

算数科の研究

高橋喜一郎



🔍 キーワード

数理の再体系化 イメージモデル 計算原理の拡張

📌 主張

算数科では、生きて働く思考力を育てたい。そのためには、各單元ごとのそれぞれの概念形成にとどまらず、各単元の概念、原理・法則をより統合的な観点から自ら関係づけ、自分の中の数理の世界をとらえ直し、体系的な概念に高めていく学びが必要である。これが数理を再体系化する学びである。

数理を再体系化する学びは、概念、原理・法則をより統合的な観点から整理し直したり、包摂関係をとらえ直したり、数理の意味を拡張したりして、数量・図形にかかわる体系的な概念を創りあげる学びである。そしてこれは、既習の内容の学び直しにもなる。

本研究では、子どもが統合的な観点から概念を整理し直す数理の再体系化を通して、加法・減法の計算方法や位取り記数法にかかわる体系的な概念を創りあげる子どもの姿を目指した。

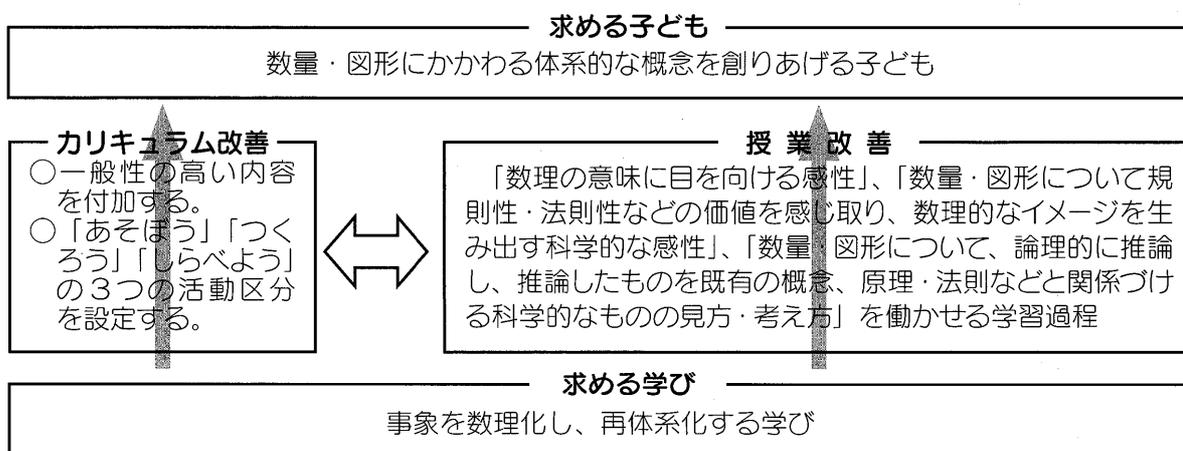
I 数量・図形についての体系的な概念を創りあげる算数科

1. 算数科で求める子ども

研究主題「創造的な知性を培う」のもとでの算数科では、求める子ども像を「数量・図形にかかわる体系的な概念を創りあげる子ども」と設定した。これは概念、原理・法則を統合的な観点から整理し直したり、包摂関係でとらえ直したり、数理の意味を拡張したりしながら、既習の概念を絶えず学び直し、体系的な概念を創りあげる子どもである。

算数科では、各単元の学習で創った概念、原理・法則をそれぞれ個別にもっているだけでは新たな問題に出会ったときに生きて働く思考力にはなりにくい。それぞれの概念、原理・法則を、より統合的な観点から自ら関係づけ、自分の中の数理の世界がとらえ直し体系的な概念に高めていくことが必要である。これが数理を再体系化する学びであり、この学び自体が創造的な学びである。

このような学びを、カリキュラム改善、授業改善より具現していこうと考えた。



2. 数量・図形にかかわる体系的な概念を創りあげるカリキュラム改善の視点

算数科カリキュラムを数理を再体系化に向かうものにする。そのためには、第一に、より一般性の高い内容（台形の面積公式、帯分数の計算など）を付加して、概念、原理・法則が整理されたり、包摂関係でとらえられたり、拡張されたりするようにする。

