{v_1v_1'} \subset \dfrac{\partial T}{\partial P_{11'}}$ でかつ，$T_{v_1,v_1'} \subset \dfrac{\partial T}{\partial P_{11'}}$ であることから，$T_{v_1,v_1'} = \dfrac{\partial T}{\partial P_{11'}}$。（証明終）

［補題 2］ 節点 v_1, v_1' を分離する一つのカットセットを $Q_{11'}$ とすると，

$$T = \int T_{v_1,v_1'} dQ_{11'}$$

である。

（証明） T の任意の一つの木を t とする。t の枝からなる v_1, v_1' 間の道を $P_{11'}$ とする。$e_a \in Q_{11'}$ とすると $e_a \in P_{11'}$ かまたは $e_a \Subset P_{11'}$ である。$e_a \in P_{11'}$ の場合，$t \in \int T_{v_1,v_1'} de_a$ となり，$Q_{11'} \cap P_{11'} = \{e_1e_2\ldots e_j\} = R$ とすると j は奇数であるので $\int T_{v_1,v_2} dR$ の演算内には t が奇数回現われて $t \in \int T_{v_1,v_2} dR$ となる。$e_a \in P_{11'}$ の場合，$\int T_{v_1,v_1'} de_a$ の要素には $P_{11'}$ の全枝を含んだものはない。しかし $P_{11'} \subset t$ であるので $t \Subset \int T_{v_1,v_1'} de_a$ となる。ゆえに任意の木 t は $\int T_{v_1,v_1'} dQ_{11'}$ に含まれる。つまり $T \subset \int T_{v_1,v_1'} dQ_{11'}$ となる。

つぎに $T \supset \int T_{v_1,v_1'} dQ_{11'}$ を証明する。$T_{v_1,v_1'}$ の任意の一つの要素を t_2 とし $e_a \in Q_{11'}$ とする。$e_a \in t_2$ のとき $\int t_2 de_a = \phi$ となる。もし $e_a \in t_2$ で $\int t_2 de_a \Subset T$ とすると，$\int t_2 de_a$ には一つの閉路 L を含むことになる。e_a は L に含まれるので $\int t_2 de_a$ から e_a を取り去ればこれは $T_{v_1,v_1'}$ に含まれる。つまり $\int T_{v_1,v_1'} de_a \ni \int t_2 de_a$ となる。しかし $L \cup Q_{11'} = \{e_1e_2\ldots e_j\} = R$ とし，$e_i (1 \leq i \leq j) \in R$ とすると $\int t_2 de_a \in \int T_{v_1,v_1'} de_i$ となる。ところが j は偶数であるので $\int t_2 de_a \Subset \int T_{v_1,v_1'} dR$ となる。$e_i \Subset L$ すなわち $i=j+1, j+2, \ldots$ の場合，$\int t_2 de_v$ は閉路 L を含むので $\int t_2 de_a \Subset \int T_{v_1,v_1'} d(e_{j+1}e_{j+2}\ldots)$ となる。すなわち $\int t_2 de_a \Subset \int T_{v_1,v_1'} d(e_1e_2\ldots e_je_{j+1}\ldots) = \int T_{v_1,v_1'} dQ_{11'}$ となり，$\int T_{v_1,v_1'} dQ_{11'}$ で消去されずに残る要素はすべて木となる。つまり $T \supset \int T_{v_1,v_1'} dQ_{11'}$。ゆえに $T = \int T_{v_1,v_1'} dQ_{11'}$。

（証明終）

［定理 1］ 節点 v_1, v_1' 間の一つの道を $P_{11'}$ とし，$P_{11'} = P_{y11'} \cup P_{z11'}$, $P_{y11'} \cap P_{z11'} = \phi$, $P_{y11'} \subset E_y$, $P_{z11'} \subset E_z$ とすると，

$$HT_{v_1,v_1'} = \frac{\partial HT}{\partial P_{y11'}} \oplus \int HT dP_{z11'}$$

（証明） 混成 k 木の定義から得られた関係 (3-1), (2-2) から，$HT_{v_1,v_1'} = E_z * T_{v_1,v_1'}$ と表わせる。ここで E_z は E_z の枝からなる部分グラフを示し枝の部分集合 E_z と同記号で用いている。補題 1 と (2-7) を用いて，

$$HT_{v_1,v_1'}=E_z*\frac{\partial T}{\partial P_{11'}}=E_z*\frac{\partial T}{\partial P_{y_{11'}}}\oplus E_z*\frac{\partial T}{\partial P_{z_{11'}}}$$

