新潟大学教育人間科学部数学教室,『数学教育研究』, 第 41 巻, 114-136, 2006.

数学的モデリングにおける数学的な考え方に関する研究

新潟大学教育人間科学部 和田ゼミナール
宮村 徹　近藤 治弥　古川 歩佳
本間 沙恵　宮口 正規　山岸 辰徳

はじめに

2004 年に『OECD 生徒の学習到達度調査(通称 PISA)2003 年調査国際結果報告書』が発行された。この中で, 数学的リテラシー(数学の活用能力)が低下したという事実が示されている。これは, 数学に存在する「創造」と「応用」という 2 つの側面のうち, 一般的な算数・数学の授業においては, 主に創造の側面の育成に重点が置かれていることが影響していると考えられる。これに対し, 応用の側面の育成を重視した実践として, 数学的モデリングがある。しかし先行研究から, この数学的モデリングは, 子どもの思考面にあまり焦点が当てられておらず, そのとらえも明確でないため, 検討の余地がある。

また, 算数・数学教育の目標の 1 つとして数学的な考え方の育成がある。この数学的な考え方にも,「創造」と「応用」の 2 つの側面があるが, その一般的なとらえは創造の側面に重点が置かれており, 応用の側面は薄い(和田, 2005, pp.7-8)。したがって, 数学的な考え方を応用の側面から検討する余地がある。

以上のように, 数学的モデリングには「考え方に焦点を当てる必要があること」, 数学的な考え方には「応用的側面に拡張する必要があること」といった課題がそれぞれに存在する。そこで, 数学的モデリングの過程において使われる数学的な考え方を明確にとらえ, これに焦点を当てた指導を行うことにより, 双方の課題を同時に解決でき, また, 数学的リテラシーの育成も可能になると考える。よって本研究では, 数学的モデリングの過程において使われる数学的な考え方を示し, それらを子どもから引き出すための手立てを検討し, その有効性を考察することを目的とする。第 1 章では数学的モデリングについて, 第 2 章では数学的な考え方について概観する。次に, 第 3 章で数学的モデリングにおける数学的な考え方について提案し, その際に用いられる数学的な考え方を引き出すための手立てについて検討する。そして, 第 4・5 章でその手立ての有効性と数学的モデリングを授業に取り入れる利点について実践的に検討する。

第 1 章　数学的モデリングについて

ここでは, 主として長崎(2001)の数学的モデリングについて概観し, 数学的モデリングを授業に取り入れる利点や授業における数学的モデリングの課題について述べる。

1. 数学的モデリングとは

数学的モデリングとは, 数学的モデル化の過程ともいわれ, 社会における現象や問題を算数・数学で扱う際, それらを算数・数学の対象に変換し, その上で算数・数学の手法を使って処理し, さらにその結果を社会の場面に照らして検証するという一連の流れである(長崎, 2001, p.16)。

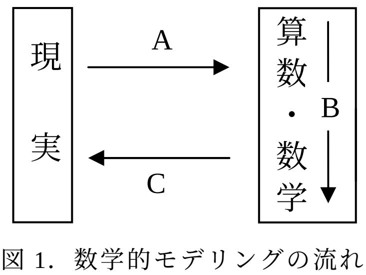


図 1. 数学的モデリングの流れ

この流れは, 図 1 のように表すことができる。以下, 数学

的モデリングの段階について, 長崎(2001, p.16)に基づいて検討する。なお, 本研究では, 長崎氏のいう「社会の現象」を「現実事象」,「社会」を「現実」とする。

A(第 1 段階)：現実事象を数学の対象に変える

この段階では, 現実事象における問題を算数・数学で処理可能な状態に変えるために, 単純化, 理想化, 近似, 仮定の設定等を行う(熊谷, 2002, p.22)。また, そのようにして, 現実事象を目的に合った数学的な問題場面に作り替えることは定式化ともいわれる(西村, 2001, p.3)。長崎(2001, p.16)は, この段階をさらに 4 段階に分けている。

ⅰ：仮定をおく　ⅱ：変数を取り出す　ⅲ：変数を制御する　ⅳ：仮説を立てる

B(第 2 段階)：対象を数学的に処理する

この段階では, 第 1 段階で定式化された現実事象の問題を, 数学的に解決していく。その際, 既習事項を活用しながら, 問題の解決を図り, 算数・数学における解を見つける(熊谷, 2002, p.22)。この段階は次の 2 段階に分かれている(長崎, 2001, p.16)。

ⅰ：表・式・グラフ・図等で表現する　ⅱ：操作を実行する

C(第 3 段階)：現実に照らして検証する

この段階では, 第 2 段階で得られた解が, 現実事象では一体どのような意味をもつのか, 現実事象の問題場面に立ち返って検証する(熊谷, 2002)。この段階は次の 2 段階に分かれている(長崎, 2001, p.16)。

ⅰ：予測・推測をする　ⅱ：修正する

2. 授業における数学的モデリングの利点

先行研究の授業実践や, 長崎(2001), 池田(2002), 池田・山崎(1993)などから, 数学的モデリングを授業に取り入れた場合, 以下のような利点があると指摘できる。

まず, 現実事象における問題を数学で解決する能力(数学的モデリング能力)を育成できる点である。子どもは現実事象における問題を算数・数学で解決する経験を積むことで, その方法を身に付けることができ, 数学的モデリング能力を育成することができる。

また, 子どもの興味・関心を十分に引くことができるという点である。子どもにとって身近な現実事象を用いることで, 算数・数学に対して苦手意識をもっている子どもでも抵抗なく, 意欲的に課題に取り組むことができる。

このように数学的モデリングを授業に取り入れた場合, 主にこの 2 つの利点が挙げられる。その他として, 数学を現実に応用しようとする意識をもたせることができる点, 文化としての数学や社会, 身の回りの現象に興味をもたせることができる点なども挙げられる。

3. 授業における数学的モデリングの課題

池田(2004, p.5)は, 数学的モデリングを促進する考え方は, 小・中・高等学校で数学的モデリングの指導を受けずに自然に育成されるものではないことを指摘している。しかし, 数学的モデリングを促進する考え方に焦点を当てている先行研究は少なく, そのとらえも明確ではない。そこで, 数学的モデリングが円滑に行えるようにするために, 数学的モデリングにおける考え方を明確にとらえ, 育成していくことが課題である。

第 2 章　数学的な考え方について

ここでは，主として片桐(2004)の数学的な考え方について概観し，特に数学の方法に関係した数学的な考え方について検討する。

1．数学的な考え方の意味

(1)数学的な考え方の内包的なとらえ方

数学的な考え方の内包的なとらえ方を，和田氏は次のように述べている。「数学的な考え方の内包的なとらえ方として，中島(1981)のものが有名である。氏は，数学的な考え方について，「端的にいって，算数・数学にふさわしい創造的な活動を自主的に行うことができることを指している」」(和田，2005，pp.7-8)。

(2)数学的な考え方の外延的なとらえ方

数学的な活動をする際には，様々な方法や数学的な内容が使われる。そして，これらの方法や内容には，すべて数学的な考え方があるとみるのが適当である。また，数学的な考え方は,それぞれの問題解決に必要な知識や技能に気付かせ,それらを導き出す力である。さらに，これはこのような知識や技能を駆り出す原動力であるとみることができ，また，数学的な考え方の中には，必要な数学的な考え方を引き出す，それらの基になる原動力とみられる考え方(数学的な態度)もある(片桐，2004，pp.36-37)。

