平面グラフの直線分描画の高さについて

高橋 俊彦†

グラフの各枝を互いに交差しない曲線によって平面に描いた図形を平面グラフと呼ぶ．平面グラフの各枝がすべて直線分によって描かれているとき，特にこれを直線分描画と呼ぶ．計算機で直線分描画を処理したり，ディスプレイに出力する場合は，描画されたグラフの点には整数値の xy 座標が与えられる．このような直線分描画は格子上にある，あるいは格子上の直線分描画であるという．格子上の直線分描画に関する問題の一つに，「任意の n 点の平面グラフを格子上の直線分描画するために十分な領域はどのくらいか」というものがある．この問いに対する答えとして，現在までの最良の結果は「任意の n 点の平面グラフは幅 $n-2$, 高さ $n-2$ の領域内で格子上に直線分描画できる」というものであるが，これらの値が必要十分であるかどうかはわかっていない．筆者はこうした結果を踏まえ，高さ（もしくは幅）のみについてであれば，必要十分な値を求められる一任意の n 点の平面グラフを格子上に直線分描画するために必要十分な高さは $\lceil(2n-4)/3\rceil$ 一と予想する．本文では，この予想を裏付ける結果として，任意の n 点の平面グラフ G は，点の y 座標のうち互いに異なるものが高々 $\lceil(2n-1)/3\rceil$ 個であるような直線分描画 G^* を持つことを構成的に示す．

On Heights of Straight Line Drawings of Plane Graphs

Toshihiko Takahashi†

Let G^* be a straight line drawing of a plane graph in the xy-plane. The number of y-coordinates (of vertices) $d(G^*)$ is the number of vertices with pairwise distinct y-coordinates in G^*. $d(G^*)$ is a parameter which is closely related to the height of straight line drawing of a graph on a grid. We show that any plane graph with n vertices has a drawing which satisfies $d(G^*)\leq\lceil(2n-1)/3\rceil$ and present a constructive algorithm which obtains such a straight line drawing.

1. まえがき

1.1 平面グラフの直線分描画

グラフの平面 π 上への embedding とは，その各点を π 上の点に，各枝を π 上の互いに交差のない曲線分に対応させる写像である．グラフがある embedding を持つとき，その像を平面グラフと呼ぶ．元のグラフの点および枝には，π 上の点および曲線分が対応するが，これらも平面グラフの点および枝と呼ぶことにする．

二つの平面グラフが互いに，π から π への1対1連続写像によって変換できるとき，これらは同型であるという．このグラフの同型性は同値関係であるから，ある平面グラフ G に同型な任意の平面グラフも G と表記することにする．すなわち，G を代表元とする同値類に属する平面グラフは，すべて G と呼ばれることになる．直観的にいえば，G がゴム膜でできた平面上の図形としたとき，この平面を適当に伸縮させてできるすべての図形も G と呼ぶことになる．

平面グラフ G の各枝が直線分よりなるとき，これを特に G^* と表記し，G の直線分描画と呼ぶ．さらに π が xy 平面であるとき，各点の x 座標および y 座標の値が整数であるならば，G^* は格子上の直線分描画と呼ばれる．平面グラフ G が自己閉路あるいは多重枝を持てば，直線分描画 G^* は自明に存在しない．(これは直線分描画が可能であるための十分条件でもある[1].) したがって，以下で取り扱う平面グラフは自己閉路および多重枝を持たないものと仮定する．

1.2 研究の背景

平面グラフの格子上の直線分描画に関して，CAD 等への応用や理論的興味などから，

「任意の n 点の平面グラフを格子上に直線分描画するために十分な領域はどのくらいか」

という問題が提起された[2].