第二に、「生活の数理化」「数理の再体系化」「数理の日常化」のサイクルを大切にし、それぞれの過程に重点をかけて「あそぼう」「つくろう」「しらべよう」の3つの活動区分を設定した。数理の再体系化を図る「つくろう」が中心であり、「あそぼう」「しらべよう」は「つくろう」をより充実させるための単元をつくる。それぞれの役割は下記の通りである。

「あそぼう」…… 子どもが遊びを通して、数量・図形についての感覚を豊かにし、新たな概念の獲得の素地を養う活動であり、生活の数理化の過程を重視する。

「つくろう」…… 数理的なイメージをもとに論理的な推論を行い、推論したものを既存の概念、原理・法則などと関係付けることで数理の再体系化を行う。

「しらべよう」… 数量・図形にかかわる概念、原理・法則を用いて、社会、文化、自然事象について調べたり、数量・図形にかかわる歴史や文化を調べたりすることで、数理の体系のよさを実感したり、数理をつくった人間の知恵を感得したりする活動であり、数理の日常化の過程を重視する。

3. 数量・図形にかかわる体系的な概念を創りあげる学び

(1) 算数科ではぐくむ「感性、科学的な感性、科学的なものの見方・考え方」

数量・図形にかかわる体系化した概念を創りあげる授業においては、まず、学習対象を拡張して考えていこうとする姿を求める。その姿に迫るために着目したのが、感性「数理の意味に目を向ける力」である。「感性」を働かせて「今までの勉強とどんな関係があるのかな」と学習対象を拡張して考えようとする姿を期待する。

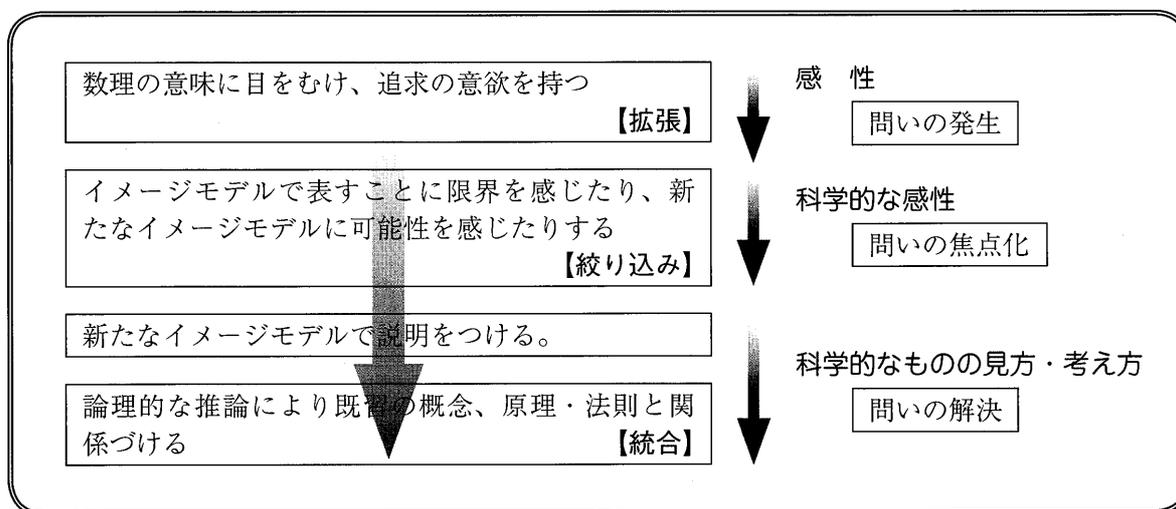
次に、事象を数理化し、数理の構造をイメージモデルを用いて考えていく過程で、既習の概念の限界性を感じたり、新たなイメージモデルの見通しをもったりする子どもの姿に迫るために着目したのが科学的な感性「数量・図形について規則性・法則性などの価値を感じとり、数理的なイメージを生み出す力」である。「科学的な感性」を働かせて、「これがわかれば関係づけられるぞ」といった関係づける観点を絞り込み、問いを焦点化していく姿を期待する。