このような考えの基に，片桐氏は数学的な考え方を具体的に把握するために，次の 3 つのカテゴリーに分類している (片桐，2004，p.37)。

Ⅰ　数学的な態度

Ⅱ　数学の方法に関係した数学的な考え方

Ⅲ　数学の内容に関係した数学的な考え方

2．数学的な考え方と問題解決の過程

(1)問題解決による指導

数学的な考え方は子どもが問題解決をする際に使われ，そして問題解決を行う中でそれを伸ばしていくことができる(片桐，1972，p.5)。よって，数学的な考え方を育成するには，問題解決の過程を通して行うことが適していると考えられる。

(2)数学の方法に関係した数学的な考え方

片桐(2004 ，pp.38-39)は数学の方法に関係した数学的な考え方を示しているが，それは同列的に挙げられており，まだ構造的にとらえる余地がある。そこで，和田(2005，p.11)を参考にし，数学の方法に関係した数学的な考え方を，数学の問題を解決していく際の過程(矢印)に対応させて図 2 のようにとらえた。

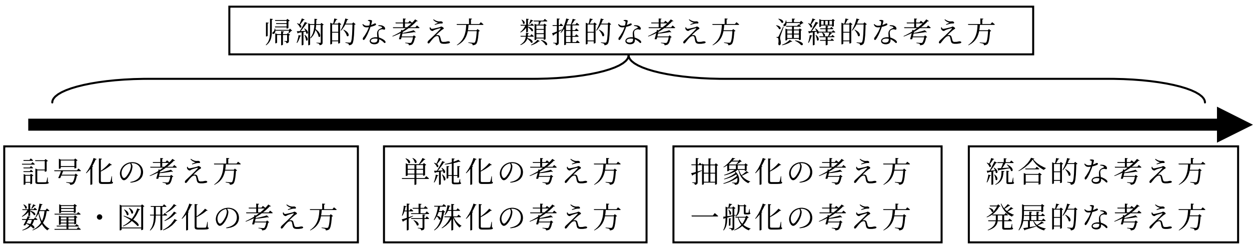


図 2．問題解決の過程における数学的な考え方

3. 数学的な考え方の課題

先に述べたように, 数学的な考え方には,「創造」と「応用」という 2 つの側面がある。「創造」は新しい算数・数学の内容を学習するときに重要となり,「応用」は学習した算数・数学を応用するときに重要となる(和田, 2005)。

上述した数学的な考え方のとらえ方は,「創造」という側面からのとらえであるので,「応用」という側面からの検討の余地が残されている(和田, 2005, p.8)。

第 3 章　数学的モデリングにおける数学的な考え方について

前述したように, 数学的な考え方は「応用」の側面からの検討の余地がある。そこで「応用」の側面を検討すると, 第 1 章で述べた数学的モデリングの第 1 段階(A)と第 3 段階(C)における考え方は,「創造」の側面においては明確にされていない「応用」の側面に固有な考え方であろう(和田, 2005, p.9)。また, 従来の数学的モデリングでは, 数学的な方法や考え方が明確にとらえられていないと考えられる。そこで, 片桐氏の数学的な考え方の構造を, 数学的モデリング過程にまで拡張し, とらえ直す必要がある。

1. 数学的モデリングにおける数学的な考え方

(1)数学的モデリングと数学的な考え方

数学的な考え方は算数・数学の問題を解くときだけにはたらくのではなく, 現実事象の問題を算数・数学の問題としてとらえる場面や, 算数・数学の事象を現実場面に照らして考える際にもはたらくと考えることができる。なぜなら, 片桐氏の数学的な考え方にⅠの数学的な態度が入っていることから, 数学的モデリングの各段階にも数学的な考え方がはたらくととらえることが可能になる(和田, 2005)からである。よって " 数学的モデリングにおける数学的な考え方 " を育成することを考えていく必要がある。

そこで, 数学的モデリングの第 1 段階と第 3 段階においてはたらく数学的な考え方を" 新たな数学的な考え方 " として設定し, それを検討していく。

(2)新たな数学的な考え方

本研究では, 長崎氏が示した, 第 1 段階を細かく 4 つの段階に分けたものと第 3 段階を参考にし,「(ⅰ)仮定をおく」段階ではたらく考え方を " 理想化の考え方 ",「(ⅱ)変数を取り出す」「(ⅲ)変数を制御する」段階ではたらく考え方を " 条件整理の考え方 ",「(ⅳ)仮説を立てる」段階ではたらく考え方を " 仮説的な考え方 ", 第 3 段階ではたらく考え方を " 現実化の考え方 " ととらえ, 以下のように規定する。なお, 理想化の考え方や条件整理の考え方における条件とは, 現実事象の問題で考えられる様々な要素を意味している。

○数学的モデリングの第 1 段階で用いられる数学的な考え方

条件整理の考え方

現実事象における問題を数学的に考察するために, その事象から様々な条件を挙げた上で, その中で問題解決に必要な条件だけを選び出し, 思考の対象を明確にしようとする考え方である。この条件整理の考え方は次の段階をふむ。

①<u>条件を挙げる</u>

問題場面を明確にするために, 現実事象における問題にかかわる様々な条件を, 思いつくままに挙げる。

②必要な条件を選び出す

①で挙げた条件の中から目的に応じ，数学的に処理するために必要な条件だけを選び出す。その際，他の条件を排除する作用をも伴う。

理想化の考え方

現実事象における問題を数学的に考察するために，その事象における条件や性質が数学的な定義や原理・法則を満たしているような理想的な状態や，条件が一定であるような理想的な状態としてとらえようとする考え方である。

仮説的な考え方

問題の解決に至るには条件が不十分である場合，明確な根拠があるわけではない仮の条件を付け加えることによって，一応の解決をしていこうとする考え方である。

○数学的モデリングの第 3 段階で用いられる数学的な考え方

現実化の考え方

数学的に考察した結果がどのような意味をもつのかを，与えられた現実事象の問題場面に立ち返って検証しようとする考え方である。

上記のように新たな数学的な考え方を規定したが，片桐氏の示す数学的な考え方において，理想化の考え方と条件整理の考え方は，抽象化の考え方に含まれているものである。そこで，片桐氏の示した抽象化の考え方を，理想化・条件整理の各考え方を除いた上でとらえ直し，さらにそこに含まれている具体化の考え方についても独立させて新たな考え方とする。それら抽象化・具体化の各考え方は以下に示す通りである。

抽象化の考え方

いくつかのものに共通な性質を引き出そうとする考え方である。その際，他の性質を排除する作用(捨象)も伴う。

具体化の考え方

抽象的・一般的な概念や性質について，具体例を集めたり，具体的な場合に当てはめて考えたりすることによって，それらの意味を明確にしたり，説明したりしていこうとする考え方である。

(3)数学的モデリングにおける数学的な考え方

上記のことをふまえ，数学的モデリングの過程に問題解決の過程(片桐，1972，pp.3-5；2005，pp.114-118)を適応させて考え，数学的な考え方の育成を目指した数学的モデリングの段階とその流れをそれぞれ図 3，図 4 のように設定した。

2. 問題設定段階における手立て

数学的モデリングを取り入れて授業を行う際，一般的な授業と大きく異なる点は，現実の事象を算数・数学の問題に定式化すること(問題設定)である。数学的モデリングの先行研究(熊谷, 2004)にも示されているが, 子どもは解決すべき現実事象の問題に直面したとき，