この疑問に対する答えとして，描画の幅と高さを同時に評価する結果がいくつか報告されている[3),4)]．特に文献4)は，任意の n 点の平面グラフは幅 $n-2$, 高さ $n-2$ の領域内で格子上に直線分描画できることを構成的に示した．しかしながら，これらの値が必要十

† 新潟大学工学部情報工学科
Department of Information Engineering, Faculty of Engineering, Niigata University

分であるかどうかはわかっていない．

ここで，格子上の直線分描画 G^* の高さ $h(G^*)$ は次のように定義される値である：

［高さ $h(G^*)$］ G^* を格子上の直線分描画とする．このとき，

$$h(G^*)=y_{\max}-y_{\min}$$

を G^* の高さと定義する．ここで，$y_{\max}$，$y_{\min}$ はそれぞれ G^* の点の y 座標の最大値，最小値である．別の言い方をすれば，G^* を含む最小面積の長方形の y 軸に平行な辺の長さが $h(G^*)$ である．（幅についても同様であるが，以下では高さのみを議論の対象とする．）

一方，幅を十分大きく描くことを許しても，格子上の直線分描画の高さに自明な下限 $\lceil(2n-4)/3\rceil$ を持つ平面グラフが存在する：k 個の入れ子になった3角形―長さ3の閉路―を部分グラフとして持つ平面グラフ（**図1**）を考えてみよう．このグラフのいかなる直線分描画 G^* においても，各3角形 (u_i, v_i, w_i) から y 座標の最大値と最小値を取りだして得られる $2k$ 個の座標値はすべて異なる．したがって，$h(G^*)\geq 2k-1$ である．同様にして，図1のグラフの3角形 (u_k, v_k, w_k) の内部に1点（あるいは2点）を加えた $3k+1$ 点（あるいは $3k+2$）点の平面グラフ G の格子上の直線分描画 G^* について，$h(G^*)\geq 2k$ を得る．これらをまとめて，$h(G^*)\geq\lceil(2n-4)/3\rceil$ を得る． □

以上を踏まえて，筆者は幅に制限を設けず，高さのみを抑えるような直線分描画については，この下限値は十分でもあるという予想を持っている：

予想1 任意の n 点の平面グラフ G は，

$$h(G^*)\leq\left\lceil\frac{2n-4}{3}\right\rceil$$

を満たす格子上の直線分描画 G^* を持つ．

先に，図1の平面グラフが描画に必要な高さの自明な下限値を与えることを示したが，その中で G^* が格子上の直線分描画であることを使わなかったことに注意されたい．すなわち，格子上という制限がなくとも，図1の平面グラフの任意の直線分描画は，$\lceil(2n-1)/3\rceil$ 個以上の互いに異なる y 座標を持つ点を含むのである．そこで，次のように y 座標数 $d(G^*)$ を定義する：

［y 座標数 $d(G^*)$］ G^* を直線分描画とする．このとき，

$$d(G^*)=|\{r\mid r=y(v), v\in V, r\in R\}|$$

を G^* の y 座標数と定義する．ここで，$y(v)$ は点 v の y 座標，V は G の点集合，R は実数の集合である．別の言い方をすれば，G^* の点の y 座標の値のうち，互いに異なるものの個数が $d(G^*)$ である．

したがって，定義より自明に $d(G^*)-1\leq h(G^*)$ であり，先の説明においては図1の平面グラフに対する y 座標数が $\lceil(2n-1)/3\rceil$ 以上であることを示していたわけである．

本文では主定理として，上記の y 座標数の下限値 $\lceil(2n-1)/3\rceil$ の十分性を示す．定理は予想1の根拠であると同時に，（その証明中でも示すように）高さを抑えた直線分描画の可能性という観点から，平面グラフの構造を捉える．

定理1 任意の n 点の平面グラフ G は，

$$d(G^*)\leq\left\lceil\frac{2n-1}{3}\right\rceil$$

を満たす直線分描画 G^* を持つ．

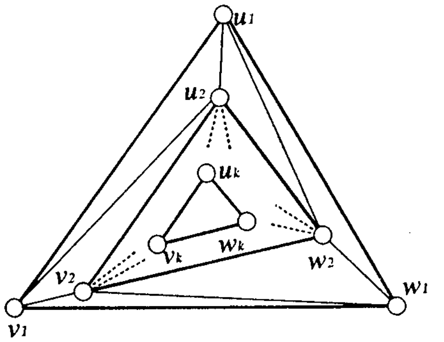

図1 入れ子になった k 個の3角形を持つ平面グラフ
Fig. 1 A plane graph containing k nested triangles.