$P_{y_{11'}}\not\subset E_z$ であるから，(2–12)′ から，

$$E_z*\frac{\partial T}{\partial P_{y_{11'}}}=\frac{\partial E_z*T}{\partial P_{y_{11'}}}=\frac{\partial HT}{\partial P_{y_{11'}}}$$

(∵ 混成木の定義から $HT=E_z*T$)。また，$P_{z_{11'}}=e_1e_2\dots e_k$, $P_{z_{11'}}\subset E_z$ とすると，

$$E_z*\frac{\partial T}{\partial P_{z_{11'}}}=E_z*\left[\frac{\partial T}{\partial e_1}\oplus\frac{\partial T}{\partial e_2}\oplus\dots\oplus\frac{\partial T}{\partial e_k}\right]=E_z*\frac{\partial T}{\partial e_1}\oplus E_z*\frac{\partial T}{\partial e_2}\oplus\dots\oplus E_z*\frac{\partial T}{\partial e_k}$$

ところで，$e_i\in P_{z_{11'}}$ とすると $e_i\in E_z$ であるので，

$$E_z*\frac{\partial T}{\partial e_i}=\int E_z*T\,de_i=\int HT\,de_i$$

となる。この関係と (2–8) より，

$$E_z*\frac{\partial T}{\partial P_{z_{11'}}}=\int HT\,de_1\oplus\int HT\,de_2\oplus\dots\oplus\int HT\,de_k=\int HT\,de_1e_2\dots de_k=\int HT\,dP_{z_{11'}}$$

ゆえに，

$$HT_{v_1,v_1'}=\frac{\partial HT}{\partial P_{z_{11'}}}\oplus\int HT\,dP_{y_{11'}}$$

(証明終)

[定理 2]　節点 v_1, v_1' を分離するカットセットを $Q_{11'}$ とし，$Q_{11'}=Q_{y_{11'}}\cup Q_{z_{11'}}$, $Q_{y_{11'}}\cap Q_{z_{11'}}=\phi$, $Q_{y_{11'}}\subset E_y$, $Q_{z_{11'}}\subset E_z$ とすると，

$$HT=\frac{\partial HT_{v_1,v_1'}}{\partial Q_{z_{11'}}}\oplus\int HT_{v_1,v_1'}dQ_{y_{11'}}$$

(証明)　混成木の定義から $HT=E_z*T$, 補題 2 を用いると，

$$HT=E_z*T=E_z*\int T_{v_1,v_1'}dQ_{11'}=E_z*\int T_{v_1,v_1'}dQ_{z_{11'}}\oplus E_z*\int T_{v_1,v_1'}dQ_{y_{11'}}$$

$Q_{y_{11'}}\not\subset E_z$ であるので (2–14) から，

$$E_z*\int T_{v_1,v_1'}dQ_{y_{11'}}=\int E_z*T_{v_1,v_1'}dQ_{y_{11'}}=\int HT_{v_1,v_1'}dQ_{y_{11'}}$$

また，$Q_{z_{11'}}=e_1e_2\dots e_k$, $Q_{z_{11'}}\subset E_z$ とすると，

$$E_z*\int T_{v_1,v_1'}dQ_{z_{11'}}=E_z*\left[\int T_{v_1,v_{12}}de_1\oplus\int T_{v_1,v_1'}de_2\oplus\dots\oplus\int T_{v_1,v_1'}de_k\right]$$

$$=E_z*\int T_{v_1,v_1'}de_1\oplus E_z**\int T_{v_1,v_1'}de_2\oplus\dots\oplus E_z*\int T_{v_1,v_1'}de_k$$

ところで，$e_i\in P_{z_{11'}}$ とすると $e_i\in E_z$ であるので，

$$E_z*\int T_{v_1,v_1'}de_i=\frac{\partial E_z*T_{v_1,v_1'}}{\partial e_i}=\frac{\partial HT_{v_1,v_1'}}{\partial e_i}$$

この関係と (2–7) を用いて，

$$E_z*\int T_{v_1,v_1'}dQ_{z_{11'}}=\frac{\partial HT_{v_1,v_1'}}{\partial e_1}\oplus\frac{\partial HT_{v_1,v_1'}}{\partial e_2}\oplus\dots\oplus\frac{\partial HT_{v_1,v_1'}}{\partial e_k}=\frac{\partial HT_{v_1,v_1'}}{\partial e_1e_2\dots e_k}=\frac{\partial HT_{v_1,v_1'}}{\partial P_{z_{11'}}}$$