この焦点化した問いを、帰納的推論、類比的推論、演繹的推論を使って解決し、その概念を既習の概念と関係づける姿に迫るために着目したものが科学的なものの見方・考え方「数量・図形について、論理的に推論し、推論したものを既習の概念、原理・法則などと関係づける力」である。「科学的なものの見方・考え方」を働かせて、「比べながら関係を明らかにしていこう」と複数の概念を関係づける姿を期待する。

以上に示したような資質・能力に着目することにより、「数量・図形にかかわる体系的な概念を創りあげる子ども」を目指していく。

(2) 「感性、科学的な感性、科学的なものの見方・考え方」を働かせた学び

活動区分「つくろう」における学習の様相を下記のように描いた。



4. 新たな評価方法の開発

- 加法・減法の計算方法に関して、単元前と単元後にコンセプトマップを作成する場を設定し、ラベル同士のつながり方やつなぐ言葉の比較から、「科学的なものの見方・考え方」の働きについて評価する。
- イメージモデルを使って、整数・小数の加法・減法と分数の加法・減法の計算方法の関係を説明するところから、「科学的な感性」「科学的なものの見方・考え方」の働きについて評価する。

II 実践の概要

第6学年

「整数、小数、分数の特徴や共通点を探ろう」

1. 加法・減法の計算方法の観点から、分数を整数、小数と関係づける学び

整数、小数、分数の加法・減法の共通の計算原理を見出すことで、分数を整数や小数と同様に位取り記数法の数としての見方ができること、即ち分数の概念をとらえ直す姿を目指す。

これまでの、加法・減法の計算指導では、整数、小数を統合的に「位を揃える」ことを指導はしていても、分数は統合的に指導されていない。そのため、分数の加法・減法の計算方法は、整数・小数とは違う方法であり、分数は整数・小数とは違う種類の数という概念形成にとどまっていた。

本単元では、分数の加法・減法の計算方法を、整数・小数と比較して考えるようにする。このことにより、「位を揃える」「位ごとに足す(引く)」「繰り上がり(繰り下がり)があれば行う」という共通の観点で、整数、小数、分数とも計算できそうなことに気づき、科学的な感性を働かせて、分数の計算では、通分が「位を揃える」ことなのではないかと絞り込んでくることを期待する。さらに、通分が位を揃えていることをイメージモデルで検証し、単位分数が分母の数集まると一の位に上がるという点で、整数・小数と同じ種類(位取り記数法)の数と言えること、即ち、数についての体系的な概念を創りあげる姿を期待した。

2. 単元の構想

(1) 単元の目標

整数、小数、分数の加法・減法の計算方法をイメージモデルを使って説明したり比較したりする中で、分数も、整数・小数と共通する加法・減法の計算原理のもとに計算できるのは、分数が整数や小数と同じように、位取り記数法に基づく数であるからであることを理解し、分数を位取り表に位置づけてみるができる。

(2) 追求の構想(10時間)

1次 整数、小数、分数の特徴と共通点を探ろう

それぞれ使われる場所や特徴が違うなあ。
共通点としては、足し算引き算ができるというのがあるよ。

学習計画

- ①分母が違う分数同士の足し算引き算の計算方法を考えよう。
- ②計算方法がわかったら、整数や小数の時と同じとみてよいか考えよう。
- ③整数、小数、分数の関係をまとめよう。

2次 分数のたし算ひき算の計算方法をつくろう

- ◎ 分母が違う分数同士の足したり引いたりする方法を、イメージモデルを使って説明しよう。
一つ分の大きさが同じようにして分けると、分母の同じ分数になり、足したり引いたりすることができるんだな。

3次 分数のたし算ひき算と、整数・小数のたし算ひき算と関係づけよう

- ◎ 整数、小数、分数の足し算引き算の計算方法にはどんな共通点があるのかイメージモデルと位取り表を使って明らかにしよう。
・それぞれの位が単位のいくつ分で表されている。
・位がいっぱいになると上の位の1になる。
整数・小数・分数はこの点からみると同じ数の仲間といえるな。

3. 授業の実際

(1) 分数にも「位」があるのだろうか？

異分母分数の加法・減法の計算方法を見出してきた子どもたちに、「整数、小数、分数の足し算の計算方法は同じといえるだろうか」を課題とした。まず、整数、小数の計算方法を想起



