

# 算数科の研究

高橋喜一郎



## キーワード

乗法の意味の拡張 数理の再体系化 イメージモデル

## 主張

本研究では、子どもが新たに獲得した概念と既習の概念とを関連づけ、数理の体系を構築していく姿、即ち数理の再体系化を図る姿を目指した。

本単元においては、乗数が小数に拡張され同数累加の概念では説明できなくなったときの乗法の立式の根拠をどのように作り直していくかを追求し、整数でも小数でも通用する概念を構築する姿を期待した。

その結果、子どもが科学的な感性、科学的なものの見方・考え方を働かせながら再体系化を図る授業過程を明らかにした。

# I 数理の再体系化を図る算数科

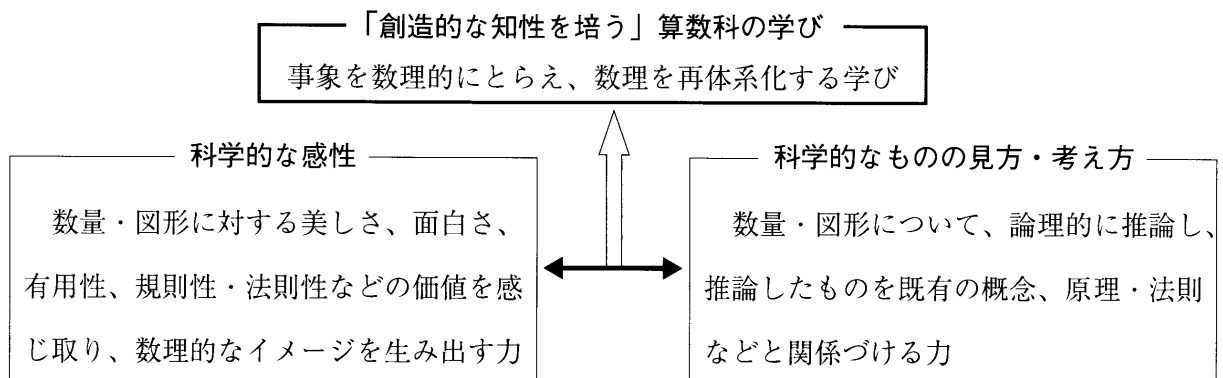
## 1. 「創造的な知性を培う」算数科の学び

研究主題「創造的な知性を培う」のもとでの算数科では、子どもが数理を再体系化する学びを目指す。数理の再体系化とは、子どもが数量・図形概念を自らつくり上げていくことである。新たに形成した概念を既習の概念と関連づけ、数理を体系化していく姿を目指すのである。

再体系化は、算数科で大切にされてきた「統合的な考え方」と重なる。ところが、授業の実際には、教師主導で学習内容の統合を行うことが多く、統合の価値が子どもものものになりにくい。これは2つの問題が考えられる。1つは、概念や意味を把握していなくても答えを出すことができるため、結果として技能の習得を重視しがちであること。2つは、算数科そのものの規則性・法則性のある面白さを感じ取れずにいるため、自ら数理を追求する学びになりにくいことである。

子どもが問題解決において、概念を自らつくり直していく必要を感じながら、新たな概念形成に向かい、既習の概念と関連づける姿を大切にする。このような学びを具現することで、事象を数理的にとらえ、数理を再体系化する力を育てていきたいと考える。