段階	意味	主に使われる数学的な考え方
①問題設定	必要感や目的の探求に応じて，個人がおかれている場面を診断・分析し，目的にあった問題を形成する。	理想化の考え方 条件整理の考え方
②仮説設定	問題を解決しうる仮説をたてる。	仮説的な考え方
③解決の実行	条件や仮説を基に，問題の解決を試みる。	帰納的な考え方　図形化の考え方 演繹的な考え方　記号化の考え方 類推的な考え方　単純化の考え方 数量化の考え方　特殊化の考え方
④論理的組織化	具体的問題の解法から抽象的一般的原理法則が作られ，解法の論理的骨組みを作る。	帰納的な考え方　一般化の考え方 演繹的な考え方　抽象化の考え方 類推的な考え方　具体化の考え方
⑤解決の検証	数学的処理の結果を現実場面に照らして検証する。	現実化の考え方
⑥発展的学習	問題の解決を基にして，さらに新しい創造的学習を進める。	統合的な考え方 発展的な考え方

図 3．数学的な考え方の育成を目指した数学的モデリングの段階

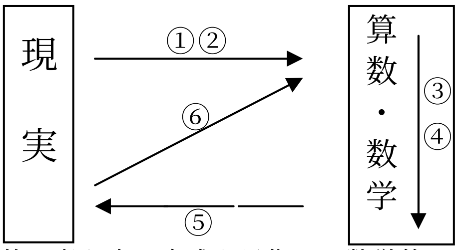


図 4．数学的な考え方の育成を目指した数学的モデリングの流れ

まず困難を感じる。これは，現実事象の問題と算数・数学の問題には大きな違いがあり，子どもにはその違いを埋めるための技術や方法が身に付いていないため，どのように対処すればよいかわからないからである。そこで，数学的モデリングを取り入れた授業において数学的な考え方を育成するには，問題設定段階ではたらく数学的な考え方を子どもから引き出し，身に付けさせる必要がある。このことをふまえ，特に数学的モデリングの問題設定段階に焦点を当て，以下のように教師の手立ての観点を設定する。

(ｉ)子どもに目的意識をもたせる

目的意識は条件整理の考え方や理想化の考え方を引き出すための原動力として不可欠なものである。そこで，題材選択や視聴覚教材を工夫し，どうして解決しなければならないのかということを子どもに考えさせることによって，問題を解決しようという目的意識をもたせる。

(ⅱ)子どもに条件整理の考え方を促す

現実事象の問題を扱う際，子どもは問題解決に用いる条件の取捨選択を正しく行うこ

とができない。そこで, まず問題にはどのような条件がかかわっているのかを考えさせ, その後, それらの条件の中で問題の解決にはどの条件が必要かを考えさせる。

(iii)子どもに理想化の考え方を促す

現実事象の問題を扱う際, 子どもは現実事象の条件をそのまま解決に用いようとし, 困難に陥ってしまう。そこで, 活動や視聴覚教材を用いることで, 理想化の必要性に気付かせ, 理想化の考え方を促す。

このような手立てを用いて授業を行うことで, 問題設定段階における数学的な考え方を子どもから引き出し, 育成していくことができると考える。

第 4 章　実践的検討

Ⅰ　小学校授業実践

1. 目的

第 3 章で述べたように, 児童が目的意識をもち, 自ら理想化や条件整理をすることによって, 現実事象の問題を算数の問題にすることができると考えた。そこで, 数学的モデリングにおいて焦点を当てた問題設定段階において, 児童の目的意識と問題設定段階で使われる 2 つの数学的な考え方について以下の具体的な 4 つの手立てを用意し, それらを検討することを目的とし, 小学校の授業実践を行った。

(1)<u>手立て 1：目的意識をもたせるために, ビデオを提示する順番を工夫する</u>

本授業では, ①走者Ａが直線 100m を走っているビデオ, ②走者Ｂが直線 100m を走っているビデオ, ③走者Ａと走者Ｂが直線 100m を競走して同着となるビデオ, ④走者Ａと走者Ｂが曲線で競走して, 外側を走っていた走者Ｂが負けるビデオ, の順で提示する。つまり①～③を見て児童が予想する「この 2 人は速さが同じだから, 次の競走でも同着になるに違いない」ということと, ④の結果「同着ではない」ということがずれるようにする。そうすることで, 児童が疑問をもち, 目的意識をもって課題に取り組んでいけるようにする。

(2)<u>手立て 2：条件整理の考え方を促すために, 外側の走者Ｂが負けた原因を考えさせる</u>

「負けた原因を考えさせる」ことにより, 現実場面で問題となる条件に目が向くようにする。手立て 1 により, 負けたという事実は子どもにとっての疑問であることから, 自ら原因を考えていこうとする。本授業では, 児童に条件整理の第 1 段階として, 負けた原因だと思うことを自由に考えさせ, 挙げさせる。そして, 条件整理の第 2 段階として, 負けた原因として最も適当な条件を選択させる。その際, どの条件も適当とすることも予想されるため, さらに条件 1 つ 1 つを細かく考えていく。その結果, 負けた原因となる条件は「速さ」と「長さ」の 2 つに帰着する。

(3)<u>手立て 3－①：理想化の考え方を促すために, 大きく差がついたという事実に着目させる</u>

ビデオで「大きく差がついたという事実に着目させる」ことにより,「速さ」という条件以上に「長さ」という条件が負けた原因として重要であることに気付くようにする。また, 長さを考える際には,「もし速さが同じなら, 負けた原因は長さである」というように条件付きであることを, ビデオ③を振り返ることにより気付くようにする。

(4)手立て 3－②：理想化の考え方を促すために提示する図を工夫する

本授業では，理想化すべき部分に目を向けやすくするために，提示する陸上競技用トラックの図において，コーナー(半円)の部分に直径のみを示しておく。そうすることで，児童が「自分たちで決めた走る道のりは，歪んでいるけれど，道のりの長さを調べるには半円として考えたらよさそうだ」と，理想化して考えていけるようにする。

詳しい指導内容は,【参考資料】小学校授業実践を参照。

2．分析方法

本授業実践では，問題設定段階ではたらく数学的な考え方を引き出すために，4 つの手立てが有効にはたらいたかを分析する。その際には，クラス全体の児童を総合して分析する。また，担当教諭に，算数の成績で上位群，中位群，下位群に属する児童の中から 1 人ずつ抽出してもらい，その 3 人を観察対象児童とする。また授業の様子だけでなく，ワークシートの記述，授業の感想からも分析を行う。以下に，それぞれの手立てに対する分析の視点及び方法を示す。

手立て	分析の視点	分析の方法
1	ビデオの結果に驚き，疑問を抱いているか。	発言，つぶやき 行動
2	負けた原因になりそうなものを自分の考えで挙げているか。	ワークシート
3－①	速さが同じということを仮定し，長さに焦点を当てているか。	ワークシート
3－②	走る道のりを歪みのない直線と曲線としてとらえ，走る位置を一定とする必要性を感じているか。	発言，つぶやき 行動

3．結果

(1)ワークシートの記述及び，感想の結果

①条件整理におけるワークシートの記述(対象児童 36 人)

【ビデオ④で走者Ｂが負けた理由】

・スタート位置は同じでＢさんが外側に，Ａさんが内側にずれていった。(7)

・Ａさんは内側を走っていてＢさんは外側を走っていたから。(6)

・走るレーンが違うので 2 人の距離が違う。(23)

②理想化におけるワークシートの記述(対象児童 36 人)

【2 人の速さが一定と仮定したときの走者Ｂが負けた 1 番の原因】

・外側を走っていたから。(3)

・Ａさん，または，Ｂさんが走るレーンがずれていった。(1)

・走る距離が違ったから。(31)

・走る距離を同じにしていなかったこと。(1)

③感想の結果(対象児童 36 人　複数回答)

(ア)難しい問題だった。(15)

(イ)解き方がわかった。納得できた。(13)

(ウ)おもしろかった。楽しかった。(10)