分数の計算方法も同じなのかな？

するように投げかけると、麻衣子さんは、「整数の計算方法は、位をそろえて、それぞれを足します。繰り上がりがある時もあります。」と発言した。「小数も同じだ」という声が挙がった。正太さんは頷いて聞いている。

正太さんは、既存の概念を問題解決に生かすことができる子どもでもある。しかし、獲得した概念を既存の概念と関係づけて一つのものにするとところまでは至らない。本単元では、既存の概念を生かして新たに生み出したものから、既存の概念をとらえ直し新たな概念を創ることを期待した。

次に、整数、小数の計算方法と分数の計算方法を比べていった。予想を確認すると、正太さんは首をかしげながら、「一緒なのかどうかわからない」に手を挙げた。多くの子どもも考え

込んでいる。

そのとき祐二さんが、「分数にもくり上がりがあるよ。仮分数を帯分数にするときがくり上がりじゃないかな？」と発言すると、「ああそうか」とつぶやく正太さん。しばらくすると、手を挙げて、「分数は筆算がないから違うみたいだけど、分数にもくり上がりがあって筆算できれば同じかもしれない」と発言してきた。

そこで、右のような、それぞれの計算方法の要点をまとめた表を提示した。15 + 7、1.8 + 0.6、 $2\frac{1}{2} + 1\frac{2}{3}$ を例に、計算方法が同じかどうか、表を整理する活動を行った。

正太さんは、「くり上がりがあれば行う」に○を書き、「位をそろえる」「位ごとにたす」に「？」を書きこんだ。分数の計算方法を、整数、小数と比較し、「分数にも『位』があるのだろうか」と、分数の計算方法のとらえ直しへの意欲を高めた、感性を働かせる姿である。

$15+7$	$1.8+0.6$	$2\frac{1}{2}+1\frac{2}{3}$
--------	-----------	-----------------------------

	整数	小数	分数
位をそろえる	○	○	?
位ごとにたす	○	○	?
くり上がりがあれば行う	○	○	○

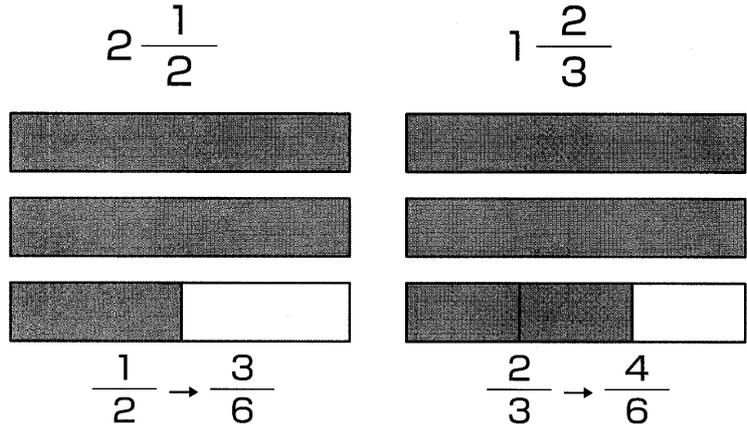
分数にも位があるのだろうか？

(2) 通分が「位をそろえる」ことなのではないか？

「分数にも位を揃えることがあるのか」という問いが生まれたところで、自力解決の場を設定した。正太さんは、ノートに次頁のようなイメージモデルをかいて考えた。

$$2\frac{1}{2} + 1\frac{2}{3}$$

の計算方法



正太さんは、整数部分と分数部分とに分けて足し算をしている。分数部分は数字では通分をしているが図には表していない。授業の終わりのまとめでは、ノートに次のように書いた。