## 2. 算数科ではぐくみたい「科学的な感性」「科学的なものの見方・考え方」



子どもが数理の再体系化を図る授業を具現するためには、次のことが必要である。

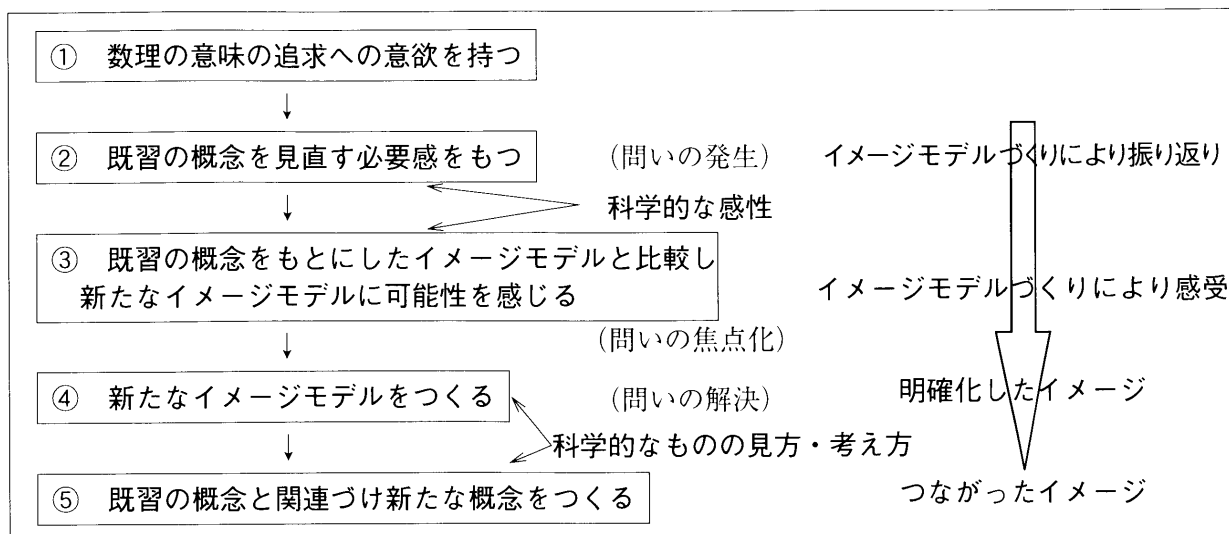
学習のスタートでは、子どもが問題を解いて答えを出すことのみを目的とするのではなく、数量・図形の意味を追求しようとする目的をもつ。そして、数理の美しさ、面白さ、有用性などの価値を感じながら追求する。これが「科学的なものの見方・考え方」を働かせるエネルギーとなる。子どもがその目的に向かい、既習の概念を使いながら考えられるように、視覚的にとらえたり感覚的に捉えたりできるイメージモデルを使う。これにより、既習の概念で考えることの限界がみえたり、イメージモデルの中に可能性を感じたりする。この既習の概念を見直し新たな概念をつくり出す必要性を感じる場所に「科学的な感性」が働いてくる。

既習の概念も含めた新たな概念をつくり出すために、帰納的推論、類比的推論、演繹的推論を行う。これが数理の再体系化であり、ここに「科学的なものの見方・考え方」が働いてくる。

### 3. 「創造的な知性を培う」算数科の学習過程

#### (1) 学習過程

「創造的な知性を培う」算数科の学習過程を、次のように描いた。



#### (2) 評価方法

##### 【科学的な感性】

- 授業中にかいたイメージモデルの変化から、数理的なイメージをどのように捉えているのかを評価する。

##### 【科学的なものの方・考え方】

- イメージモデル等自分なりの根拠をもとにした説明から論理的に推論する力を評価する
- 単元終了時に、問題づくり、説明等のパフォーマンステストを行う。

### 4. 「事象を数理的にとらえ、数理の世界を再体系化する学び」をはぐくむカリキュラム編成の視点

子どもが数理の再体系化を図る学びを具現するために、次のようにカリキュラムを見直す。

これまでの学習内容に、再体系化に必要な内容を付加し、「つくろう」「あそぼう」「しらべよう」の3つの活動区分に分類整理する。

「つくろう」は、既習の概念を見直しながら新たな概念や原理・法則をつくり出し、既習の概念と関連づけることをねらいとする。幼、小、中12年間で子どもがどのように数理の再体系化を行うかを明確にして指導に当たる。「あそぼう」は、数理的な活動を通して、数量・図形についての感覚を豊かにし、新たな概念の獲得の素地を養うことをねらいとする。「しらべよう」は、数理的な価値や方法を生かして社会・文化・自然事象について調べたり、数量や図形にかかわる歴史や文化を調べたりする活動を通して、数理の体系のよさを実感したり、数理をつくった人間の知恵を感得したりする。これらの3つが、相互に作用しあい、数理の再体系化を図る学びにつながる事が期待できる。

数理の再体系化を図る学びは中学校数学と連続したものにす。中学校数学は、従来の内容に加えて、学びの連続性や発展性のある単元構成を重視した新たな課題学習として「数学探究」を新設している。中学校の従来の内容を学習する単元は、発展的・統合的な視点で学習内容を付加したり見直し教材を導入したりする。これにより、小中の9か年を通して数理の再体系化という視点で一貫性をもった学習にすることができる。

## II 実践の概要

第5学年

### 「502小数のかけ算問題事典をつくらう」

#### 1. 単元の構想

##### (1) イメージモデルを使い数理の意味を再体系化する学び

本単元では、乗法の意味を子どもが自ら形成していく姿を目指す。これまでの小学校における乗法の学習では、数直線などを大切にして倍概念に導こうとする働きかけはみられたが、子どもの思考は同数累加でとどまっているケースが多く見られた。そのため、乗数が小数になると、乗法の意味を説明できなくなってしまうのである。