(エ)陸上競技場の仕組みがわかった。(3)

(オ)計算に苦労した。(2)
(カ)速さのことや円周率のことがわかった。(2)
(キ)陸上競技場は細かいところまで計算していてすごいと思った。(2)
(ク)また，こういう問題をやりたい。(1)
(ケ)1 コースと 4 コースの差はけっこう大きいと思った。(1)
(コ)これを機に算数を好きになれたらいいなと感じている。(1)
(サ)ビデオを使った授業は滅多にないので楽しかった。(1)
(シ)平等にするのに苦労した。(1)
(ス)競技場の工夫に驚いた。(1)

(2)授業分析の結果

①クラス全体の実態

授業の様子を収めたビデオより，児童は全体的に興味・関心をもち，積極的に授業を受けていたことがわかる。教師が用意したビデオを興味深く視聴し，そこから考えられる条件に目を向けていた。また対象学級の児童は，トラックを走るという経験が豊富で，必要な条件が早いうちに距離に絞られた。理想化することにも反対はなかった。

②観察対象児童の実態

(ア)上位の児童

まず，手立て 1 では，ビデオを興味深く視聴しており，ビデオに関して積極的に多くの発言をしていた。次に，手立て 2 では，すぐに原因を考え，自分の言葉でワークシートに記入していた。そして，手立て 3－①②では，それぞれ“2 人の速さは同じ”“走る道のりは半円”としてとらえており，すでに自ら理想化を行っていたが，理想化の必要性を感じているような発言や態度は見られなかった。

(イ)中位の児童

手立て 1 では，時々下を向いていたり，鉛筆で遊んでいたりと，ビデオを見てはいるが興味をもって見ているような様子は見られなかった。また，教師の問い掛けに対しても反応はなく，疑問や目的意識をもった様子も見られなかった。次に，手立て 2 では，すぐに負けた原因として「距離」をワークシートに書いていた。そして，手立て 3－①では，速さが同じという仮定に同意しているが，理想化の必要性を感じている様子は見られなかった。また，手立て 3－②では，理想化することには同意していたが，手立てによって半円としてとらえたのかは，判断できなかった。

(ウ)下位の児童

手立て 1 では，ビデオには興味を示し，じっくりと見入っていたが，その内容に疑問を抱いたり,不思議さを感じたりすることはなく,目的意識をもった様子は見られなかった。次に，手立て 2 では，自らの力で走者Bが負けた原因をビデオの中から選び出すことができていた。そして，手立て 3－①では手立てを講じる前に，すでに速さを一定としてとらえていた。また，手立て 3－②では，理想化する必要性を自ら見出すことはできていなかったが，理想化することには抵抗は示さず，その有用性にも気付いていた。

4. 考察

(1)手立ての有効性

①手立て 1

「ビデオを提示する順番を工夫する」ことは，おおむね有効であったといえる。それは，

クラス全体を眺め, ビデオを興味深く視聴している様子がうかがえたからである。また, 教師とのやりとりを見てもビデオの順番は適切だったことがわかる。しかし, ビデオを使ったことで必ずしも自分の問題としてとらえていたかということは判断できない。なぜなら, 観察対象児童(中位, 下位)の記録から, うつむいたり, 手いたずらをしていたりしたことがわかるからである。これは, ビデオを見る動機付けが不十分であったことが原因と考えられる。

②手立て 2

まず,「負けた原因を考えさせる」というのは,「問題に関係のある条件を挙げる」ための手立てとして有効であったといえる。それは, 手立て 1 で, 児童の予想を裏切る結果を示すことで, ビデオの中から負けた原因となる違いを見つけようとする姿から見とることができるからである。実際に, 観察対象児童 3 人とも教師の指示で原因をすぐにワークシートに書き込んでおり, その他の児童も自分の言葉で原因を書き込んでいた。ただ, 負けた原因が距離に絞られたため, 多くの条件が挙がることはなかった。しかし, その前の走者Ａ, Ｂそれぞれの特徴を挙げるときに, 多くの特徴となる条件が挙がったことから, 子どもには条件を挙げていく力が十分に身に付いていることが予想できる。

次に,「挙げた条件から必要な条件を選択する」場面を設定しようと計画していたが, 実現できなかった。これは, 第 1 段階で適切な条件しか挙がらなかったためである。教師がゆさぶりをかけても, 児童の思考が揺らがなかったことから, 児童が経験から適切な条件を導ける段階にあったと考えられる。

しかし最終的に, 必要な条件を児童が自ら挙げ選択していったことから, 手立てとしては有効であったといえる。

③手立て 3－①

「大きく差がついた事実に着目させる」場面は, 授業では実現できなかったため, 手立ての有効性については言及できない。このような状況になった原因は, 条件整理で 1 つの条件しか挙がらなかったことである。教師から, 児童が「2 人の速さは同じ」ととらえている(理想化する)かどうか問うている場面があるが, 児童の反応からみて無意識のうちに「2 人の速さは同じ」と理想的な状態で考えていたと推測される。初めのビデオで強調したこともあり, 多くの児童が「速さは同じ」場合を考えることに抵抗を示さなかった。

④手立て 3－②

「提示する図を工夫する」ことは, 手立てとしてはおおむね有効であったといえる。自分たちが決めた走る道のりをトラックのラインと同様に円周として考える(理想化する)ことが円滑に行えた。このことから, 概形を理想化することは, 児童が理想的なものとしてイメージできる手がかりや経験があれば容易に可能であると予想される。

(2)総合的考察

本授業の, 問題設定段階では, 多くの児童が興味・関心をもち, 条件整理・理想化の考え方に少々とまどいながらも順調に進むことができた。このことから, 教師が念入りに手立てを用意すれば, 現実事象の問題を算数の舞台に乗せることは可能だということがわかる。しかし, 現実事象の問題を扱っているため, たとえ算数の問題になったとしても, 今回のようにその問題が児童にとって難しい場合が考えられる。したがって, 数学的に解決する場面における手立てについても段階的に準備することが必要である。

解決の検証の段階では，児童の感想を見ると，検証でわかったことからくる驚きや喜びなどといった内容を書いていたものは 36 人中 8 人であった(感想の結果のエ，キ，ケ，シなど)。しかし，説明やビデオの編集が不十分だったにもかかわらず，クラスの約 1/4 もの児童がこのような感想を書いていたことは，児童が算数と現実をつなぐことができる可能性のあらわれではなかろうか。つまり，算数の授業を通して，現実場面に算数が潜んでいることに気付き，驚きや喜びなどの感動を児童が味わうことで，日常生活の中にある算数に興味を抱き，目を向けていくことができるのではないかということである。

(3)問題点

条件整理の考え方では「条件を挙げること」と「挙げられた条件から必要な条件を選ぶこと」がともに重要である。しかし，本授業では適切な条件しか挙がらなかったため，条件を選ぶ活動はできていない。これでは児童が条件整理の考え方のよさを実感することができないであろう。そこで，まず児童の実態を把握し，簡単には条件を絞れないような現実場面を提示する必要がある。そして，さらに教師が意図的に，児童が条件を複数挙げることができるような工夫をする必要がある。

また，条件を理想化する場面では，児童は教師の指示や問い掛けに対し，抵抗なく理想化することができた。しかし，児童は理想化する必要感をもっていたのだろうか。クラス全体からは判断できないが，少なくとも観察対象児童 3 人からはそのような反応は見られなかった。その原因として，理想化しなければ考えることが困難であることを経験する場が設定されていなかったことや, 理想化する程度の低い(子どもの経験や教師の手立てにより, 明らかに理想的な状態としてとらえられる)条件であったこと等が考えられる。したがって, 児童が「自ら理想化してみよう」という意識をもつための工夫を見直す必要がある。