2. 定理の証明

定理を，任意の n 点の平面グラフ G に対し，$d(G^*)\leq\lceil(2n-1)/3\rceil$ を満たす直線分描画 G^* を与えるアルゴリズムを示すことで証明しよう．

以下では特に断らない限り，G を4点以上の極大平面グラフと仮定する．（定理は G が極大平面グラフ―どの2点間にも平面性を保ったまま多重枝が生じないように枝を付加できない平面グラフ―について証明すれば十分である．また，点数 n が3以下の場合には定理は自明に成り立つ．）このとき G の各領域は外領域も含め3角形となることに注意されたい．

2.1 直線分描画アルゴリズム

アルゴリズムは $d(G^*)\leq\lceil(2n-1)/3\rceil$ を満たし，y 座標最小の点が二つ，すなわち外周の3角形の底辺が x 軸と平行になるような直線分描画を与える．

初めに平面グラフに対する二つの操作，枝の**縮約**とその逆操作である枝の**復元**を定義する．

グラフ G において，3角形 C がそれによって分割される平面の有限領域の内部に点を含むとき，C を**分離3角形**と呼ぶ．(分離4角形も同様に定義される.)

枝 $e=(u,v)$ は，それを1辺とする分離3角形が存在しないとき，**縮約可能**であるという．

縮約可能な枝に関して，次の補題が成り立つ．(同様の補題は文献5)にも見られる.)

補題1　極大平面グラフ G の任意の点 v に対し，縮約可能な枝 $e=(v,a_v)$ が存在する．

証明　v の隣接点 a_1 を任意に選ぶ．$e_1=(v,a_1)$ が縮約不可能ならば，分離3角形 $C_1=(v,a_1,x)$ が存在する．

G が極大平面グラフであることから，v はこの分離3角形内に隣接点 a_2 を持つ．再び $e_2=(v,a_2)$ が縮約不可能であれば，分離3角形 $C_2=(v,a_2,y)$ が存在し，v は C_2 内部に隣接点 a_3 を持つ．以下 $e_3,e_4,\cdots$ と縮約可能な枝が見つかるまで同様の操作を繰り返す．しかしながら，$C_3,C_4,\cdots$ の内点数は単調に減少するため，この操作は縮約可能な枝を見つけて停止する．　□

G が4点以上の極大平面グラフであれば，外周は分離3角形である．すなわち，外周の3枝はいずれも縮約可能でない．これより次の系を得る：

系1　G を4点以上の極大平面グラフ，その外周を u,v,w とする．このとき，3角形 (u,v,w) は枝 $e=(u,a_u)$ が縮約可能となるような内点 a_u を含む．

枝 e が縮約可能であるとき，e を平面上で1点となるまで連続的に縮める操作を e の縮約と呼ぶ．ただし，この変換によって多重枝が生じる場合，余分の枝を取り除くものとする．枝 e の縮約によって得られる平面グラフを $G\cdot e$ と表記する．$G\cdot e$ は G より $e=(u,v)$ を取り除き，両端点 u, v を同一視 (identify) したグラフとなる．

縮約の逆操作，すなわち $G\cdot e$ に対し，e を復活し元の G を得る操作が復元である．

ここで，$G\cdot e$ の直線分描画 $(G\cdot e)^*$ が与えられたとき，各点の位置（座標）を保存したまま，e の復元が可能であることに注意されたい：$e=(u,v)$ の縮約によって，u, v が同一点となり，$G\cdot e$ において改めて v と呼ばれているものとする．このとき，$(G\cdot e)^*$ において v の適当な近傍に u を付加し，u および v を G におけるそれらの隣接点と直線で結び直すことで，G^* を得ることができる．アルゴリズムにおいては，復元するグラフは直線分描画されたもののみを扱うため，'復元' という言葉を，上の方法によって直線分描画 $(G\cdot e)^*$ から直線分描画 G^* を構成する操作という意味で用いる．