ゆえに

$$HT=\frac{\partial HT_{v_1,v_1'}}{\partial Q_{z_{11'}}}\oplus\int HT_{v_1,v_1'}dQ_{y_{11'}}$$

(証明終)

定理 1 を用いてつぎの定理を得る。

[定理 3]　グラフ G の一つの閉路を L_i とし，$L_i=L_{y_i}\cup L_{z_i}$, $L_{y_i}\cap L_{z_i}=\phi$, $L_{y_i}\subset E_y$, $L_{z_i}\subset E_z$

とするとき，

$$\frac{\partial HT}{\partial L_{y_i}}\oplus\int HTdL_{z_i}=\phi$$

（証明）　グラフ G の任意の一つの枝を $e_i=(v_1, v_1')$ とする。e_i を含む任意の一つの閉路 L_i を考えると (L_i-e_i) は v_1, v_1' 間の一つの道である。$(L_i-e_i)=P_{11'}$, $P_{11'}=P_{y11'}\cup P_{z11'}$, $P_{y11'}\cap P_{z11'}=\phi$, $P_{z11'}\subset E_y$, $P_{z11'}\subset E_z$ とすると，$e_i\in E_y$ のとき，

$$\frac{\partial HT}{\partial L_{y_i}}\oplus\int HTdL_{z_i}=\left(\frac{\partial HT}{\partial P_{z11'}}\oplus\int HTdP_{z11'}\right)\oplus\frac{\partial HT}{\partial e_i}$$

となり e_i も v_1, v_1' の一つの道であるので，定理1から，

$$\left(\frac{\partial HT}{\partial P_{y11'}}\oplus\int HTdP_{z11'}\right)\oplus\frac{\partial HT}{\partial e_i}=HT_{v_1,v_1'}\oplus HT_{v_1,v_1'}=\phi$$

となる。$e_i\in E_z$ のときも同様である。（証明終）

また，定理2からつぎの定理を得る。

［定理4］　グラフ G の一つのカットセットを Q_i とし $Q_i=Q_{y_i}\cup Q_{z_i}$, $Q_{y_i}\cap Q_{z_i}=\phi$, $Q_{y_i}\subset E_y$, $Q_{z_i}\subset E_z$ とするとき，

$$\frac{\partial HT}{\partial Q_{z_i}}\oplus\int HTdQ_{y_i}=\phi$$

（証明）　帰納法で証明する。$|Q_i|=1$ のとき，$Q_i=e_i$ は可分枝となり，$e_i\in E_y$ ならば e_i はすべての HT の要素に含まれる。ゆえに，$\int HTde_i=\phi$。また $e_i\in E_z$ ならば，e_i は HT のどの要素にも含まれない。ゆえに，$\frac{\partial HT}{\partial e_i}=\phi$。

$|Q_i=n-1$ まで成立したとする。$|Q_i|=n$ の場合，Q_i の中の一つの枝を e_i とする。$e_i\in E_y$ の場合，$HT=HT\binom{e_i}{0}\cup HT\binom{e_i}{1}$, $Q_{y_i}-e_i=q_{y_i}$ とすると，

$$\int HTde_i=\{e_i\}\times HT\binom{e_i}{0},$$

$$\frac{\partial HT}{\partial Q_{z_i}}\oplus\int HTdq_{y_i}=\frac{\partial HT\binom{e_i}{0}}{\partial Q_{z_i}}\oplus\int HT\binom{e_i}{0}dq_{y_i}\oplus\frac{\partial HT\binom{e_i}{1}}{\partial Q_{z_i}}\oplus\int HT\binom{e_i}{1}dq_{y_i}$$

となる。

ここで，$HT\binom{e_i}{0}$ は e_i を開放除去したグラフの混成木集合で，$Q_{z_i}\cup q_{y_i}$ はそのグラフの一つのカットセットである。また，$|Q_{z_i}\cup q_{y_i}|=n-1$ であるので仮定から，

$$\frac{\partial HT\binom{e_i}{0}}{\partial Q_{z_i}}\oplus\int HT\binom{e_i}{0}dq_{y_i}=\phi$$

また，$HT\binom{e_i}{1}=\{e_i\}\times HT_{v_1,v_1'}$, $(e_i=(v_i, v_i'))$ であるので，

$$\frac{\partial HT\binom{e_i}{1}}{\partial Q_{z_i}}\oplus\int HT\binom{e_i}{1}dq_{y_i}=\{e_i\}\times\left(\frac{\partial HT_{v_1,v_1'}}{\partial Q_{z_i}}\oplus\int HT_{v_1,v_1'}dq_{y_i}\right)=\{e_i\}\times HT\binom{e_i}{0}$$