Ⅱ　中学校授業実践

1. 目的

小学校授業実践と同様に，生徒が目的意識をもち，自ら理想化や条件整理をすることによって，現実事象における問題を数学の問題にすることができると考えた。そこで，生徒にとって身近なラッピングに関する問題を扱い，これを数学を用いて解決していくことを授業のねらいとし，そのためにどのようにして課題を設定していくのかをこの授業では重視する。そして，生徒にその課題の設定を促すために，以下の 3 つの手立てを用意し，その手立てが有効であったかを考察することを本授業実践の目的とする。

(1)<u>手立て 1：目的意識をもたせるために，ビデオや実物を使用する</u>

ビデオ①，②を見せ，実際にビデオに登場した筆箱や包装紙といった具体物を提示することで興味・関心をもたせ，問題意識をもちやすくする。また問題に対する予想をしたり実際に活動したりすることで，解決の必要性を感じさせ，問題解決に向かう目的意識をもたせる。

(2)<u>手立て 2：条件整理の考え方を促すために，ビデオを見せ，筆箱を包む活動を行わせる</u>

ビデオ①を見せ,「自分なら何を基準に包装紙を選ぶか」という発問をすることによって，生徒をビデオの中の主人公と同様の立場に立たせ，包装紙を選ぶ際の基準を考えやすくさせる(手立て 2－①)。その後，ビデオ②の中で主人公が選んだ包装紙では筆箱を包むことができないことを，体験を通じて感じさせることで，包むためにはどのような条件がかかわ

ってくるのかを考えさせ，条件の整理を促す(手立て 2－②)。

(3)手立て 3：理想化の考え方を促すために，筆箱の大きさを測らせる

筆箱の大きさを測らせることで，筆箱の凹凸に着目させる。そして，その凹凸が問題を解決していく上で困難であることを感じさせる。そこで,「どのような形として考えていくか」という発問をすることで，理想化の考え方を促す。

詳しい指導内容は,【参考資料】中学校授業実践を参照。

2．分析方法

本授業実践では，上記の 3 つの手立てが，問題設定段階ではたらく数学的な考え方を引き出すために，有効にはたらいたかを分析する。分析の際には，クラス全体の生徒を総合して分析する。また，担当教諭に，数学の成績で上位群，中位群，下位群に属する生徒の中から 1 人ずつ抽出してもらい，その 3 人を観察対象生徒とする。そして，授業中における発言やつぶやき，取り組みなどの様子に加え，ワークシート，感想の記述からも分析を行う。以下に，それぞれの手立てに対する分析の視点，及び，方法を示す。

手立て	分析の視点	分析の方法
1	・提示された包装紙で筆箱を包めるか包めないかを考えている積極的な反応が見られるか。	発言，つぶやき，行動
2－①	・自分で包装紙を選ぶ際に基準となる条件を 3 つ以上挙げられているか。	ワークシート
2－②	・前段階で挙げられた条件の中から，問題の解決に必要な条件のみを選び出すことができているか。	ワークシート
3	・筆箱の大きさを測ることで，筆箱にある凹凸などの理想化すべき条件に着目し，理想化しようという発言をしているか。 ・教師と他の生徒のやりとりを聞き，うなずきやつぶやきなどの賛成の行動を示しているか。	ワークシート，発言，つぶやき，行動

3．結果

(1)ワークシートの記述等，及び，感想の結果

①1 時間目のワークシートの記述

【包装紙を選ぶときに考えること】

・条件を 3 つ以上挙げている…16/22

・条件を 2 つ挙げている…4/22

・条件を 1 つ挙げている…2/22

【包めるか包めないかに影響すること】

・解決に必要な条件だけを挙げている…16/22

・解決に不必要な条件も挙げている…3/22

・無記入…3/22

【理想化の図(凹凸があり，角が丸い筆箱を理想化して直方体とみなした図をかく)】

・理想化された直方体をかけている…14/22

・理想化された直方体をかけていない…3/22

・無記入のため判断できない…5/22

②感想(複数回答)

(ア)楽しかった。おもしろかった。(11)

(イ)授業で学んだことを今後，普段の生活に生かしていきたい。(6)

(ウ)包み方は難しいということがわかった。(5)
(エ)包み方がわかってよかった。(5)
(オ)キャラメル包みが最も小さな紙で包める包み方であることがわかった。(4)
(カ)包むときに一番小さい紙の大きさがわかってよかった。(3)
(キ)最小の紙の大きさは計算で求めることができることがわかった。(3)
(ク)数学は身近であると感じた。(2)
(ケ)ラッピングに興味がもてた。(1)
(コ)包むことは数学の分野ではないと思っていたが, たくさんの計算や知識を使うことがわかった。(1)
(サ)環境保護のためにもキャラメル包みを覚えておくべきだ。(1)
(シ)包み方を変えるだけで, 無駄なスペースを減らせたり, いろんな見方ができることに気が付いた。(1)
(ス)もっと詳しく調べてみたい。(1)
(セ)物を包んでいる様子を見たことはあったが, それを包むための包装紙の大きさは気にしていなかった。(1)

(2)授業分析の結果

①クラス全体の実態

授業の様子を収めたビデオより, 生徒はラッピングという題材に対し興味をもって授業に取り組んでいた。問題設定段階ではビデオの内容に興味をもち, 実物を提示した後の予想や活動にも, 問題場面をとらえようとする意欲的な態度が多く見られた。

②観察対象生徒の実態

(ア)上位の生徒

他の生徒との相談や発言が多く, 積極的に授業に参加していた。手立て 1 では, つぶやきや他の生徒との会話に, 自分の問題としてとらえて考えている様子が見られた。手立て 2－①では問題場面を自分のこととして考え, 3 つ以上の条件を挙げていた。また, 手立て 2－②では解決に必要な条件として, 包むものの表面積を挙げていた。ただし, この条件は手立て 2－①の段階では挙がっていなかった。手立て 3 では,「はじとはじを結んで直線に」などの発言から理想化をしていることがうかがえた。

(イ)中位の生徒

1 回目のビデオは集中して見ており, 興味を引くことはできていたが, その後の手立て 2－①では, すぐに条件を挙げることはできず, 時間をかけて 2 つの条件をあげていた。次に, 手立て 1 では, 他の生徒との会話や, 挙手による意思表示があり, 提示された包装紙で筆箱を包めるのかどうかということに問題意識をもっていた。しかし, 手立て 2－②では, 雑談をすることが多く, 条件を挙げることはできていなかった。手立て 3 に関しては, ワークシートに直方体の絵をかくことができていたが, 手立てによってかいたわけではなく, 無意識に理想化してかいた図であった。

(ウ)下位の生徒

手立て 1 では, 提示された包装紙で筆箱が包めるかという問題に対しては, 十分な関心をもっていたが, その関心が目的意識を喚起するには至らなかった。手立て 2－①では, ビデオを集中して見ることで, 主人公の抱いた疑問を理解し, 自分だったらどのような基

準で包装紙を選択するかを考えることができていた。手立て 2－②や 3 は, 他の生徒と雑談などをしていて教師の指示が通らず, 条件整理の考え方, 理想化の考え方が促されなかった。

4. 考察

(1)手立ての有効性

①手立て 1

手立て 1 は有効であったといえる。生徒はビデオを集中して見ており, さらに提示された筆箱と包装紙に対しても注目している姿が見られたことから, 興味・関心をもっていたと考えられる。そして包めるかどうかを予想させる場面では, 観察対象生徒 3 人とも, つぶやきや会話, 挙手から, 自分の問題として考えていたことがわかる。よって, この手立てにより, 問題解決へと向かうための目的意識をもたせることができたといえる。