外周を (u,v,w) とする極大平面グラフ G が(i)，(ii)，(iii)の条件を満たす枝集合 $S=\{(u,a_u),(v,a_v),(w,a_w)\}$ を持つならば，G は**可約**であると呼ぶ：

(i)　S は外周の3点 u, v, w をそれぞれ端点とする縮約可能な3本の枝よりなる．

(ii)　S はマッチングである，すなわち a_u, a_v, a_w は互いに異なる3点である，

(iii)　G のどの分離4角形も S の枝を高々1本しか含まない．

アルゴリズムは次のとおりである；極大平面グラフの枝を縮約して得られるグラフもまた極大平面グラフであり，アルゴリズムが再帰的であることに注意されたい．

procedure **EMBEDDING** (G); {G は4点以上の極大平面グラフ}
　begin u, v, w を外周の3角形上の3点とする；
　if G は4点以上かつ可約
　then begin
　　　条件(i)，(ii)，(iii)を満たす3枝 e, f, g を縮約；
　　　$\tilde{G}=G\cdot e\cdot f\cdot g$;
　　　$\tilde{G}^*$:=**EMBEDDING**$(\tilde{G})$;
　　　$d(G^*)\le d(\tilde{G}^*)+2$ となるように，$\tilde{G}^*$ の外周の3点に接続する枝を復元し，直線分描画 G^* を得る
　end;
　else {G は3角形，あるいは**図2**(b)の $G_{p,q}$}
　　　$d(G^*)\le\lceil(2n-1)/3\rceil$ を満たす直線分描画 G^* を構成する
　end;

条件(i)，(ii)，(iii)を満たす3枝を見つける方法は，例えば後述の補題2の証明に従えばよい；とりあ

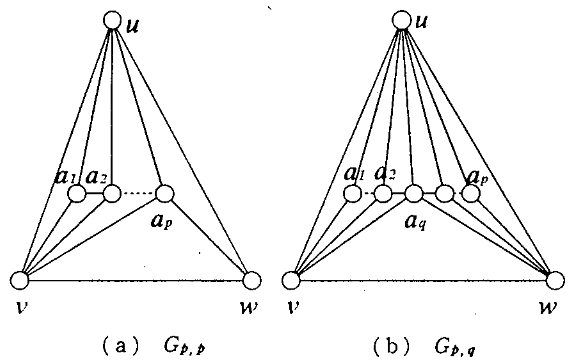

図2　グラフ $G_{p,q}$
Fig. 2　Graph $G_{p,q}$.

えず条件(ｉ)，(ⅱ)を満たすものを選ぶ．これには，外周の３点を端点とする縮約可能な枝の中から，端点を共有しないものを選びだす—これは簡単な２部グラフのマッチング問題を解くことで得られる．こうして選んだ３枝が条件(ⅲ)を満たさない場合には（後述するように）常に分離４角形の中から次の候補を選びだすことができる．(選び直すごとに対象とする分離４角形の点数が真に減ることに注意．)

また，復元のステップでは，直線分描画の適当な近傍に点を付加し，直線分を付け加えるだけである．

したがって，全体の計算時間はこれらに再帰の深さ—高々グラフの点数の1/3—を乗じたものであり，上のアルゴリズムは多項式時間で描画を与えることがわかるであろう．

2.2 アルゴリズムの正当性—枝の縮約—

まず最初に，可約の定義を緩和する補題を与える．

補題2　Gを４点以上の極大平面グラフ，(u,v,w)をGの外周の３角形とする．このとき，Gが可約であることの必要十分条件は可約の定義の条件(ｉ)，(ⅱ)を満たすことである．