本単元、「小数のかけ算問題事典をつくらう」では、答えを出すことだけを目的にするのではなく、乗法の意味を追求することを目的とする。具体的には、「小数のかけ算問題事典」づくりという「問題文」「かけ算であることの説明（立式の根拠）」「式」「答え」をかく活動を設定する。かけ算であることの説明（立式の根拠）には、図、テープ図、数直線などのイメージモデルを使う方法を取り入れる。これらのことにより、乗数が整数の場合と小数の場合とのかけ算の仕組みをイメージとしてとらえながら、同数累加から倍概念へとかけ算の意味を捉え直し、再体系化を図っていく姿を期待する。

##### (2) 追求の構想（16時間）

#### 1次 身の回りからかけ算の問題をつくらう

小数のかけ算でも問題をつくれるかな？

〈既習のかけ算〉

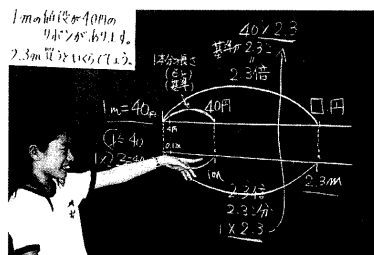
〈未習のかけ算〉

① [整×整] $3 \times 4$	② [小×整] $2.3 \times 4$	③ [整×小] $4 \times 2.3$	④ [小×小] $1.2 \times 2.3$
-------------------------	---------------------------	---------------------------	-----------------------------

みんなの問題をまとめて「502かけ算問題事典」を作ろう。  
小数×整数の問題をもとに問題づくりをしよう。

◎2本の数直線モデルを使ってかけ算の意味をつくり出そう。

×小数の意味は、数直線モデルを使うとわかりやすい。倍の考えなんだ



小数×小数の問題ができた。「502かけ算問題事典」完成だ。問題を解いてみたいな。

#### 2次 作った問題を解き合ってみよう

◎小数×整数、整数×小数、小数×小数の計算の仕方を考えよう。

10倍したり100倍したりして整数に直して計算し、最後に $\frac{1}{10}$ 、 $\frac{1}{100}$ すればいい。  
筆算も、この考え方を整数に直して計算すればいいんだな。

#### 3次 問題の評価とまとめをしよう

かけ算は、…の□個分ではなく、もとにする量の□倍という意味なんだな。□倍はもとにする量を1とした時どれくらい大きさに当たるかを表している。  
整数でも小数でも同じ意味で考えられる。分数のかけ算も同様に言えそうだ。

## 2. 授業の実際

### (1) 小数のかけ算の問題事典を作ろう

小数のかけ算の学習に入る前に、既習の計算の問題づくりとその問題の場面をイメージモデルで表す学習を行った。自分なりの問題文を考えたり説明したりすることに進んで取り組む子が多く見られた。

「これからやっていく小数のかけ算の学習では、問題文をつくったり立式の根拠を書いたりする『小数のかけ算問題事典』をつくって学習していきませんか？」と投げかけると、子どもたちは「つくってみたい」と答えた。

話し合いにより、「小数×整数」「整数×小数」「小数×整数」の順番に学習を進めて行くことになった。小数のかけ算問題事典は、下記のような形式である。

(表)

(裏)

立式の根拠

問題文

式と答え

由紀恵さんは、「小数×整数」の問題づくりの際 $7.2 \times 3$ という式を作り、「高さが7.2cmの箱があります。その箱でおもちゃを作りたいと思います。箱を3つ重ねると全部で何cmでしょうか。」という問題を作った。そして、乗法の立式の根拠として右のようにイメージモデルをかいた。これは、7.2cmの3つ分という同数累加の考え方を使っている。

由紀恵さんのかいた絵モデル

由紀恵さんは、既習の学習内容を生かしていこうとするよさがあるしかし、新たな概念を必要とする問題に対してうまく適用できないため、自信をなくすことがある。自分の考えをつくることができにくい傾向がある。そんな由紀恵さんに、自分から問題づくりに取り組み、小数の乗法について立式の根拠を自分なりにつくり出していくことを期待したのである。



立式の根拠を考える由紀恵さん

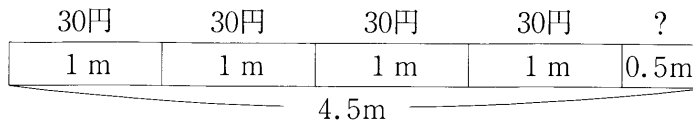
### (2) あれ？ 整数×小数の説明ができないぞ。どう説明したらいいんだろう