②手立て 2－①

手立て 2－①は有効であったといえる。ビデオを興味・関心をもって見ていたことにより, ビデオの主人公の問題を自分の問題としてとらえやすくなっていた。上位の生徒からも具体的に自分がプレゼントをする場面を考えていることがつぶやきから見られた。また, ワークシートの記述から, 自分が包装紙を選ぶ際に考えることを全ての生徒が挙げていた。

③手立て 2－②

手立て 2－②はおおむね有効であったといえる。実際に包んでみるという活動において, 大きさや包み方に関する発言をする姿が見られたことや, ワークシートの記述において大半の生徒が必要な条件を選び出していたことからも, 必要な条件に着目していたと考えられる。これは, 実際に包んでみるという活動により, 必要な条件を整理する活動をしやすくなったからだと考えられる。しかし, 前段階で挙げられた条件以外のものを, 必要な条件として挙げている生徒もいたことから, この手立てについては改善する余地がある。

④手立て 3

手立て 3 はおおむね有効であったといえる。実測したことで, 筆箱の形を直方体ととらえた生徒(中位)がいたことや, ワークシートの記述において, 大半の生徒が理想化された直方体をかいていたことから, 理想化が促されていたことがわかる。上位の生徒のように「どこを基準に測ればいいかわからない。」など, 凹凸があることの困難さを感じている生徒はいたが, 直方体で考える必要性を感じて理想化したかどうかは判断できない。少なくとも観察対象生徒 3 人からはそのような反応は見られなかった。

(2)総合的考察

本授業において用いた 3 つの手立ては, 生徒が現実事象の問題を数学の問題として設定することを促すために, おおむね有効であったといえる。よって, 目的意識をもたせるための, また, 理想化・条件整理の考え方を促すための, 具体的な手立てを講じることによって, 生徒は現実事象の問題を数学を用いて解決できる課題として設定することができるといえる。

また生徒の感想には, 日常生活と数学とのかかわりについて言及しているものが多く見られた(感想の結果のイ, ク, コなど)。その中でも,「学んだことを普段の生活の中で生かしたい」など積極的に日常生活に数学を用いていこうという姿勢が見られたことから, 本

授業において, 生徒の数学と現実との結びつきの意識を強めることができたと考えられる。
(3)問題点

「問題に関係のある条件を挙げる」場面では, 生徒は条件を挙げることはできていた。しかし, 進んで条件を挙げることができない生徒(中位)がいた。これは, ビデオによって生徒の興味を引くことはできたが, その後の条件を考える際に,「ビデオの中の問題」を「自分の問題」ととらえることができなかったためと考えられる。そこで, ビデオ以外にも, より生徒の問題意識を触発するような働き掛けが必要である。

次に,「挙げられた条件から必要な条件を選び出す」場面では, 本授業ではその流れをつくることができなかった。これは, 解決に必要な条件が前段階で十分に挙げられなかったこと, 条件整理の 2 つの段階のつながりを意識させられなかったことが, 原因として考えられる。そこで, 条件を挙げる際に, 問題の解決に必要となる条件を意識させる工夫をし, その後, 挙げられた条件から必要な条件のみを選び出させるような働き掛けが必要である。

筆箱の形を理想化する場面では, 生徒の多くは教師の働き掛けに対し, 抵抗なく理想化することができていた。しかし, 生徒に理想化の必要性を印象付けることができたかは定かでない。少なくとも, 観察対象生徒(中位, 下位)からは判断できなかった。この原因として, 筆箱がほぼ直方体であったため, あえてそれを直方体ととらえる必要性がなかったこと, 理想化しないと課題の解決が困難であるということを生徒が感じる場がなかったことが挙げられる。そこで, 複雑な形のものを包む対象とする, 理想化せずに課題に取り組ませるなど, より理想化の必要性を感じさせるような働き掛けが必要である。

第 5 章　総合的考察

第 4 章においてそれぞれ考察してきた, 小学校実践と中学校実践について総合的に考察する。ここでは, 数学的な考え方を引き出すために講じた手立ての有効性と数学的モデリングを授業に取り入れた結果についての総合的考察とする。

1. 手立てについて

本研究では, 授業に数学的モデリングを取り入れ, その過程において用いられる数学的な考え方を設定し, それらの考え方を引き出すための手立てが有効であったかを考察することを目的としていた。その結果, 以下のことが成果として示された。

- 問題設定段階における数学的な考え方を引き出すために講じた 3 つの手立ての有効性
- 3 つの手立てを講じることによって, 子どもにとって困難とされていた定式化を円滑に進めることができること

これらは, 適切な手立てを講じることによって, 数学的モデリングにおける数学的な考え方に着目した授業を効果的に行うことができることを示している。今後, このような手立てをさらに検討し, それらを講じることによって, 子どもに数学的モデリング能力が身に付く指導が行われることを期待できる。

2. 数学的モデリングについて

第 1 章で述べたように, 数学的モデリングを授業に取り入れる利点はいくつか考えられた。そのうち, 今回のそれぞれの実践では, 授業の様子や感想の記述から, 以下の 3 点について確かめることができた。

・興味・関心を引くことができる
・算数・数学を現実に応用しようとする意識をもたせることができる
・身の回りの現象に興味をもたせることができる

また，それ以外にも「数学の有用性への気付き」や「算数・数学を用いようとする意欲」を見ることができた。これは，現実事象の問題を数学を用いて解決しようとする意識のあらわれと考えることができる。このように，1 回の実践の中でさえも子どもの変容を見とることができた。このことから，数学的モデリングを用いた授業を子どもが繰り返し経験すれば，よりいっそう「現実事象の問題を数学を用いて解決する能力」を身に付けさせることが期待できるのではないか。

おわりに

本研究では，数学の「創造」と「応用」の両側面からの子どもの育成が必要と考え，そのために数学的モデリングと数学的な考え方に着目して研究を進めてきた。その結果，本研究の成果として以下の 2 点が挙げられる。

①数学的モデリングにおける数学的な考え方を明確に位置づけたこと

数学的モデリングを取り入れた授業を行う際，そこではたらく考え方が明確にされていなかったため，現実事象の問題を数学を用いて解決する能力を子どもに効率的に身に付けさせることが難しかった。これに対し本研究では，数学的モデリングにおける数学的な考え方を明確にすることを目的とし，それを達成することができた。

②数学的な考え方を応用の側面へ拡張してとらえたこと

一般的な数学的な考え方のとらえは，数学に「応用」と「創造」の 2 つの側面があるにもかかわらず，創造的側面のみからのとらえであった。これに対し本研究では，数学的な考え方を応用的側面からもとらえることを目的の 1 つとし，それを達成することができた。

今後の課題としては，数学的モデリングにおける数学的な考え方に関する有効な指導方法を構築し，その実践を検討していくとともに，子どもに数学的な考え方が身に付いたかを知るための客観的な評価方法を確立させることが必要である。

最後に，授業実践にあたり，高井章男先生，渡部智和先生をはじめとする実践に協力していただいた先生方には，お忙しい中，温かく御指導と御協力をしていただき，心より感謝申し上げます。また，指導教員である和田信哉先生には，日頃から多くの御指導をしていただき，本研究をここまですすめることができました。併せて感謝申し上げます。

【引用及び参考文献】

池田敏和・山崎浩二(1993).「数学的モデリングの導入段階における目標とその授業展開のあり方に関する事例的研究」.『日本数学教育学会誌』，第 75 巻，第 1 号，pp.26-32.