証明．Gが条件(ｉ)，(ⅱ)を満たす枝集合 $S=\{e=(u,a_u),\ f=(v,a_v),\ g=(w,a_w)\}$ を持つとする．この S が条件(ⅲ)を満たさないものとしよう：すなわち一般性を失うことなく，$C_4^1=(u,a_u,a_v,v)$ が分離４角形であると仮定する．G は極大平面グラフであるから，C_4^1 の内部に，枝 (v,X) が縮約可能枝となるような点 X が存在する．このような点 v の隣接点 X の中で，u から w に向かって最初に現れるものを x とする．ここで，$f'=(v,x)$ とすれば，４点 $\{u,a_u,x,v\}$ は分離４角形を作りえない．さらに，もし $C_4^2=(u,a_u,a_w,w)$ も分離４角形であるならば，同様の議論によって C_4^2 の内部に，(u,y,w) が分離３角形でなく，かつ４点 $\{w,y,a_v,v\}$ が分離４角形を作らないような w の隣接点 y が存在する．このとき $g'=(w,y)$ とする．(以下で括弧内部の文章は C_4^2 も分離４角形となる場合に対応する．)

点 x は C_4^1 の内点であるから，G は f' と g (f' と g') の二つを含む４角形を持たない．このとき $\{e,f',g\}$ ($\{e,f',g'\}$) は条件(ｉ)，(ⅱ)，(ⅲ)を満たす３枝である．よって補題は証明された．□

次に G が４点以上で可約でなければ，図２(ｂ)の極大平面グラフ $G_{p,q}$ であることを示そう：$G_{p,q}$ はそのすべての内点が u に隣接し，それらを v から w へ向かって $v,a_1,\cdots,a_p,w\ (p\geq 1)$ とすると，$1\leq q\leq p$ に対し，

・$i\leq q$ ならば a_i は v に隣接し，
・$i\geq q$ ならば a_i は w に隣接する

ような極大平面グラフである．

$G_{p,q}$ は図２(ｂ)に示すように y 座標数３の直線分描画を持つ．

補題3　４点以上の可約でない極大平面グラフは $G_{p,q}$ のみである．

証明．G を４点以上の可約でない極大平面グラフとする．外周の３点を u,v,w とすると，補題２より G には u,v,w をそれぞれ端点とし，共有点を持たないような縮約可能な３枝の集合が存在しない．

U_c を，u の隣接点 x のうち，(u,x) が縮約可能な枝となるものすべてから成る点集合とする．v，w に対しても同様に V_c，W_c を定義する．

系１より，U_c，V_c，W_c はいずれも空でない．したがって，u,v,w をそれぞれ端点とし，共有点を持たないような縮約可能な３枝が存在しない場合は一般性を失うことなく次の２通りに分けられる（付録参照）．

1) $|U_c\cup V_c|=1$（または $|V_c\cup W_c|=1$，$|W_c\cup U_c|=1$）の場合：

このとき G において点 u，v を端点とする縮約可能な枝はそれぞれ (u,a_u)，(v,a_v) のみであり，かつ $a_u=a_v$ となる（**図３**(ａ)参照）．G における u の隣接点を，v から w に向かって $A_u=\{v,a_u=a_1,a_2,\cdots,a_p,w\}$ とする．(u,a_u は縮約可能であるから (u,a_v,v) は分離３角形でない．したがって，$a_u=a_1$ である．)

(u,a_2) は縮約可能でないから，ある $x\in A_u$ が存在し，(u,a_2,x) は分離３角形となる．このとき，系１よりこの分離３角形の内部に u を端点とする縮約可能な枝が存在する．ところが，u に接続する縮約可能枝は (u,a_u) のみであるから，(u,a_2,x) は a_u を内点に持たねばならない．これより，$x=v$ となる．同様の議論により，$A_u-\{v\}\cup\{u\}$ は点 v の隣接点になっていることがわかる．これより G は $G_{p,p}$ (図２(ａ))