通分をイメージモデルで表せれば、分数のたし算の計算方法も同じと言えそうだ。

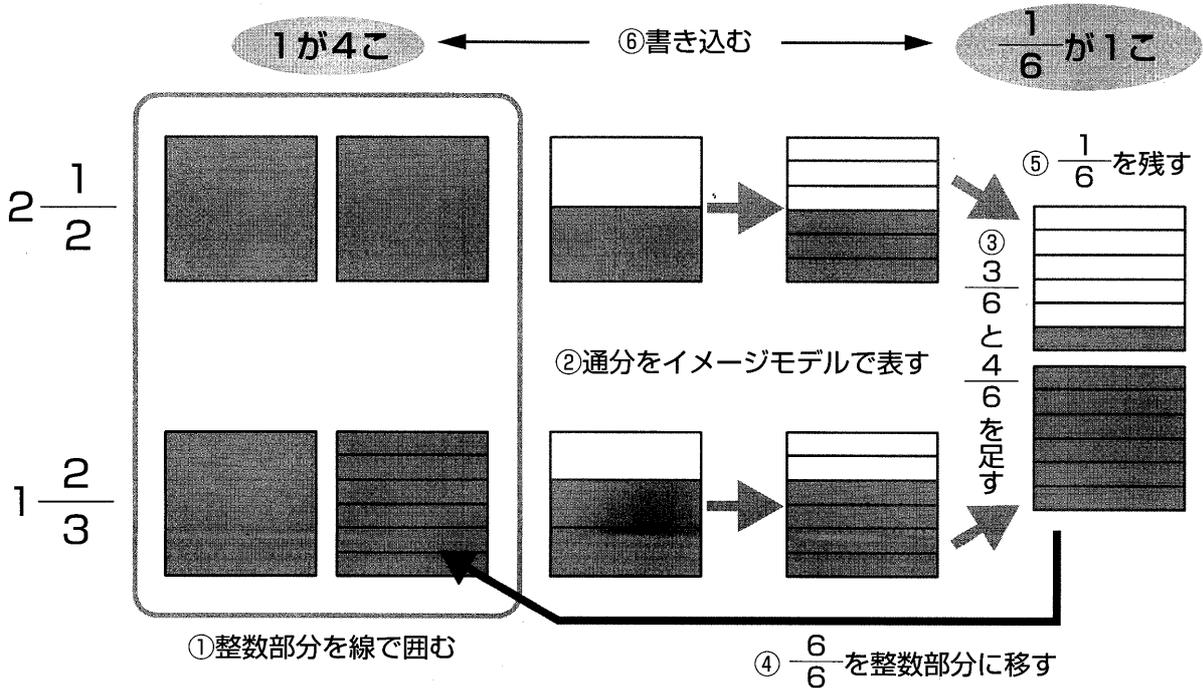
科学的な感性を働かせて、「通分」が「位を揃える」ことなのではないかと、観点を見出し、てきている姿である。

(3) $\frac{1}{6}$ の位があるぞ。分数も計算方法から見ると整数、小数と同じ数なんだ。

イメージモデルで通分を表そうとする正太さん。書き込みや操作がしやすいように正方形を拡大したモデルを渡した。正太さんは、下図のようなイメージモデルを書いて考えてきた。



イメージモデルで通分を表す正太さん



正太さんは、イメージモデルで $2\frac{1}{2}$ と $1\frac{2}{3}$ をかき、整数部分を線で囲んだ。次に、分数部分の $\frac{1}{2}$ と $\frac{2}{3}$ をそれぞれ6等分し、 $\frac{3}{6}$ と $\frac{4}{6}$ を足して $\frac{7}{6}$ をかいた。そのうちの $\frac{6}{6}$ は整数部分へ移動するように書き、 $\frac{1}{6}$ を残した。ノートには、「1が4こ」、「 $\frac{1}{6}$ が1こ」と書き込んだ。

仮分数から帯分数へ直す操作を通して、通分は「位をそろえる」と同じであることを検証してきた、科学的なもの見方・考え方を働かせる姿である。

その後、考えを紹介し合う中で、大介さんが下図のような筆算で計算する考えを発表した。

	一の位	$\frac{1}{6}$ の位
	2^1	$\frac{3}{6}$
+	1	$\frac{4}{6}$
	4	$\frac{1}{6}$

大介さんの筆算



うなずきながら聞く正太さん

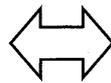
正太さんは、大きく頷いて聞いていた。そして、ノートのまとめに、次のように書いた。