池田敏和(2002).「中等数学科における数学的モデリング･応用の指導目標に関する一考察」.『日本数学教育学会誌』，第 84 巻，第 5 号，pp.2-12.

池田敏和(2004).「数学的モデリングを促進する考え方に焦点を当てた指導目標の系列と授業構成に関する研究」.『数学教育学論究』，Vol.81-82，p.5

片桐重男(1972).「数学的な考え方の指導と留意点について」.『日本数学教育学会誌』，第 54 巻，第 2 号，pp.2-8.
片桐重男(2004).『数学的な考え方の具体化と指導』，第 1 巻，明治図書
熊谷治久(2002).「数学的モデリングを取り入れた授業実践」.『日本数学教育学会誌』，第 84 巻，第 9 号，pp.21-28.
熊谷治久(2004).「確かな定式化を目指した数学的モデル化過程の授業」.『日本数学教育学会誌』第 86 巻，第 11 号，pp.12-19.
国立教育政策研究所(2004).『生きるための知識と技能 2　OECD 生徒の学習到達度調査(PISA)2003 年調査国際結果報告書』，ぎょうせい.
中島健三(1981).『算数・数学教育と数学的な考え方』. 金子書房
長崎栄三(2001).『算数・数学と社会・文化のつながり』明治図書
西村圭一(2001).「数学的モデル化の枠組みに関する研究」.『日本数学教育学会誌』，第 83 巻，第 2 号，pp.2-12.
和田信哉(2005).「数学的な考え方に関する諸問題」. 新潟大学教育人間科学部数学教室.『数学教育研究』，第 40 号，pp.7-16.

【参考資料】

小学校授業実践(2005 年 12 月　公立小学校 6 年 1 組 36 名)

(1)単元名

第 5 学年「円」

(2)本時の目標

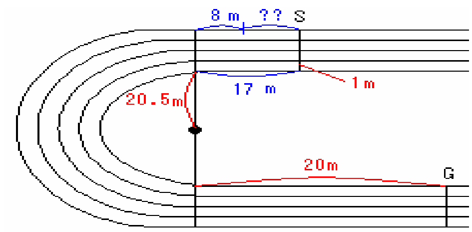
①　現実事象の問題に対して，意欲的に条件整理や理想化に取り組み，解を求めようとすることができる。

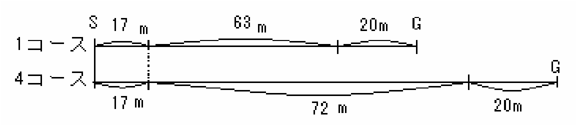
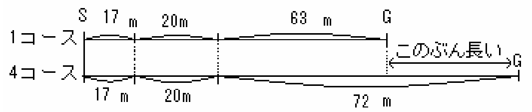
②　既習事項の円周や四則計算を使って，解を求めることができる。

(3)展開：2 時間

段階	教師の働き掛け	学習活動と児童の意識・思考
① 問題 設定	「ビデオを提示する順番を工夫する」ことにより児童の予想とビデオの結果がずれるようにする。 手立て 1 ○走者Ａと走者Ｂの特徴をおさえさせる。 発問：「Ａさんと Ｂさんはどちらが速かったでしょうか。」 発問：「　同上　」 ○走者Ａと走者Ｂはライバルであることや速さが同じであることを話す。 ○ビデオ④の結果を予想させ，挙手させる。 発問：「予想は当たりましたか。Ｂさんが	○ビデオ①②を視聴する。 ・　どちらが速いかわからないな。 ○ビデオ③を視聴する。 ・　同時にゴールしたから速さは同じだ。 ○ビデオ④を視聴する。 ・　ビデオ④ではどうしてＢさんが負けたのだろう。

	大きく負けてしまいましたが，どうして負けたのだろうか。」 ○ワークシート 1 を配布する。 「負けた原因を考えさせる」ことにより，現実場面で問題となる条件に目が向くようにする。 手立て 2	
	○走者 B が負けた原因だと思うことをワークシート 1 に記入させ，発表させる。発言を板書する。	○負けた原因を考えながらビデオ①～④を視聴する。
	○原因(条件)を細かく考え，長さと速さに帰着させる。 ○速さを取り上げ，速さに違いがあったのかを話し合わせる。 発問：「ずいぶん差がついていましたね。疲れや天気が原因で速さが遅くなったとしても，実力の近い 2 人がこれほど差がつくと思いますか。」 大きく差がついたという事実に着目させる。 手立て 3－①	○考えた原因をワークシートに記入し，代表が発表する。 ・ カーブだから。・・・・・・(長さ) ・ 速さが遅くなったから。・・(速さ) ・ 疲れたから。・・・・・・・(速さ) ・ 調子が悪かったから。・・・(速さ) ・ コースが違ったから。・・・(長さ) ・ そういえば 2 人の速さは同じだったから，速さが負けた原因になるのはおかしいな。
	○「もし速さが同じだったら」と仮定した場合の負けた原因をワークシート 1 に記入させる。 ○条件不足の図(概形のみかいてある)を示し，カーブでは外側の方が長いから不利ということを感覚的に気付かせる。 発問：「カーブでは外側を走るほうが長くて不利そうです。どうしたらよいでしょうか。」	○仮定した場合の負けた原因をワークシートに記入する。 ・ 4 コースのほうが走る長さが長かったから。 ・ スタートの位置を変えて長さを合わせればよい。 課題 2 人が同じ長さを走るように，外側を走る人のスタートの位置を決めよう。
	○ワークシート 2 を配布し，課題を書かせる。 ○どの長さがわかればよいか十分考えさせ，代表に走者 A の走った位置をなぞらせる。 ○歪んだ線をかいたり，ライン上をなぞった場合，それが適当かクラス全体に投げかけ，検討させる。	○ワークシート 2 の図から課題の解決を試みる。 ・ 長さがわからないから求めることができない。 ・ 直線の長さや曲線の長さを知りたい。

	○1 コースの中央を走った場合に 100m となることにする。 「提示する図を工夫する」ことにより, 理想化すべき部分に目を向きやすくする。 手立て 3－② 発問:「なぞったガタガタの線はどんな形に見えますか。」 ○円として考えてよいか, 挙手をさせ確かめる。 ○長さに関するデータを示す。 ①直径 40.982m ②コーナーからゴールまで 20m ③コース幅 1.25m ④1～4 コースまでの幅 5m 発問:「どんな数なら面倒くさくないだろうか。」 発問:「直径は整数にしましたが, コース幅は 1.25m のままで求めますか。」	(考え 1) ・ 円の半分にみえる。 ・ プリントを折って 2 つのコーナーを重ねると円になる。 ・ 曲線の長さは円周の半分だから直径がわかれば求められる。 ・ 40.982m で計算するのは面倒だな。 ・ 概数にすればいい。 ・ 41m なら簡単だ。
③ 解決の実行	○机間指導で円周率を 3 として考えるように決める。円周の公式もその際に, 想起させ板書する。 ○支援事項 ①走った距離の不平等さに目を向けさせる。 発問:「どちらがどれだけ長く走ったことになりますか。2 人はそれぞれ何 m 走ったことになりますか。」 ②式で表したものを図に表すように促す。 ③図に表したものを式に表すように促す。 ④解が求まった児童には, 図や式を使ってわかりやすく説明できるように考えをまとめさせる。 ○小数で計算する場合は, 四捨五入して, 小数第 2 位まで求めるように指示する。 ○代表に求めた解と考え方を板書させる。	○ワークシート 2 に解を求める。 ＜解答例＞ (考え 3) コースの中央を走り, 直径 41m, コース幅 1m, 円周率 3 の場合  1 コースを考えると, カーブの部分は, 42×3÷2＝63m なので, 始めの直線は, 100－63－20＝17m 4 コースの場合カーブの部分は, 48×3÷2＝72m だからカーブと最後の直線を合わせて, 72＋20=92m 100m にするには 100－92＝8m ぶん, 始めの直線を走らないといけない。だから, 17－8=9m 前からスタートすればよい。