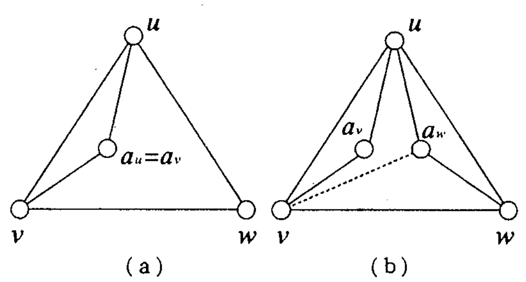

図 3　共有点を持たない縮約可能な３枝の集合がない場合
Fig. 3　The cases that no set of three contractible edges is a matching.

を部分グラフとして含むことがわかる．しかしながら，点 u, v を端点とする縮約可能な枝はそれぞれ (u, a_u), (v, a_v) のみであるから，G はこのほかに点を持たない．よって，$G=G_{p,p}$ であることが示された．ただし，$G=G_{p,p}$ は $G=G_{p,q}$ (図 2 (b)) の特別な場合$(p=q)$ である．

2)　$|U_c \cup V_c \cup W_c|=2$ の場合：

G において v, w を端点とする縮約可能な枝はそれぞれ (v, a_v), (w, a_w) のみであり，u を端点とする縮約可能な枝は (u, a_v), (u, a_w) の二つであるとしてよい (図 3 (b) 参照)：なぜならもし，$|U_c|=|V_c|=|W_c|=1$ であれば，1)の場合になる．そこで，$|U_c|=2$ としよう．このとき，さらに $|V_c|=2$ であるとすると，u, v は共通の隣接点 a_v, a_w を持ち，(u, v, a_v) が内点 a_w を持つかあるいは (u, v, a_w) が内点 a_v を持つような分離 3 角形となってしまう．このことは (u, a_v) および (u, a_w) は縮約可能であることに反する．したがって，$|V_c|=1$ (同じ理由で $|W_c|=1$) でなければならない．今，u の隣接点を v から w に向かって $A_u=\{v, a_u=a_1, a_2, \cdots, a_p=a_w, w\}$ とする．1)と同様の議論により，$A_u-\{v\} \cup \{u\}$ は点 v または点 w の隣接点になっていることがわかる．このとき，G は極大平面グラフであるから，ある整数 $q \leq p$ が存在して，$a_i (i \leq q)$ はすべて v の隣接点であり，$a_j (j \geq q)$ はすべて w の隣接点となっている．これより G は $G_{p,q}$ (図 2 (b)) を部分グラフとして含むことがわかる．しかしながら，v, w を端点とする縮約可能な枝はそれぞれ (v, a_v), (w, a_w) のみであり，u を端点とする縮約可能な枝は (u, a_v), (u, a_w) の二つであるから，G はこの他に点を持たない．よって，$G=G_{p,q}$ であることが示された．　□

2.3 アルゴリズムの正当性—枝の復元—

アルゴリズムは平面グラフに縮約を繰り返し行い，G が 3 角形もしくは $G_{p,q}$ となったとき，復元の過程に移る．3 角形および $G_{p,q}$ はそれぞれ y 座標数 2 および 3 (当然 $d(G^*) \leq \lceil (2n-1)/3 \rceil$ を満たす)，かつ外周の 3 角形の底辺が x 軸と平行である直線分描画 G^* を持つ (図 2 (b) の $G_{p,q}$ はそのように描画してある)．

3 枝を復元して得られる新しい直線分描画は点数が 3 だけ増加するため，y 座標数の増加を高々 2 に抑えれば，不等式 $d(G^*) \leq \lceil (2n-1)/3 \rceil$ はすべての復元過程で成り立つ．