（∵ 定理2から）

ゆえに，

$$\frac{\partial HT}{\partial Q_{z_i}}\oplus\int HTdQ_{y_i}=\left(\frac{\partial HT}{\partial Q_{z_i}}\oplus\int HTdq_{y_i}\right)\oplus\{e_i\}\times HT\binom{e_i}{0}\oplus\{e_i\}\times HT\binom{e_i}{0}=\phi$$

となる。

$e_i\in E_z$ の場合も同様に，

$$\frac{\partial HT}{\partial Q_{z_i}}\oplus\int HTdQ_{y_i}=\phi$$

となる。

この結果，$|Q_i|=n$ の場合も成立し定理は証明された。(証明終)

混成 $\bar{k}$ 木の定義から混成 $\bar{2}$ 木集合 $HT^{v_2v_2'}$ は次の補題のように求めることができる。

［補題 3］ $e_2=(v_2, v_2')$ とすると，

$$HT^{v_2v_2'}=\int HTde_2 \quad : e_2 \in E_y \text{ のとき}$$
$$=\frac{\partial HT}{\partial e_2} \quad : e_2 \in E_z \text{ のとき}$$

(補題終)

補題3では枝 $e_2=(v_2, v_2')$ を用いて混成 $\bar{2}$ 木集合が求められるが枝 e_2 を含む一つのカットセット $Q_{22'}$ を考え，$S_{22'}=(Q_{22'}-e_2)$ の枝からなる部分グラフを枝 e_2 に関する"**サブカットセット**"とよぶことにする（ただし，枝 e_2 が一つの節点になっている場合つまり v_2, v_2' が同一節点になっている場合 v_2, v_2' を分割してできたグラフの v_2, v_2' を分離するカットセットとする。これは特別な場合であって一つの節点中に仮想な枝（長さ0の枝）があると考えている）と，サブカットセット $S_{22'}$ を用いてつぎのように混成 $\bar{2}$ 木集合を求めることができる。

［定理 5］ 枝 $e_2=(v_2, v_2')$ に関する一つのサブカットセットを $S_{22'}$ とし，$S_{22'}=S_{y22'} \cup S_{z22'}$, $S_{y22'} \cap S_{z22'}=\phi$, $S_{y22'} \subset E_y$, $S_{z22'} \subset E_z$ とすると，

$$HT^{v_2v_2'}=\frac{\partial HT}{\partial S_{z22'}} \oplus \int HTdS_{y22'}$$

（証明） 定理4から v_2, v_2' を分離する一つのカットセットを $Q_{22'}$ とし，$Q_{22'}=Q_{y22'} \cup Q_{z22'}$, $Q_{y22'} \cap Q_{z22'}=\phi$, $Q_{y22'} \subset E_y$, $Q_{z22'} \subset E_z$ とすると，

$$\frac{\partial HT}{\partial Q_{z22'}} \oplus \int HTdQ_{y22'}=\phi$$

となる。

$e_2 \in E_y$ の場合。$S_{22'}=Q_{22'}-e_2$ であるので，

$$\left(\frac{\partial HT}{\partial S_{z22'}} \oplus \int HTdS_{y22'}\right) \oplus \int HTde_2=\phi$$

となる。

ゆえに，

$$\int HTde_2=\frac{\partial HT}{\partial S_{z22'}} \oplus \int HTdS_{y22'}$$

補題3から，

$$HT^{v_2v_2'}=\frac{\partial HT}{\partial S_{z22'}} \oplus \int HTdS_{y22'}$$

$e_2 \in E_z$ の場合も同様である。(証明終)