乗法の再体系化に向かう「整数×小数」の問題づくりでは、最初に問題を提示し、既習の概念を生かして「整数×整数」や「小数×整数」の問題文を提示し、既習の概念を生かして学習を進めていけるようにした。

【お金タイプ問題】 1mが20円の風糸があります。長さ分の値段で売ってくれます。3m買うと値段はいくらになるでしょう。

【重さタイプ問題】 1mが1.5kgの針金があります。スキーのポールとして使います。2.5m買うと何kgですか。

由紀恵さんは、お金タイプの問題を参考にし、「1 m30円のリボンがあります。4.5m買うといくらになるでしょう。」という問題を作った。そして、立式の根拠をかき始めた。まず、次のような絵モデル、テープ図モデルをかいた。



由紀恵さんが書いたテープ図モデル

0.5mが  
余っちゃう。

由紀恵さんは、テープ図モデルをかいたところで止まってしまった。教師が、何を悩んでいるのかを尋ねると、「0.5mがあまっちゃう」と答えた。

整数×小数の問題では、同数累加の考え方がうまく使えないと考え始めた由紀恵さんである。



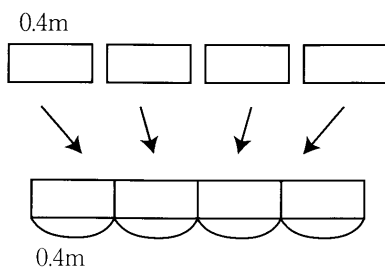
同数累加の考えが使えなくて困っている由紀恵さん

### (3) 数直線モデルを使うと説明できたよ

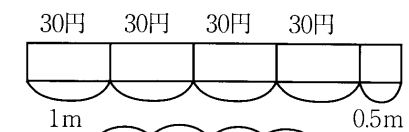
由紀恵さんと同様に、立式の根拠を説明できないで困っている子どもが多くいた。そこで、由紀恵さんの「0.5mがあまっちゃう」という悩みを取り上げ、学級全体で考えていくことにした。悩みの内容を共有するために、今までのモデルと比較する活動を行った。

1本0.4mのテープが4本あります。  
全部で何mでしょう。

1 m30円のリボンが4.5mあります。  
全部でいくらでしょう。



0.4mの4本分で  
説明できる

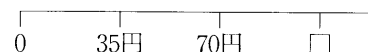
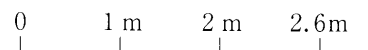


テープ図モデルでは  
かけ算が説明できない

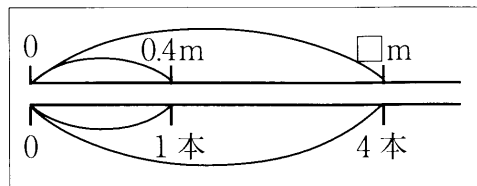
話し合っていく中で、同数累加の考え方を生かしたモデルでは説明できないことに気づいてきた子どもたち。既習の概念の限界を感じ、新たな概念をつくり出そうとする再体系化に向かう姿である。

ここで悟さんが、「ぼくは数直線モデルでやったけど…」と右のような数直線モデルを使って説明した。「悟さんの考え方のよさが分かりそうだね。今までの考えとの違いを出し合ってみましょう。」と促した。

「1 m35円の釣り糸を2.6m買うといくらか」〈悟さんの問題文〉



〈悟さんがかいた数直線モデル〉



絵モデルやテープ図モデルと  
どんな違いがあるかな？

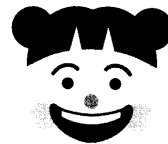
絵モデルやテープ図モデルと違って1本分0.4mの所以外、2本分、3本分…と目盛りしていない。



2本の数直線で表している。上はm、下は本。



1本0.4mの4個分と表せる。



上と下の数直線は、1本が0.4m、4本が□mと言うように同じ関係になっている。



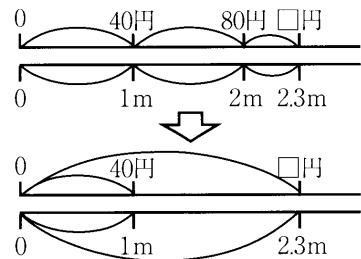
「この数直線モデルを使って、問題文がかけ算であることを説明できそうな人？」という教師の問いかけに、ほとんどの子どもが挙手をした。由紀恵さんも自信がなさそうではあるが挙手をした。同数累加から倍概念にさらに向かうために共通の問題で考えてみることにした。「1mの値段が40円のリボンがあります。2.3m買うといくらでしょう。」をもとにして乗法の立式の根拠を探ることにしたのである。