直線分描画 $\tilde{G}^*$ が，(u, v, w) を外周の 3 角形とし，(v, w) が x 軸と平行であるものとする．このとき $\tilde{G}^*$ の復元を考える．**図 4** に示すように，$\tilde{G}^*$ の点の座標を変更せずに，v の隣接点 a_v を付加できる領域を N_v，w の隣接点 a_w を付加できる領域を N_w とする．このとき，N_v と N_w の両者と交わり，底辺 (v, w) に平行な直線 l を引くことができる．N_v と l の共通部分 (の任意の位置) に点 a_v を，N_w と l の共通部分 (の任意の位置) に点 a_w を付加すれば，所望の描画が得られる．　□

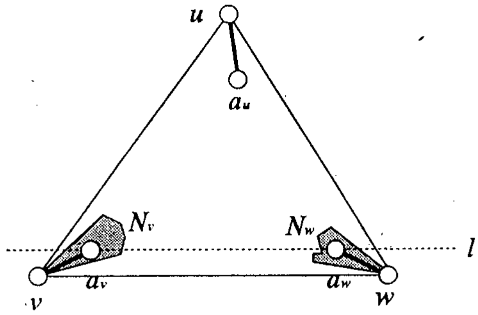

図 4　枝の復元
Fig. 4　The expansion of edges.

3. おわりに

本文では，直線分描画の y 座標数についてその上限を示した．

始めに述べた予想を証明するために，本文の構成法によって得られた直線分描画 G^* を高さ $\left\lceil \frac{2n-4}{3} \right\rceil$ 以下の格子上の直線分描画に変換する，あるいは直接にそのような描画を得る方法を検討している．

謝辞　本研究を進めるにあたりご指導をいただいた東京工業大学工学部の梶谷洋司教授 (現・北陸先端科学技術大学院大学専任教授)，上野修一助教授に深謝する．

参 考 文 献

1) Fáry, I.: On Straight Line Representation of Planar Graphs, *Acta Sci. Math.* (*Szeged*), Vol. 11, pp. 229-233 (1948).
2) Rosenstiehl, P. and Tarjan, R. E.: Rectilinear Planar Layouts and Bipolar Orientations of Planar Graphs, *Disc. Comp. Geom.*, Vol. 1, pp. 343-353 (1986).
3) Fraysseix, H., Pach, J. and Pollack, R.: Small Sets Supporting Fáry Embedding of Planar Graphs, *Proc. 20th ACM Symp. on Theory of Computing*, pp. 426-433 (1988).
4) Schnyder, W.: Embedding Planar Graphs on the Grid, *Proc. 1st ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms*, pp. 138-148 (1990).
5) Kampen, G. R.: Orienting Planar Graphs, *Dis-*

crete Mathematics, Vol. 14, pp. 337-341 (1976).

6) Hall, P.: On Representation of Subsets, *J. of London Math. Soc.*, Vol. 10, pp. 26-30 (1934).

付　　録

u, v, w を端点とする縮約可能な3枝が存在しない場合は（対称性を考慮すれば）この2通りであることは簡単にわかるであろう．（3点に対するマッチングを調べるだけのために用いるのは大げさであるが，）2部グラフにおける Hall の定理[6]を用いると次のようになる．

［Hall の定理］ 2部グラフ $G=(X, Y, E)$ が X のすべての点を端点とするマッチング（どの二つも端点を共有することのない枝集合）を持つための必要十分条件は，任意の $A\subset X$ に対し，

$$|\Gamma(A)|\geq|A|$$

が成り立つことである．ただし，$\Gamma(A)$ は A の点に隣接する点の集合である．

本文の証明中では $|X|=3$ であり，マッチングが存在しない場合は，1) $|A|=2$ かつ $\Gamma(A)=1$, 2) $|A|=3$ かつ $\Gamma(A)=2$ の2通りのみである．

(平成5年2月19日受付)
(平成5年6月17日採録)

高橋　俊彦（正会員）

1961年生．1985年東京工業大学工学部電子物理工学科卒業．1991年同大学院博士課程修了．工学博士．現在，新潟大学工学部情報工学科助手．グラフ理論およびその応用に関する研究に従事．