例を示す。

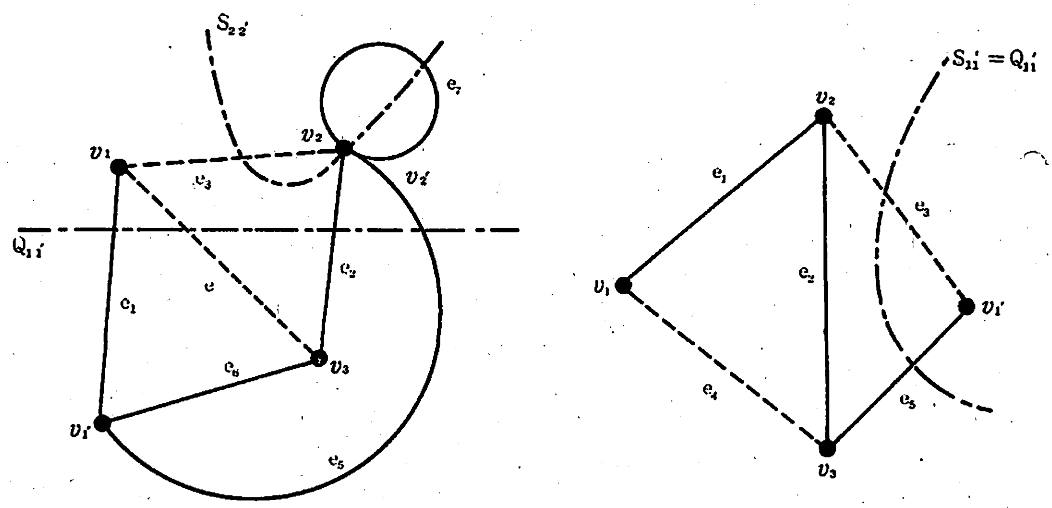
［例題 4-1］

(i) 図 4-1 の (a) のグラフを考えよう。

$$E=\{e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7\}$$
$$E_y=\{e_1e_2e_5e_6e_7\}, \quad E_z=\{e_3e_4\}$$

このグラフの混成木集合 HT は，

$$HT=\{e_1e_2e_3e_4e_5,\ e_1e_2e_3e_4e_6,\ e_1e_3e_4e_5e_6,\ e_1e_2e_3,\ e_1e_2e_4,\ e_1e_3e_5,$$
$$e_1e_4e_6,\ e_2e_3e_5,\ e_2e_3e_6,\ e_2e_4e_5,\ e_2e_4e_6,\ e_3e_5e_6,\ e_4e_5e_6,\ e_1,\ e_5,\ e_6\}$$



(a) (b)

図 4-1 例題 4-1 のグラフ
Fig. 4-1 A hybrid graph of example 4-1

$$Q_{11'}=\{e_1e_2e_4e_5\},\qquad S_{11'}=\{e_2e_4e_5\}$$
$$S_{y11'}=\{e_2e_5\},\qquad S_{z11'}=\{e_4\}$$

$$HT^{v_1v_1'}=\frac{\partial HT}{\partial e_4}\oplus\int HTde_2e_5$$
$$=\{e_1e_2e_3e_5,\ e_1e_2e_3e_6,\ e_1e_2e_4e_5,\ e_1e_2e_4e_6,\ e_1e_3e_5e_6,\ e_1e_4e_5e_6,\ e_1e_5,\ e_1e_6\}$$

これは明らかに $\int HTde_1$ と一致している。つぎに，$S_{22'}=\{e_3e_7\}$，$S_{y22'}=\{e_7\}$，$S_{z22'}=\{e_3\}$ とすると，これは仮想の枝 $e_t=(v_2, v_2')$ に関するサブカットセットである。$HT^{v_2v_2'}$ はつぎのように求まる。

$$HT^{v_2v_2'}=\frac{\partial HT}{\partial e_3}\oplus\int HTde_7$$
$$=\{e_1e_2e_3e_4e_5e_7,\ e_1e_2e_3e_4e_6e_7,\ e_1e_3e_4e_5e_6e_7,\ e_1e_2e_3e_7,\ e_1e_2e_4e_5,\ e_1e_2e_4e_6,\ e_1e_2e_4e_7,$$
$$e_1e_3e_5e_7,\ e_1e_4e_5e_6,\ e_1e_4e_6e_7,\ e_2e_3e_5e_7,\ e_2e_3e_6e_7,\ e_2e_4e_5e_7,\ e_2e_4e_0e_7,\ e_3e_5e_6e_7,$$
$$e_4e_5e_6e_7,\ e_1e_2,\ e_1e_5,\ e_1e_7,\ e_2e_5,\ e_2e_6,\ e_5e_6,\ e_5e_7,\ e_6e_7,\}$$