1m、2mと結んでいこう

また、0.3mがあまっちゃう

2.3まで線を伸ばして2.3倍と考えよう



まず、2.3mは1mの2.3倍です。上の数直線と下の数直線は同じ関係です。なので、1mの2.3倍が2.3m。だから、40円の2.3倍が□円になります。だから、 $40 \times 2.3$ になります。

「1本分の長さの4倍が4本分の長さ」という数直線モデルの考えを生かして、立式の根拠の説明をノートに書く由紀恵さん。説明を書き終えたとき、「できた」と小さい声でつぶやく姿が見られた。

#### (4) 整数のかけ算も同じように説明できるんだ

由紀恵さんは、自分の作った問題についても、数直線モデルを使い、乗法の立式の根拠を説明することができるようになった。そして、最初につくった「小数×整数」の問題「高さが7.2cmの箱があります。その箱でおもちゃを作りたいので、その箱を3つ重ねると全部で何cmでしょうか。」についても数直線モデルをかき、同じように、「もともになる7.2cmの3倍」の考えで説明することができた。乗数が小数の乗法の立式の根拠を、乗数が整数である乗法の根拠とかかわらせて見直し、乗法を基準の□倍（膨らんだり伸びたりするイメージ）と再体系化した由紀恵さんである。

### Ⅲ 単元の評価と成果・課題

#### 1. 単元の評価

科学的な感性についての評価は、授業中にかいたイメージモデルの変化から、既習の概念を見直す必要感や、新たなイメージモデルへの可能性を感受する力をみようとした。その結果、由紀恵さんが、テープ図モデルをかき、乗法の立式の根拠を「〇〇の□個分」で説明しようとしたが限界を感じ、数直線モデルに可能性を見いだした姿があった。ここに科学的な感性が働いたと言える。

科学的なものの見方・考え方の評価は、イメージモデルをもとにした乗法の立式の根拠の説明をもとに評価した。由紀恵さんは、数直線モデルをかき立式の根拠を説明することができている。

また、事後テストで「自分が授業で作った問題文と違う問題文を作る」「それがかけ算の問題であることを説明する」という問題に対して、正しく書くことができていた。これらは、演繹的な推論を働かせた姿であると評価できる。

(問題文)「1 m60円の棒があります。その棒を3.8 m買おうと思います。全部でいくらになるでしょう。」  
(説明)まず、3.8mは1 mの3.8倍です。それは位置関係がとても重要です。1 mと60円は、同じ位置にあります。□と3.8mも同じ位置にあります。なので、1 mが3.8m。60円が□円。つまり、60円×3.8と言えるのです。」

#### 2. 成果

(1) 科学的な感性「数量・図形に対する美しさ、面白さ、有用性、規則性・法則性などの価値を感じ取り、数理的なイメージを生み出す力」を強く働かせていくようにするためには、次の3つの段階が大切であることがみえてきた。

- ① 算数的な活動「問題づくり」により、問題場面の意味と、立式の根拠を探ろうとする目的をもつこと
- ② 一人一人がイメージモデルにより問題の構造を捉えようとする事
- ③ ②の中で既習の説明では意味を表すことができないという限界を感じる事

(2) 科学的な見方・考え方「数量・図形について、論理的に推論し、推論したものを既習の概念、原理・法則などと関係づける力」を強く働かせていくようにするためには、次の2つの段階が大切であることがみえてきた。

- ① 自分なりのイメージモデルを使って、演繹的に考えること
- ② ①をもとに筋道立てて説明すること

#### 3. 課題

(1) 子どもが自分の発想したイメージモデルでつなぎながら考えたり、再体系化の中で直していったりすることが大切である。そのための、授業組織を明らかにしていく必要がある。

(2) イメージモデルを用いて科学的な感性、科学的なものの見方・考え方を働かせるため、どのようなイメージモデルをつくったりどのように使ったりするかということ、小中9年間を見通したカリキュラム編成の視点としてとらえていく必要がある。

#### <主な参考文献>

- 全国算数授業研究会 2000「これからの計算指導」東洋館出版社  
杉山 吉茂編著 1997「少なく教えて多くを学ぶ算数指導」明治図書  
杉山 吉茂著 1990「力がつく算数科教材研究法」明治図書  
中村 享史著 1993「自ら問う力を育てる算数授業」明治図書  
片桐 重男著 1995「数学的な考え方を育てる『乗法・除法』の指導」明治図書  
中野洋二郎・坪田耕三・滝井章編著 1999「子どもが問題を作る」東洋館出版社