	(考え 2)  このように 4 コースのほうが長く走ったことになる。 1 コースは 100m，4 コースは 17＋72＋20=109m走っている。 だから, 109－100=9m前からスタートすればよい。	 始めと終わりの走る長さは同じだから, カーブの部分が 1 コースより何 m 長いか調べればわかる。72－63=9m だけ 4 コースのほうが長い。だから, 9m前からスタートすればよい。
④ 論理的 組織化	○児童の説明を補う。(補助具として画用紙のひもを使う) 発問：「どの求め方でも同じ答えになりました。一番簡単に求められるものはどの考え方でしょうか。」	○代表は解決の仕方を説明する。 ・ 全部答えは同じになるけど，カーブの長さの違いだけ求めればいいんだな。
⑤ 解決の 検証	○陸上競技場で実際に行われている工夫を，ビデオの視聴(2 回)を通して示し，求めた数値と実際の数値を比較させる。 ・ 1 コースより 11.781m前からスタートする。 ・ 円周率は 3.1416 を用いている。 ・ コースの内側から 20cm の位置を走ると仮定している。 発問：「答えの違いは何が原因なのだろうか。」 ○授業の感想を記入させる。	・ 円周率を細かくしていたから少し違ったのかな。 ・ 概数にして計算したから違ったのだろう。 ・ コースの内側から 20cm の位置を走ると仮定してるからかな。

中学校授業実践(2005 年 12 月　国立中学校 2 年選択数学 24 名)

(1)単元名

「数学的モデリング」(選択数学)

(2)本時のねらい

① 現実事象の問題に対して, 意欲的に条件整理や理想化を行い, 問題の解決をしようとすることができる。

② 数学の既習事項を用いることで, 直方体ととらえた品物を包むことのできる最小の紙の大きさを求めることができる。

(3)展開：2 時間

<table>
<tr><th>段階</th><th>教師の働き掛け</th><th>学習活動と生徒の意識・思考</th></tr>
<tr><td>①
問題
設定</td><td>○ラッピングに関する経験を問う。

ビデオを見せ, 生徒をビデオの主人公と同様の立場に立たせる。　手立て 2－①

発問：「自分ならこのような状況で何を基準に包装紙を選びますか。」
○ワークシートを配布し, 記入させる。
○代表者に発表させる。

○ビデオの内容を確認する。
「ビデオの登場人物が悩んでいたことは何だったでしょう。」
○意見をまとめ, ワークシートに課題として記入させる。

筆箱と包装紙を提示し, ビデオの主人公と同じ疑問を抱かせる。　手立て 1

発問：「この包装紙でこの筆箱を包めると思いますか。」

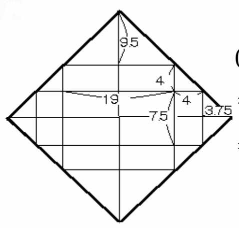
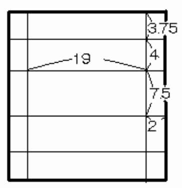
ビデオの主人公が選んだ包装紙では筆箱を包むことができないことを, 体験を通じて感じさせることで, 包むためにはどのような条件が関わってくるかを考えさせる。　手立て 2－②

発問：「包めるか包めないかには, どんなことが影響するのでしょうか。」</td><td>○ラッピングに関する経験を思い出す。
○ビデオ①(主人公が店内でどの包装紙にしようか悩んでいる)を視聴する。
○包装紙を選ぶ際に関わる条件を挙げる。
・包装紙の柄や色　・包装紙の大きさ
・包む物の大きさ　・好み
・包装紙の質　　　・包装紙の値段
○ビデオ②(包装紙の色や柄を決めた主人公が, 今度はどの大きさにしようか悩んでいる)を視聴する。
・プレゼントを包むのにちょうどいい包装紙がどれかわからない。
・包装紙が小さいと包めないけど, 大きい包装紙だと値段が高いし, 無駄が出る。

課題 プレゼントを包むことのできる, なるべく小さい包装紙の大きさを知りたい。

・包めると思う　・包めないと思う
・見ただけではわからない　・微妙
○代表者が実際に包んでみる。

○包めるかどうかに影響する条件を挙げる。</td></tr>
</table>

	◯ワークシートに記入させる。 ◯挙げられた条件を確認していく。 ・筆箱の大きさ 発問:「筆箱の大きさはどうやって調べますか。形はどうなりますか。」 筆箱の大きさを測らせることで,筆箱の凹凸に着目させる。 手立て③ ・表面積…筆箱の大きさや形がわかれば求められる。 ・包み方…資料を用意。 ・包装紙の大きさと形…→課題へ ◯適当に選んだ包装紙では包めなかったことを確認する。 発問:「実際に試してみなくても包める紙を選ぶには何がわかればよいですか。」 ◯ワークシートに課題を記入させる。	・品物の大きさ,形　　・表面積 ・包み方　　・包装紙の大きさ,形 ・凹凸を無視して長さを測ろう。 ・直方体として考えれば,いいんじゃない。 ◯理想化した図をワークシートに記入する。 ・縦 7.5cm,横 19cm,高さ 4cm の直方体をかく。 ・筆箱を包める最小の紙の大きさ 課題 この直方体を包める最小の紙の大きさを求めよう。
③ 解決 の 実行	「包み方はいろいろありますが,今回はよく使われる,この 3 種類に限定して考えましょう。」 ◯課題を確認し,4 人の班を作る。 ◯包み方の資料,直方体の積み木,紙を配布する。 ◯包んで気付いたことをワークシートに書くよう指示をする。 ◯机間支援を行う。 ◯課題の意図から,ななめ包みは考える必要がないことを確認する。	◯班活動 ・包み方毎に大きさを比べよう。 ・ななめ包みは明らかに無駄が多いよ。 ・紙を切っていって,どんどん小さくしてみよう。 ・包んで最小になる紙はどんなふうに考えられるだろう。本当にこれが最小かな。 ・包んだときの折り目が展開図のように見えるので,展開図を使って考えよう。
	〈スクエア包みの展開図〉  $(19+4\times2+3.75\times2)^2\div2$ $=34.5^2\div2$ $=595.125(\mathrm{cm}^2)$	〈キャラメル包みの展開図〉  $(19+2\times2)\times(7.5\times2+4\times2)$ $=23\times23$ $=529(\mathrm{cm}^2)$ よって必要な紙の面積はキャラメル包みの方が小さく,最小は $529\mathrm{cm}^2$ である。
④ 論理 的組	◯最小の紙の大きさと,どのようにそれを求めたかを発表させる。 ◯発表の補足説明をする。	◯キャラメル包み,スクエア包みについてそれぞれ代表の班が発表する。

織化		◯この直方体に必要な最小の紙は 23×23cm の正方形だ。
⑤解決の検証	◯早く解決に至った班に,実際に求めた大きさの紙を作ってもらう。 ◯生徒に実際に包ませる。 ◯感想プリント配布し,2 回の授業でわかったことや感想を記入させる。	・少し余裕がある部分やぎりぎりの部分もあるけれど,目安にはなると思います。 ・最初に筆箱の大きさをおおよそで測ったからずれちゃったんじゃないかな。 ◯感想等を記入する。