分数にも $\frac{1}{6}$ という位があった。分数は違ったものに見えていたけど、計算方法から見ると、整数、小数と同じなんだ。

正太さんは、本単元を通して、次のような数理の再体系化を図ったのである。

【正太さんの既存の概念】

筆算で計算できる整数、小数と、通分で計算する分数は違う数だ。



【正太さんのとらえ直した概念】

位をそろえる、くり上がりくり下がりがあるといことからすると、分数も整数、小数と同じ数だ。

(4) 「科学的な感性、科学的なもの見方・考え方」の評価

科学的な感性についての評価は、授業中に聞いたイメージモデルの変化からみようとした。分数の加減の計算方法をイメージモデルで表し、分数も「位をそろえる」「位ごとにたす(引く)」「くり上がり(繰り下がり)があれば行う」という方法で言えそうだと考え、正太さんが、イメージモデルを描きながら「通分が位をそろえることではないか」と見通しをもった姿は、科学的な感性を働かせている姿と評価できる。

科学的なもの見方・考え方の評価は、整数、小数、分数の関係を表すパフォーマンステストからみようとした。正太さんのノートには、次頁のような関係づけがみられる。

○計算方法からみると、「位をそろえる」「位ごとにたすひく」「くり上がり、くり下がり」という点で共通。

○位からみると、分数も「 $\frac{1}{12}$ の位」など位で表せる。

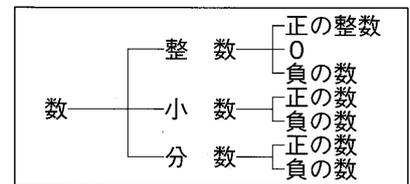
正太さんが、分数を整数・小数と関係づけ、分数は位取り記数法で表されるという点で、整数、小数と共通であるという体系的な概念を創りあげていると評価する。

Ⅲ 成果と課題

1. カリキュラム改善の視点から

数量・図形にかかわる体系的な概念を創りあげる授業を具現するために、本研究では、より一般性の高い内容として「異分母の帯分数の加法・減法」を付加した。これにより、どの数も計算上では「位を揃える」ことが必要なこと、分数にも位があり、整数、小数と同様に位取り記数法としての数であることをとらえ直すことにつながった。これが中学校になめらかにつながる。

中学校数学の「正の数・負の数」の学習では、整数だけを例にして導入している。小学校で、整数、小数、分数を再体系化した子どもは、右のようなとらえをしていくことが期待できる。



また、文字式で「 $5 - 4x - 7 + 3x$ 」は「 $7x + 2y - 4x + 3y$ 」

に比べて3倍も誤答が多くなっている現状がある。後者は、「xが7こ」「yが2こ」と同類項で分けやすいのに比べて、前者は「1が5こ」「xが4こ」と項を揃えにくいからと考えられる。位を揃えるという観点で再体系化した子どもは、項を揃えて正しく計算することが期待できる。

2. 授業改善の視点から

算数科における、拡張、絞込み、統合の姿が見えてきた。本単元での拡張は、正太さんが、分数の加法の計算方法を、整数、小数と比較し、分数にも「位」があるのだろうか、分数の計算方法へのとらえ直しへの意欲を高めた姿である。分数の加法・減法の計算方法を単独で取り扱うのではなく、計算原理として共通性がある既習の整数・小数とかかわらせて取り扱うことの大切さが見えてきた。

次に、絞込みは、正太さんが、「通分」が「位をそろえる」ことなのではないかと、観点を見出してきている姿である。ここでは、イメージモデルで追求を進める中で、限界性から問いを焦点化することの有効性が見えてきた。

そして、統合は、科学的なものの見方・考え方を働かせて、仮分数から帯分数へ直す操作を通して、通分は「位をそろえる」ことと同じであることを検証してきた姿である。今回、イメージモデルを厚紙で考えて、結果をノートに書く子どもが多かった。操作の過程が残せるような教材・教具の工夫の必要性が見えてきた。

<主な参考文献>

- 杉山 吉茂編 1997 「少なく教えて多くを学ぶ算数指導」明治図書
- 杉山 吉茂 1990 「力がつく算数科教材研究法」明治図書
- 片桐 重男 1995 「数学的な考え方を育てる『加法・減法』の指導」明治図書
- 岡部 恒治/西村 和雄 2005 「子どもの学力を回復する」数研出版
- 新算数教育研究会 2000 「新算数講座⑥第6学年/授業の展開」