(ii) 図 4-1 の (b) のグラフを考えよう。

$$E=\{e_1e_2e_3e_4e_5\}$$
$$E_y=\{e_1e_2e_5\},\qquad E_z=\{e_3e_4\}$$

このグラフの混成木集合 HT は，

$$HT=\{e_1e_2e_3e_4e_5,\ e_1e_2e_4,\ e_1e_4e_5,\ e_1e_3e_5,\ e_2e_3e_5,\ e_1,\ e_2,\ e_5\}$$

v_1, v_1' 間に枝がないが仮想の枝 $e_t=(v_1, v_1')$ を考え e_t に関するサブカットセット $S_{11'}$ を考える。

$$S_{11'}=\{e_3e_5\},\qquad S_{y11'}=\{e_5\},\qquad S_{z11'}=\{e_3\}$$

$$HT^{v_1v_1'}=\frac{\partial HT}{\partial e_3}\oplus\int HTde_5=\{e_1e_2e_4e_5,\ e_1e_5,\ e_2e_5\}\oplus\{e_1e_2e_4e_5,\ e_1e_5,\ e_2e_5\}=\phi$$

この結果は $S_{11'}=Q_{11'}$ であることから定理 4 により明らかである。(例題終)

この例題 4-1 からわかるように定理 5 は定理 1 に対応するものである。定理 1 では v_1, v_1' が同一節点でなく v_1, v_1' 間に枝がない場合，仮想の枝 $e_t=(v_1, v_1')$ を考え e_t を含む閉路 L_t から e_t を除いた部分グラフである道 $P_{11'}$ を用いて $HT_{v_1,v_1'}$ を求めた。また v_1, v_1' が同一節点の場合，仮想の枝 $e_t=(v_1, v_1')$ を考えると v_1, v_1' の間の道はそのグラフの一つの閉路となり $HT_{v_1,v_1}=\phi$

(定理3) となる。これに対して定理5は v_1, v_1' が同一節点の場合，仮想の枝 $e_i=(v_1, v_1')$ を考え e_i を含むカットセットから e_i を除いたものすなわち e_i に関するサブカットセットを用いて $HT^{v_1v_1'}$ を求めた。また，v_1, v_1' が同一節点でなく v_1, v_1' 間に枝がない場合，仮想の枝 $e_i=(v_1, v_1')$ を含むカットセットから e_i を除いたものはそのグラフの一つのカットセットであるので (e_i は仮想の枝であるから) $HT^{v_1v_1'}=\phi$ (定理4) となる。

5. 結 言

新たな部分グラフとして混成 k 木，混成 $\bar{k}$ 木を定義し，混成 k 木が従来の概念 k 木，補 k 木を，混成 $\bar{k}$ 木が従来の概念 k補木，補 k 補木をその特別の場合として含むことを示した。そして，混成木集合，混成 k 木集合，混成 $\bar{k}$ 木集合の性質を調べるために，まず第1段階として混成木集合，混成2木集合，混成 $\bar{2}$ 木集合の間の関係を調べる心要があり (実際，2端子回路網の回路関数は混成木集合，混成2木集合，混成 $\bar{2}$ 木集合を用いて表現できる)，混成木集合と一つの道 (閉路の部分グラフと考えられる) とから混成2木集合が求まり (定理1)，混成木集合と一つのサブカットセット (カットセットの部分グラフ) とから混成 $\bar{2}$ 木集合が求まる (定理5) ことを示した。その他混成木集合と閉路，カットセットとの関係を述べた。

これらの関係は混成 k 木集合，混成 $\bar{k}$ 木集合へ拡張されなければならない (回路網的には，多端子網の回路関数の位相幾何学的表現に相当する) が，これについては (II) で述べる。

文 献

1) M. Iri, : "Network Flow, Transportation and Scheduling, Theory and Algorithms" Academic Press 1969.

2) S. L. Hakimi, and D. G. Green : "Generation and Realization of Trees and k-Trees" IEEE Trans. Circuit Theory, CT-11, June 1964.

3) W. K. Chen, and S. K. Mark : "On the Algebraic Relationships of Trees, Co-trees, Circuits and Cutsets of a Graph" IEEE Trans. Circuit Theory, CT-16, May, 1969.

4) I. Berger, and A.Nathan : "The Algebra of Sets of Trees, k-Trees and Other Configurations" IEEE, Trans. Circuit Theory, CT-15, Sept. 1968.

5) 篠田庄司，渡辺昌俊："位相幾何学的混合解析に関する一考察，一木，補木，混成木ならびに他の部分グラフの間の一つの代数的関係図式一" 電子通信学会，回路とシステム理論研究会資料 CT72-13 (1972-05-25).

6) 仙石正和，黒部貞一，小川吉彦："混成木とその性質" 電子通信学会論文誌 (A)，54-A, No. 7. 1971.

7) M. Sengoku, Y. Ogawa and T. Kurobe : "On Hybrid Trees" 北大工学部研究報告，No. 59，昭46.3.